应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

(Ω, A_{ab})场论中测地线的进动*

康谭珠迪

（香港理工学院应用数学系，1994年10月12日收到）

摘　要

本文的目的在于推算余桑提出的(Ω, A_{ab})场论[1]中测地线的进动．并将所得结果与Schwarzschild 轨道作了比较．

关键词　测地线进动　(Ω, A_{ab})场　Schwarzschild场

一、引　言

设一（细小）没有转矩的迴转仪以自旋$\boldsymbol{S}$沿测地线移动．$\boldsymbol{S}$是被平行地传送．平行传送与迴转传送仅沿测地线保持一致．已知在弯曲时空中，平行传送在向量方向上有巨大的影响，因此预计在迴转仪上会有类似的影响．Ohanian[2]，Murray[3]和Straumann[4]等从不同的途径详细讨论过在Schwarzschild 场中有关的自旋进动．在 Straumann 的推导架构下，我们将给出在余桑[1]中提出的(Ω, A_{ab})场中测地线的进动．

二、推　导

在这里我们用自旋表示迴转仪的内禀角动量．最初它是相对于一局部惯性系定义的，在系统中物体是静止的（即相对于它的局部静止架构）．在这一参考架构中，自旋用一个三维向量$\boldsymbol{S}$来描述．对于迴转仪，在没有外力作用时，根据等效原理，在局部静止架构中有

$$dS(t)/dt=0$$

也就是说，迴转仪的自旋保持常数．

现在定义一四维向量$\boldsymbol{S}$．在局部静止架构中，可简化为$(0,S)$．表达为协变形式为

$$(\boldsymbol{S},\boldsymbol{u})=0$$

其中，$\boldsymbol{u}$是四维速度．

我们从一球形对称静态引力场的度规着手，提出了在(Ω, A_{ab})场论中，在极坐标和自然基下有

$$ds^2=\exp[-2\Omega]dt^2-\exp[2\Omega][dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \tag{2.1}$$

与

* 余桑推荐．

$\Omega=m/r,\qquad m=$中心引力物体的质量

（为方便，我们取$c=1$和$G=1$.）

我们选择下列1-形式基：

$$\left.\begin{array}{l}\theta^0=\exp[-\Omega]dt,\ \theta^1=\exp[\Omega]dr\\ \theta^2=\exp[\Omega]rd\theta,\ \theta^3=\exp[\Omega]r\sin\theta d\phi\end{array}\right\}\tag{2.2}$$

度规（2.1）则变为

$$ds^2=g_{ab}\theta^a\otimes\theta^b,\ (g_{ab})=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

基(θ^a)是正交的．因此联络形式w^a_b满足

$$w_{ab}+w_{ba}=0,\ w_{ab}:=g_{ac}w^c_b\tag{2.3}$$

为此从第一结构方程

$$d\theta^a=-w^a_b\wedge\theta^b$$

计算外在导数（$\Omega'=d\Omega/dr$），

$$d\theta^0=-\Omega'\exp[-\Omega]dr\wedge dt$$
$$d\theta^1=0$$
$$d\theta^2=\exp[\Omega](\Omega'r+1)dr\wedge d\theta$$
$$d\theta^3=\exp[\Omega][\sin\theta(\Omega'r+1)dr\wedge d\phi+r\cos\theta\cdot d\theta\wedge d\phi]$$

我们用基 $\theta^a\wedge\theta^b$来表示上述方程的右边，得

$$d\theta^0=-\Omega'\exp[-\Omega]\theta^1\wedge\theta^0$$
$$d\theta^1=0$$
$$d\theta^2=\exp[-\Omega](\Omega'+r^{-1})\theta^1\wedge\theta^2$$
$$d\theta^3=\exp[-\Omega][(\Omega'+r^{-1})\theta^1\wedge\theta^3+r^{-1}\cot\theta\cdot\theta^2\wedge\theta^3]$$

