应用数学和力学，第16卷 第7期（1995年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

Ω-场的暴涨宇宙

李华燦 余 燊

（香港理工学院，1994年7月22日收到）

摘 要

本文主旨在应用余燊提出的Ω-场理论[1]，去研究宇宙学问题。假设时空遵从罗伯逊-沃尔克(R-W)度规的结构，而能量张量动量张量只包含Ω-场的项，我们证明宇宙早期存在一急速暴涨阶段。视界问题和平直性问题从而获得简单而自然的解释。

关键词 Ω-场 暴涨 罗伯逊-沃尔克度规

一、引 言

虽然弗利德曼模型可解释以下事实：宇宙红移、微波背景辐射和氦元素的丰度，但却不能解决视界和平直性等问题。这一难题可从以下假设下一并解决：即宇宙早期经历一急速暴涨时期。以往有两种途径解释暴涨：第一种是考虑爱因斯坦方程的一级量子圈图的修正[2]，但这一方法却未能逃避直至现今还没有成功的量子引力理论的事实；另一种解释是要求宇宙早期曾发生相变，Higgs标量场的相变所产生的暴涨最初由Guth提出[3]，其后Linde[4]及Albrecht和Steinhardt[5]加以改进。回顾可以参看文[6]和[7]。以上模型的缺点是我们不知道Higgs标量场是从何而来的——它们只是人为的。以上两种模型还不能解释奇点，宇宙常数和星系形成等问题。本文是要提出另一种产生暴涨的原因。我们将要证明暴涨的出现是Ω-场理论的一个自然推论，而无需加入额外的粒子场，因为Ω-场是从时空几何推演得到的。在暴涨期间，由于有Hawking辐射效应，产生的粒子便会使宇宙过滤到弗利德曼的演化模式。这方面的讨论可参看文献[8]～[10]。除此以外，爱因斯坦的梦想即物质和力场只是时空的某种特质，亦可在Ω-场的理论下得到实现。

二、Ω-场宇宙的暴涨

首先，我们将从另一种途径获得Ω-场理论的场方程。这一理论的基本假定由以下几条给出：

(a) 赋与规度$g_{\mu\nu}$的膺黎曼流形M；

(b) 定义在M的仿射联络∇，并令

$$\nabla g=0$$

(c) （弱）等效原理，

(d) 最小作用原理

$$\delta\int R\sqrt{-g}\,d^4x=0 \tag{2.1}$$

其中 R是以仿射联络作定义的黎曼标量．在参考[1]中，假定(d)是以仿射联络作定义的爱因斯坦方程；现在被最小作用量原理所取代．在附录A中，我们发现用最小作用量原理所得到的场方程和参考[1]得到的是相同的

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-6(\partial_\mu\Omega\partial_\nu\Omega-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_\alpha\Omega\partial^\alpha\Omega) \tag{2.2}$$

其中 标量场Ω是从时空的扭转推演得到的．方程 (2.2) 的右边是重力场的能量动量张量，这在爱因斯坦的理论中是不存在的．由于能量动量张量只包含Ω-场，所以方程(2.2)只含包几何量．

威耳假设和宇宙学原理要求宇宙有以下R-W度规的时空结构

$$ds^2=dt^2-a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d^2\phi)\right] \tag{2.3}$$

由于要和R-W度规相容，方程(2.2)的右边必可写成以下形式

$$\alpha(x^\mu)u_\rho u_\sigma+\beta(x^\mu)g_{\rho\sigma}$$

其中 α和β是x^μ的函数，u_ρ是四维速度．所以我们有

$$\partial_\lambda\Omega=\psi(x^\alpha)u_\lambda \tag{2.4}$$

其中 ψ是x^α的函数．由于有

$$\partial_\mu(\partial_\nu\Omega)-\partial_\nu(\partial_\mu\Omega)=0 \tag{2.5}$$

