

非牛顿幂级数流体平面泊肃叶流 的非线性稳定性*

王振东 周宗科

(天津大学力学系, 天津 300072)

(蔡树棠推荐, 1994年10月28日收到)

摘 要

非牛顿流体在现代工业生产中, 广泛地作为加工的对象。因此非牛顿流体的流动稳定性问题有着重要的生产实际背景。本文选择在聚合物加工时将熔体压入成板口模时形成平面泊肃叶流这一生产背景, 研究其非线性稳定性问题, 计算其亚临界阈值。

关键词 非牛顿流体 非线性稳定性 平面泊肃叶流

一、引 言

非牛顿流体是应力张量与变形速率张量各分量间不满足线性关系的流体。在现代工业生产中, 非牛顿流体广泛地作为加工对象, 如各种高聚物的溶液和熔体, 纸浆, 油脂等。由于这一原因, 人们对非牛顿流体的研究和应用, 已表现出越来越大的兴趣。本文选择在聚合物加工时将熔体压入成板口模形成平面泊肃叶流这一生产实际背景, 研究其非线性稳定性问题, 计算其亚临界阈值。

二、方程和边界条件

非牛顿流体应力张量与变形速率张量之间的纯粘性关系一般为

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + a_1 \left(e_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right) + a_2 \left[e_{ia} e_{aj} - \frac{1}{3} (e_{1a} e_{a1} + e_{2a} e_{a2} + e_{3a} e_{a3}) I_1 \delta_{ij} \right] \quad (2.1)$$

式中 a_1, a_2 均仅为变形速率张量三个不变量 I_1, I_2, I_3 的函数

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \text{div } \mathbf{v} \\ I_2 &= e_{11}e_{22} + e_{11}e_{33} + e_{22}e_{33} - e_{12}^2 - e_{13}^2 - e_{23}^2 \\ I_3 &= e_{11}e_{12}^2 + e_{33}e_{12}^2 + e_{22}e_{13}^2 - e_{11}e_{22}e_{33} - 2e_{13}e_{12}e_{23} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

* 国家自然科学基金资助项目。

这样的非牛顿流体, 通常亦称为非牛顿幂级数流体.

对于二维不可压缩流体的运动, 有 $I_1=0$, $I_3=0$. 本文为方便起见, 仅研究

$$a_2=0, \quad a_1=2\mu-4\mu_2I_2 \quad (2.3)$$

的情况. 式中

$$I_2=u_xv_y-\frac{1}{4}(u_y+v_x)^2 \quad (2.4)$$

此时, 流体运动的方程为

$$\left. \begin{aligned} u_x+v_y &= 0 \\ \rho(u_t+uu_x+vu_y) &= -p_x+\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(p_{xy}) \\ \rho(v_t+uv_x+vv_y) &= -p_y+\frac{\partial}{\partial x}(p_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(p_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= (2\mu-4\mu_2I_2)u_x \\ p_{xy} &= (2\mu-4\mu_2I_2)\frac{1}{2}(u_y+v_x) \\ p_{yy} &= (2\mu-4\mu_2I_2)v_y \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

以半槽宽 h 和 $\mu_2=0$ 时同样压力梯度下的最大流速 U 为参考量, 对方程无量纲化, 再用流动稳定性理论的通常作法, 求出基本流, 引进流函数与扰动流函数, 则可得平面泊肃叶流无量纲化后的扰动流函数 ψ 满足的方程与边界条件为 (平面泊肃叶流如图 1 示)

$$\begin{aligned} \Delta\psi_t + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2\bar{u}\psi_y + \psi_y^2 - \psi_x^2) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(-\bar{u}\psi_x - \psi_x\psi_y) \\ = \frac{1}{R}\Delta^2\psi + \frac{4M}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\{4\psi_x^3 + \bar{u}'^2\psi_{xx} + 2\bar{u}'\psi_{xy}(\psi_{yy} - \psi_{xx}) \\ + \psi_{xy}(\psi_{yy} - \psi_{xx})^2\} + \frac{M}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\{4\bar{u}'\psi_x^2 + 4\psi_x^2(\psi_{yy} - \psi_{xx}) \\ + (\psi_{yy} - \psi_{xx})^3 + 3\bar{u}'^2(\psi_{yy} - \psi_{xx}) + 3\bar{u}'(\psi_{yy} - \psi_{xx})^2\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, 1, t) = \psi(x, -1, t) &= 0 \\ \psi_y(x, 1, t) = \psi_y(x, -1, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