将它们与第一结构方程进行比较，将得到下列联络形式的表达式，

$$\left.\begin{array}{l}w^0_1=w^1_0=-\Omega'\exp[-\Omega]\theta^0\\ w^0_2=w^2_0=w^0_3=w^3_0=0\\ w^2_1=-w^1_2=\exp[-\Omega](\Omega'+r^{-1})\theta^2\\ w^3_1=-w^1_3=\exp[-\Omega](\Omega'+r^{-1})\theta^3\\ w^3_2=-w^2_3=r^{-1}\exp[-\Omega]\cot\theta\cdot\theta^3\end{array}\right\}\tag{2.4}$$

这一题解（ansatz）的确满足（2.3）和第一结构方程．下面，我们相对于基（2.2）及其用e_a表示的对偶基进行计算．回维速度$\boldsymbol{u}$和自旋$\boldsymbol{S}$满足方程

$$(\boldsymbol{S},\boldsymbol{u})=0,\ \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}=0,\ \nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}=0$$

$\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S}$的分量由下式给出（参见Straumann[4]）

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{S})^a=\dot{S}^a+w^a_b(\boldsymbol{u})S^b=0$$

对于$\theta=\pi/2$（也就是r和θ不变）的圆周运动，显然有$u^1=u^2=0$．如果利用联络形式（2.4），我们又得到

$$\left.\begin{array}{l}\dot{S}^0=-w^0_a(\boldsymbol{u})S^a=\Omega'\exp[-\Omega]u^0S^1\\ \dot{S}^1=\exp[-\Omega][\Omega'u^0S^0+(\Omega'+r^{-1})u^3S^3]\\ \dot{S}^2=0\\ \dot{S}^3=-\exp[-\Omega](\Omega'+r^{-1})u^3S^1\end{array}\right\}\tag{2.5}$$

其中，上标黑点表示对标准时间的导数．

对于$\nabla_u \boldsymbol{u}=0$，我们得到替代(2.5)的第二式的方程式，

$$0=\exp[-\Omega][\Omega'(u^0)^2+(\Omega'+r^{-1})(u^3)^2]$$

即

$$(u^0/u^3)^2=-\frac{r\Omega'+1}{r\Omega'} \tag{2.6}$$

现在构造下列向量

$$\bar{e}_1=e_1,\ \bar{e}_2=e_2,\ \bar{e}_3=u^3e_0+u^0e_3$$

因此，

$$\boldsymbol{S}=\bar{S}^i\bar{e}_i=\bar{S}^1e_1+\bar{S}^2e_2+\bar{S}^3(u^3e_0+u^0e_3)$$

与$\boldsymbol{S}=S^a e_a$比较，显然有

$$S^0=u^3\bar{S}^3,\ S^1=\bar{S}^1,\ S^2=\bar{S}^2,\ S^3=u^0\bar{S}^3$$

定义三维向量$\bar{S}=(\bar{S}^1,\bar{S}^2,\bar{S}^3)$并去掉$\bar{S}^i$上的横线，利用(2.6)得到的新$S^i$，改写(2.5)为

$$\dot{S}^1=-\Omega'\exp[-\Omega](u^0/u^3)S^3$$

$$\dot{S}^2=0$$

$$\dot{S}^3=\Omega'\exp[-\Omega](u^0/u^3)S^1$$

用对坐标时间的导数代替上式中的$\dot{S}^i$。注意到(2.2)式得

$$u^0=\exp[-\Omega]\dot{t}$$

因此

$$dS^i/dt=\dot{S}^i/\dot{t}=\dot{S}^i\exp[-\Omega]/u^0$$

和

$$\left.\begin{aligned} dS^1/dt&=-\Omega'\exp[-2\Omega]S^3/u^3\\ dS^2/dt&=0\\ dS^3/dt&=\Omega'\exp[-2\Omega]S^1/u^3\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