考虑到(2.4)和(2.5)，得

$$\omega_{\mu\nu}=(u_\mu\partial_\nu-u_\nu\partial_\mu)\ln\psi \tag{2.6}$$

其中 $\omega_{\mu\nu}=(\partial_\mu u_\nu-\partial_\nu u_\mu)$和$u_\mu\partial_\nu-u_\nu\partial_\mu$是角动量算子．R-W度规成立的充要条件是

$$\omega_{\mu\nu}=0 \tag{2.7}$$

所以，如ψ在非零的情况下，方程(2.6)和(2.7) 相容的充要条件是ψ只含宇宙时t的函数，即$\psi=\psi(t)$．而从方程(2.4)得知Ω只含宇宙时t的函数，即$\Omega=\Omega(t)$，并且有

$$\psi=\frac{\partial\Omega}{\partial t} \tag{2.8}$$

方程(2.2)因而可写成以下形式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-6\dot{\Omega}^2\left(u_\mu u_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\right) \tag{2.9}$$

其中 点"·"代表时间导数．取方程(2.2)的四维协变散度，得

$$\Box\Omega=0 \tag{2.10}$$

可证明方程(2.10)等于以下方程（参看附录B)：

$$\ddot{\Omega}=0 \tag{2.11}$$

方程(2.11)的解是

$$\Omega=A+bt \tag{2.12}$$

其中 A，b是常数，在以后的讨论中，我们假设b是正数．对方程(2.12)求t的导数，得

$$\dot{\Omega}=b \tag{2.13}$$

将方程(2.9)和$g^{\mu\nu}$缩并，并考虑方程(2.13)，得

$$-R=6b^2 \tag{2.14}$$

另一方面，由于度规取R-W形式，曲率标量R满足以下方程

$$-R=6\left(\frac{k}{a^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{\ddot{a}}{a}\right) \tag{2.15}$$

在方程(2.14)和(2.15)中，消去R，得

$$a\ddot{a}+\dot{a}^2+k-b^2a^2=0 \tag{2.16}$$

附录C给出这个微分方程的解．经一次积分，方程(2.16)变成

$$\dot{a}^2=\frac{b^2}{2}a^2-k+\frac{c}{a^2} \tag{A3.11}$$

其中 c为任意常数．方程(2.16)的第二次积分的函数形式是与c的数值有关的，以下分三种情况作讨论．

(i) $c=\frac{k^2}{ab^2}$

$$a=\left(\exp[\sqrt{2}bt+D]+\frac{k^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

其中 D是任意常数．由于我们可以自由选取宇宙时的起点，并为了简单起见，设$D=0$，$k=0$，±1，则分别有以下的解

(a) $k=0$ (即$c=0$)

$$a=\exp\left[\frac{b}{\sqrt{2}}t\right] \tag{2.18}$$

(b)(c) $k=\pm1\left(\text{即 } c=\frac{1}{2b^2}\right)$

$$a=\left(\exp[\sqrt{2}bt]+\frac{1}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.19}$$

(ii) $c>\frac{k^2}{2b^2}$

$$a=\frac{1}{b^2}(b^2(2cb^2-k^2)^{\frac{1}{2}}\sinh(\sqrt{2}bt+E)+k^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.20}$$

其中 E是任意常数．对$k=0,\pm1$，又有以下的解

(a) $k=0$

选取$E=0$，得

$$a=\left(\frac{2c}{b^2}\right)^{\frac{1}{4}}(\sinh(\sqrt{2}bt))^{\frac{1}{2}} \tag{2.21}$$

(b)、(c) $k=\pm1$

选取$E=\sinh^{-1}\left(\frac{-1}{b^2\sqrt{2cb^2-1}}\right)$，这时$a=0$当$t=0$，而方程(2.20)可写成

$$a=\frac{1}{b^2}\left(b^2\sqrt{2cb^2-1}\sinh\left[\sqrt{2}bt+\sinh^{-1}\left(\frac{-1}{b^2\sqrt{2cb^2-1}}\right)\right]+1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

(iii) $c<\frac{k^2}{2b^2}$

$$a=\frac{1}{b^2}((k^2-2b^2c)\cosh(\sqrt{2}bt+F)+k^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