式中 $R = \rho U h / \mu$

$$M = \frac{1}{2} \frac{U^2}{h^2} \frac{\mu_2}{\mu}$$

M 是两粘性系数之比, 可正可负. 基本流

$$\bar{u} = 1 - y^2 + 2M(y^4 - 1) + \dots$$

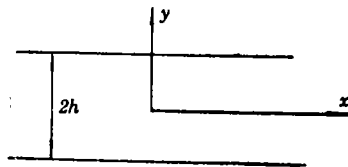


图1 平面泊肃叶流

(2.9)

三、数值计算与结论

在线性稳定性研究的基础上, 本文分别采用人工中性理论与分叉理论, 研究非线性稳定性问题, 计算了亚临界阈值, 得到了非牛顿流体参数 M 对非线性阈值的影响变化曲线.

(1) 人工中性方法

设 $\psi = \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \dots$

则得 ψ_1 满足

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{1e} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2\bar{u}\psi_{1e}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(-\bar{u}\psi_{1e}) \\ = \frac{1}{R}\Delta^2\psi_1 + \frac{4M}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\bar{u}'^2\psi_{1e}) + \frac{M}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\{3\bar{u}'(\psi_{1yy} - \psi_{1xx})\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(x, 1, t) = \psi_1(x, -1, t) = 0 \\ \psi_{1y}(x, 1, t) = \psi_{1y}(x, -1, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ψ_2 满足

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{2e} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(2\bar{u}\psi_{2e}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(-\bar{u}\psi_{2e}) \\ = \frac{1}{R}\Delta^2\psi_2 + \frac{4M}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\bar{u}'^2\psi_{2e}) + \frac{M}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\{3\bar{u}'(\psi_{2yy} - \psi_{2xx})\} \\ - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\psi_{1y}^2 - \psi_{1x}^2) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(\psi_{1e}\psi_{1y}) \\ + \frac{4M}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\{2\bar{u}'\psi_{1e}(\psi_{1yy} - \psi_{1xx})\} \\ + \frac{M}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\{4\bar{u}'\psi_{1e}^2 + 3\bar{u}'(\psi_{1yy} - \psi_{1xx})^2\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\psi_2(x, 1, t) = \psi_2(x, -1, t) = 0 \quad (3.4)$$

$$\psi_{2y}(x, 1, t) = \psi_{2y}(x, -1, t) = 0$$

采用文献[1]中的方法, 可计算得亚临界时的非线性阈值. 计算结果见图2~4.

(2) 分叉理论的方法

设 $\theta = \omega t$ 表示基本波的相位, 且将 ψ 写成 x, y, θ 的函数

$$\psi(x, y, t) = \psi(x, y, \theta)$$

且设

$$\psi = \sum_1^{\infty} \varepsilon^i \psi_i$$

$$R^{-1} = R_{cr}^{-1} + \sum_1^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i \quad (3.5)$$

$$\omega = \omega_{cr} + \sum_1^{\infty} \varepsilon^i \omega_i$$

其中 ω_{cr} 为 $R = R_{cr}$ 时中性小扰动的频率, λ_i, ω_i 均是实数.

将式(3.5)代入式(2.7)中, 并略去 ψ 的三阶及以上量. 则利用可解条件, 可定出 λ_i, ω_i , 并可按文献[2]中的方法确定出亚临界非线性阈值. 计算结果见图5~6.