由(2.2)，我们有$u^3=\exp[\Omega]r\dot{\phi}$，因此

$$w:=d\phi/dt=\dot{\phi}/\dot{t}=u^3\exp[-2\Omega]/u^0r$$

或，考虑(2.6)有

$$w^2=-\frac{\Omega'}{r(r\Omega'+1)}\exp[-4\Omega] \tag{2.8}$$

但是$\Omega=m/r$，这意味着

$$w^2=\frac{m}{r^3(1-m/r)}\exp[-4m/r]$$

对于$m/r\to 0$，

$$w^2=m/r^3$$

这表示(Ω, A_{ab})场论与Kelper 第三定律渐近一致.利用三维空间的向量表示法和

$$\left(\frac{dS^1}{dt},\ \frac{dS^2}{dt},\ \frac{dS^3}{dt}\right)=(W^2S^2-W^3S^2, W^3S^1-W^1S^3, W^1S^2-W^2S^1)$$

我们可以将(2.7)式改写为以下形式

$$dS/dt=W\wedge S;\qquad W=\text{角速度}$$

把上述式子与(2.7)式比较得

$$W=(0,\ -\Omega'\exp[-2\Omega]/u^3,\ 0)$$

并利用(2.6)及(2.8)，有

$$W^2=w^2(1-m/r)(1-2m/r)$$

则 $$W^2=e^2w^2$$

而 $$e^2=(1-m/r)\cdot(1-2m/r)\,;\quad W=(0,ew,0)$$

三、比　　较

在牛顿学说的界限中，$W=(0,w,0)$。我们可看出在三维空间中，在朝向中心和垂直于移动方向的方向上，S的进动倒退围绕一轴垂直于轨道平面，频率为$ew<w$。在一完全轨道之后，S投射到轨道平面上有一超前角度

$$2\pi(1-e)=:2\pi w_\Omega/w$$

进动频率$w_\Omega=w(1-e)$由下式给出

$$w_\Omega=\left[\frac{m}{r^3(1-m/r)}\exp[-4m/r]\right]^{1/2}[1-(1-m/r)^{1/2}(1-2m/r)^{1/2}] \tag{3.1}$$

根据Straumann[4]，对Schwarzschild轨道，我们得出测地线的进动w_s为：

$$w_s=(m/r^3)^{1/2}[1-(1-3m/r)^{1/2}]\approx\frac{3m^{3/2}}{2r^{5/2}}$$

其中忽略了包含$(m/r)^2$的项或高阶项。

采用$\exp[-2m/r]$的Taylor展开并使用类似的方法，(3.1)又可改写为

$$w_\Omega\approx\left(\frac{m}{r^3}\right)^{1/2}\left(1-\frac{m}{r}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{-2m}{r}\right]\left[1-\left(1-\frac{m}{2r}\right)\left(1-\frac{m}{r}\right)\right]\approx\frac{3m^{3/2}}{2r^{5/2}}$$

四、结　　论

由上述分析可看出，w_Ω的确可以分解为正好相同于Schwarzschild场所获得的形式。若以地球作为中心质量，可以利用容纳一个迴转仪系统的人造卫星来比较计算进动频率和实测数据。这大概早已在进行当中。然而我们必须时常谨慎关于我们所采用的近似值技术是否有效。

参 考 文 献

[1] X. Yu, Theory of gravitational radiation of the (Ω, A_{ab})-field, *Astrophysics and Space Science*, 202 (1993), 237—246.

[2] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Company, Inc. (1976).

[3] C. A. Murray, *Vectorial Astrometry*, Adam Hilger Ltd. (1983).

[4] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag (1986).

Geodesic Precession in the (Ω, A_{ab})-Field Theory

Hong Tam Judy

(Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong)

Abstract

This paper aims to determine the geodesic precession in Yu's (Ω, A_{ab})-field theory[1], and to compare the result with that of the Schwarzschild orbit.

Key words geodesic precession, (Ω, A_{ab})-field, Schwarzschild field