(a) $k=0$

选取$D=0$，得

$$a=\frac{1}{b}((-2c)\cosh(\sqrt{2}bt))^{\frac{1}{2}} \tag{2.24}$$

(b)、(c) $k=\pm 1$

选取$D=0$，得

$$a=\frac{1}{b^2}((1-2b^2c)\cosh(\sqrt{2}bt)+1)^{\frac{1}{2}} \tag{2.25}$$

以上各种情况的膨涨因子和宇宙时的关系由以下图1～5显示

(i) $c=\frac{k^2}{2b^2}$

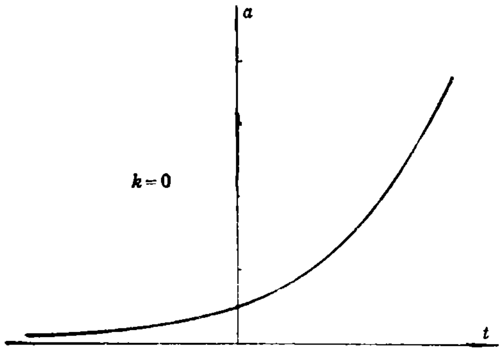

图 1

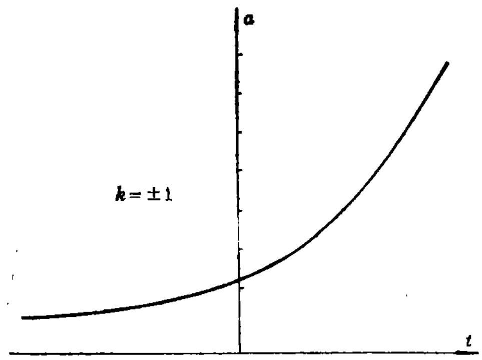

图 2

(ii) $c>\frac{k^2}{2b^2}$

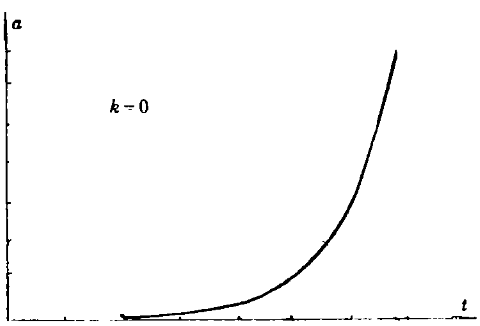

图 3

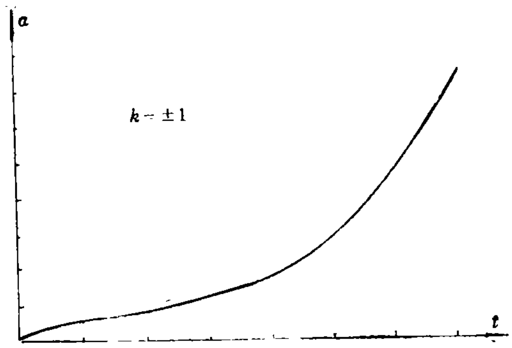

图 4

(iii) $c<\frac{k^2}{2b^2}$

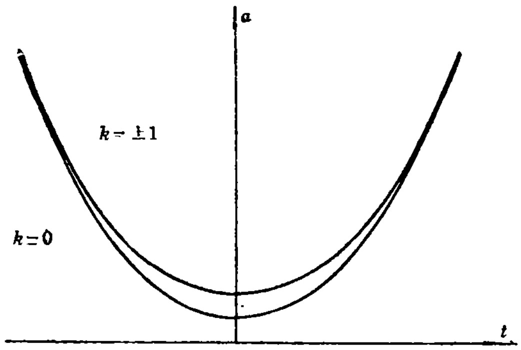

图 5

(i) (a)　图1所示

这是无奇点的德西特宇宙．当$t\to-\infty$时，$a\to 0$

(b)、(c)　图2所示

这宇宙与(i)(a)很相似，不同的地方是，当$t\to-\infty$时，$a\to\sqrt{1+b^{-4}}>0$

(ii) (a)　图3所示

对$t\gg\frac{1}{\sqrt{2}b}$，这是一德西特宇宙，当$t=0$却出现一奇点．

(b)、(c)　图4所示

对t足够大，这是一德西特宇宙，当$t=0$时，亦出现一奇点．

(iii)　(a)、(b)、(c)　图5所示

这是一个无奇点的'反弹'宇宙．当$t=0$时，宇宙的半径最小．对$t\gg\sqrt{2}\,b$，这亦是一德西特宇宙．

综合以上各种情况，宇宙都曾经历一段子数暴涨时（即德西特宇宙）.平直性问题和视界问题从而得到解决．

三、热弗利德曼阶段

为了便于表述观念，我们只讨论 (i) (a) 的情况．比较方程(2.17)和德西特的膨涨因子($a\propto\exp(Ht)$)，可得哈勃常数H如下

$$H=\frac{b}{\sqrt{2}} \tag{3.1}$$

利用 Bogolicbovio 混合模态分析[8],[9]或路径积分方法[10]都可证明德西特宇宙存在Hawking辐射．身处德西特宇宙的观察者可探测到各向同性的热辐射谱，它的温度T_H和哈勃常数H及参数b的关系是

$$T_H=\frac{H}{2\pi}=\frac{b}{2\sqrt{2}\pi} \tag{3.2}$$

Hawking 辐射产生的物质会引致德西特阶段的终结而进入热弗利德曼阶段的演化．而现今观测到的哈勃常数，减速参数和宇宙物质密度的数值对应于弗利德曼阶段．微波背景辐射和氦元素的丰度亦因而得到解释．此外，在德西特阶段产生的Hawking 辐射亦是原始物质涨落的本源，星系和星系团的起源因而得到解释[11],[12]．

四、结论

如果用以上的宇宙模型和Starobinsky[2]和Gott Ⅱ[13]的宇宙模型作一比较，我们发现它们都有相同的地方，就是在出现弗利德曼阶段前都有一德西特暴涨阶段，平直性、视界和磁单极等问题因而得到解决。对于以上Ω-场(i)和(iii)的情况，奇点和宇宙年龄问题亦得到解决。