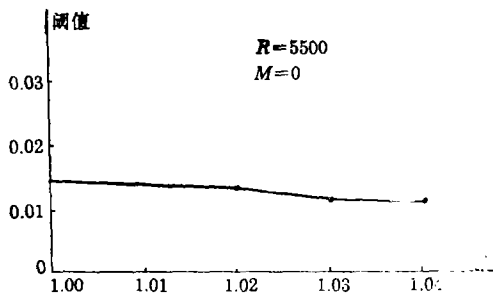


图2 人工中性的计算结果之一

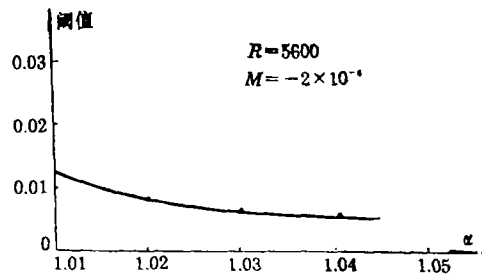


图3 人工中性的计算结果之二

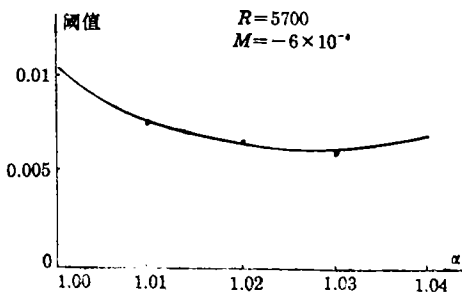


图4 人工中性的计算结果之三

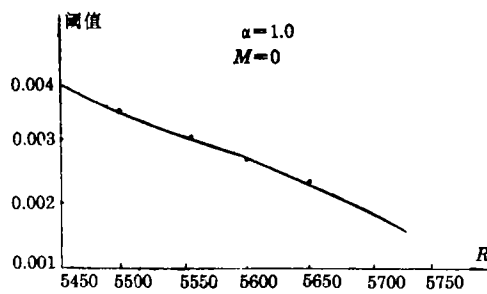


图5 分叉理论的计算结果之一

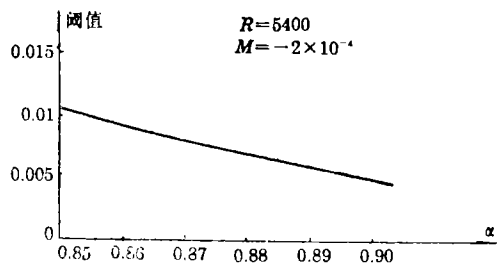


图6 分叉理论的计算结果之二

四、结 论

本文在数值计算时,采用了计算特征值的较一般的方法——(反)幂法^[3],并对差分格式进行恰当的选择,对于给定的 R , α , M ,依次算出相应的特征值 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ 选出虚部最大的来计算中性曲线。

通过数值计算可得到以下结论:

- (1) M 的微小变化,几乎不改变中性曲线的形态,虽然其位置有所改变。
- (2) M 对非线性阈值的影响较大,甚至影响其随 α 变化的趋势。具体可见图2~6。
- (3) 幂法在计算特征值时,可不必估计根的范围,且对任意初始条件都收敛,并同时可检验特征值和特征向量的正确性。

参 考 文 献

- [1] 是勋刚主编, 《湍流》第 I 篇, 天津大学出版社, 天津 (1994).
- [2] Daniel, D. Joseph, *Stability of Fluid Motions*, Springer-Verlag (1976).
- [3] 冯康, 《数值计算方法》, 国防工业出版社 (1978).

The Nonlinear Stability of Plane Poiseuille Flow for Non-Newtonian Power Series Fluid

Wang Zhendong Zhou Zongke

(Dept. of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract

Non-Newtonian fluid is a kind of fluid whose components of stress tensor are not the linear functions of components of strain rate tensor. Non-Newtonian fluid is being processed in many kinds of modern industry. Stability of flows for Non-Newtonian fluid is of important application. In this article we calculate subcritical threshold of flow which occurs in polymer-processing when the melting substance is driven through two parallel fixed boundaries.

Key words: non-Newtonian fluid, nonlinear stability, plane Poiseuille