爱因斯坦将他的方程的左面（即包含时空几何的数式）和右面（即包含物质的数式）比喻为‘花岗石’和‘泥沙’。而Ω-场理论的物质和力场均起源于只包含‘花岗石’的场方程（即方程（2,2)，爱因斯坦的梦想因而得到实现，而宇宙亦可看成‘无’中生有。

附录A

由参考[1]得知，从假定(a)，(b)和(c)出发可得到

$$R=\mathring{R}+6h^{\alpha}h_{\alpha} \tag{A1.1}$$

其中 $\mathring{R}$是以$\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}$定义的黎曼标量。

$$e^{\alpha\beta\gamma\rho}h_{\rho}=S^{\alpha\beta\gamma} \tag{A1.2}$$

其中

$$S^{\gamma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}) \tag{A1.3}$$

而$S^{\gamma}_{\alpha\beta}$是时空的扭转。从方程(2.1)，(A1.1)和以下恒等式

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\gamma}\delta g^{\mu\gamma} \tag{A1.4}$$

得

$$R_{\mu\gamma}-\frac{1}{2}g_{\mu\gamma}R=-6\left(h_{\mu}h_{\gamma}-\frac{1}{2}g_{\mu\gamma}h_{\alpha}h^{\alpha}\right) \tag{A1.5}$$

设

$$\partial_{\mu}\Omega=h_{\mu} \tag{A1.6}$$

从(A1.6)和(A1.5)可得方程(2.2)。假定(A1.6)的确立可以从Yu的统一场理论（参见[14]）中$F_{\mu\gamma}\to0$的情况中得到。

附录B

$$\begin{aligned}
\Box\Omega&=\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\Omega\\
&=\nabla_{\alpha}\partial^{\alpha}\Omega\\
&=\nabla_{0}\partial^{0}\Omega \qquad (\text{由于}\Omega=\Omega(t))\\
&=\nabla_{0}(g^{00}\partial_{0}\Omega) \qquad (\text{由于}g^{\mu\gamma}\text{是对角的})\\
&=\nabla_{0}(\partial_{0}\Omega) \qquad (\text{由于}g^{00}=1)\\
&=\partial_{0}^{2}\Omega-\Gamma^{\lambda}_{00}\partial_{\lambda}\Omega\\
&=\ddot{\Omega}-\Gamma^{0}_{00}\partial_{0}\Omega\\
&=\ddot{\Omega}-\frac{1}{2}g^{\lambda0}(g_{\lambda0,0}+g_{0\lambda,0}-g_{00,\lambda})\dot{\Omega}\\
&=\ddot{\Omega}-\frac{1}{2}g^{00}(g_{00,0}+g_{00,0}-g_{00,0})\dot{\Omega}\\
&=\ddot{\Omega}
\end{aligned}$$

附录 C

设

$$\dot{a}=p \tag{A3.1}$$

其中 $\dot{a}$被看成a的函数。所以

$$\ddot{a}=p\frac{dp}{da} \tag{A3.2}$$

将(A3.1)和(A3.2)代入方程(2.16)，得

$$\frac{dp}{da}+\frac{p}{a}+\left(\frac{k-b^2a^2}{a}\right)p^{-1}=0 \tag{A3.3}$$

设

$$v=p^2 \tag{A3.4}$$

得

$$\frac{dv}{da}=2p\frac{dp}{da} \tag{A3.5}$$

将(A3.4)和(A3.5)代入(A3.3)，得

$$\frac{dv}{da}+\frac{2v}{a}+2\left(\frac{k^2-b^2a^2}{a}\right)=0 \tag{A3.6}$$

这是一线性微分方程，其积分因子是

$$I=\int\frac{2}{a}da=2\ln a \tag{A3.7}$$

因此

$$e^I=\exp[\ln a^2]=a^2 \tag{A3.8}$$

(A3.6)的解是

$$v=e^{-I}\int 2\left(\frac{b^2a^2-k}{a}\right)e^I da+ce^{-I} \tag{A3.9}$$

其中 c是常数。

将(A3.7)和(A3.8)代入(A3.9)，得

$$v=\frac{b^2}{2}a^2-k+\frac{c}{a^2} \tag{A3.10}$$

将(A3.1)和(A3.4)代入(A3.10)，得

$$\dot{a}^2=\frac{b^2}{2}a^2-k+\frac{c}{a^2} \tag{A3.11}$$

因此

$$\int\frac{d\left(a^2-\frac{k^2}{b^4}\right)}{\left(\left(a^2-\frac{k^2}{b^2}\right)^2+\frac{2c}{b^4}-\frac{k^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}\,b\int dt \tag{A3.12}$$

(A3.12)的解可分成文中的三种情况，即(i)(ii)和(iii)

参考文献

[1] Yu Xin, *Astropkysics and Space Science*, **154**(1989), 321—331.

[2] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett.*, **91**B(1980), 99.

[3] A. H. Guth, *Phys. Rev.*, D23., (1981), 347.

[4] A. D. Linde, *Phys. Lett.*, **108**B(1982), 389. *Phys. Lett.*, **116**B(1982), 335.

[5] A. Albrecht, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982)1220—3.

[6] A. D. Linde, *Rep. Prog. Phys.*, (1984), 925.

[7] 300 Years of Gravitation, Cambridge University Press(1987)

[8] A. Lapedes, *J. Math. Phys.*, **19**(1987), 2289.

[9] R. Brandenberger, and R. Kahn, *Phys. Lett.*, 119B(1982), 75.
[10] G. W. Gibbons, and S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, D15(1977), 2738.
[11] R. H. Brandenberger, *Rev. of Mod. Phys.*, 57(1985),1.
[12] R. H. Brandenberger, Physics of the Early Universe, edit. by J. A. Peacon, (1990), 309—322.
[13] Gott Ⅲ, J. R., Nature, 295 (304)(1982).
[14] Yu Xin, Nonlinear gravito-electrodynamics——an Einstein's dream in The Earth and the Universe edit. by W. Schroder, International Association of Geomagnetis and Aeronomy, Germany(1993), 473—484.

Inflation in Ω-Field Cosmology

Li Huacan Yu Xin

(Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong)

Abstract

In this paper, we shall apply the Ω-field theory as first proposed by Yu[1] to cosmology. Under the assumption that the spacetime geometry of the Universe is described by the Robertson-Walker metric and the matter tensor consists only of the Ω-field, the Universe is found to follow a de Sitter expansion. The horizon and flatness problems may thus be explained in a simple and natural way.

Key words Ω-field, inflation, Robertson-Walker metric