

带裂纹层合板能量释放率分析*

胡互让 吴承平

(美国西那库斯大学机械、航空、制造工程系) (重庆交通学院 630042)

(钱伟长推荐, 1994年8月14日收到)

摘 要

为了进一步了解裂纹尖端应力场的特性, 本文对复合材料层合板的界面裂纹作了分析. 文中强调了能量释放率分量存在的条件, 并给出能量释放率分量和应力强度因子间的关系式. 结合经典板理论的分析结果, 根据外荷作用及某些几何参数和材料参数, 导出了一般复合材料层合板的应力强度因子的封闭形式解. 为了得到在一般荷载条件下能量释放率的分量, 必须分别确定模型混合参数 Ω , 文中讨论了确定参数 Ω 的方法. 最后, 应用本文方法于几种不同种类的复合材料层合板, 证明其结果可应用于工程实践.

关键词 复合材料 层合板 裂纹尖端场 能量释放率 应力强度因子 界面裂纹

一、引 言

复合材料及某些其它材料(如木材和有向聚合物材料)的破坏状态由材料的各向异性和不均匀性的特性所决定(Suo等1991; O'Brien, 1987)^[1,2]. 大家知道, 通常的均质各向异性材料的裂纹尖端弹性应力场具有负二次方根奇异性(Hoenig, 1982)^[3]. 对非均质材料, 只要弹性模量是空间坐标下的连续可微函数, 这一负二次方根奇异性依然普遍存在(Eischen, 1987)^[4]. 在小范围屈服条件下, 具负二次方根奇异性的裂尖应力场, 由三个应力强度因子(SIF)或三个能量释放率分量唯一确定. 所有这些量都有适当的定义. 最大的困难和争议在于当裂纹尖端出现振荡奇异性时. 不同固体弹性材料之间的开裂, 就可能出现振荡奇异性(Williams, 1959)^[5]. 界面的开裂已有许多学者进行了研究, 例如Gao等(1992)^[6], Wu(1990, 1991)^[7,8], Suo(1990)^[9], Bassani和Qu(1989)^[10], Qu和Bassani(1989)^[11], Ting(1990, 1986)^[12,13], Wang(1983)^[14]以及Willis(1971)^[16]等等. 在传统的线弹性断裂力学中, 应力强度因子的定义是唯一的. 与此不同的是, 这里提出了界面间裂纹应力强度因子的几个定义. 在定义应力强度因子时, 用到了裂纹尖端附近界面间的粘合力. Hutchinson等(1987)^[16], England(1965)^[17]以及Rice和Sih(1965)^[18]对两种各向同性材料间的裂纹定义了一个复应力强度因子 $K = K_1 + iK_2$, 从而裂尖前端接合线的粘合力由下式给出(见图1).

* 1994年4月11日第一次收到.

$$(\sigma_{33} + i\sigma_{13})_{\theta=0} = Kr^{\varepsilon} / \sqrt{2\pi r} \quad (1.1)$$

其中 ε 为双材料常数, 称为振荡指数。尽管由于振荡, 在裂纹尖端附近存在某些相互渗透, Rice (1988)^[10] 争辩说复应力强度因子 K 仍可表征裂纹尖端应力场, 这是因为在一定条件下, 这一相互渗透的范围非常的小。Suo (1990)^[9] 将这类应力强度因子的定义推广到一般各向异性材料界面上。但是, 仍然存在一些重要的引起争议的问题。首先, K 显然没有物理意义, K_I 和 K_{II} 与 I 型和 II 型分量是不相同的; 其次, K 是与量纲有关的; 第三, 当各向异性双材料退化为非振荡的时, 这样定义的应力强度因子不能归并为传统的应力强度因子。

Wu (1990, 1991)^[7,8] 基于 Willis (1971)^[15] 和 Rice (1988)^[10] 的工作, 改进了界面裂纹尖端应力强度因子的表达式。沿裂纹尖端前端界面的粘合力 $\mathbf{t}^T = (\sigma_{xz} \ \sigma_{zz})$ 与应力强度因子 \mathbf{K} 的关系由下式给出

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \mathbf{R} \left[\left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^{\varepsilon} \right] \mathbf{K} \quad (1.2)$$

其中, $\mathbf{K}^T = (K_I \ K_{II})$ 为界面 I 型和 II 型应力强度因子矢量 (这里只考虑了面内分量); $\mathbf{R}[\]$ 为实的无量纲矩阵函数, 将在稍后给出; \hat{r} 为长度参数。黑体字母表示矢量或矩阵。正如 Gao 等 (1992)^[6] 所指出, 将已知材料偶的试件作用不同的荷载并在不同的几何条件下进行比较, 只要 \hat{r} 保持确定, 则 \hat{r} 是可以任意选取的。对于一般各向异性双材料偶, \mathbf{K} 取决于 \hat{r} 。一旦 \hat{r} 确定, 即可用 \mathbf{K} 表征界面裂纹尖端应力场。这一应力强度因子的定义与传统的应力强度因子的定义是一致的, 从而可避免前面提到的这个争议问题。在本文中, 我们也将使用这一应力强度因子的定义。

了解裂纹尖端应力场的结构对于理解应力强度因子和能量释放率的特征及其它它们之间的关系是有益的。Sih 等 (1965)^[20] 研究了具有弹性对称平面的均质各向异性体, 并得到应力强度因子和能量释放率分量间的关系。Hoenig (1982)^[3] 得到了最一般的各向异性材料的 J 积分和应力强度因子间的关系。对于两种不同的各向异性介质间的裂纹, Wu (1990, 1991)^[7,8], Gao 等 (1992)^[6] 和 Suo (1990)^[9] 改进了他们定义的应力强度因子和能量释放率间的关系。然而, 对一般不同的各向异性介质间的裂纹, 并不清楚其能量释放率分量是否存在, 如果它们确实存在, 则它们与对应的应力强度因子的关系又怎样。

就宏观力学而言, 已经提出了几种求解复合材料应力强度因子或能量释放率的模型。Williams (1988)^[21] 利用经典梁理论, 对于部分作用力和弯矩, 给出了能量释放率的简单表达式。Suo 和 Hutchinson (1990)^[22] 研究了在一般边缘荷载条件下, 两各向同性弹性材料的层间界面裂纹问题。在经典梁理论的基础上, 他们给出了与荷载无关的单一的实标量表示的应力强度因子的解析表达式, 这可以从一个特殊荷载组合的数值解导出。Suo 等 (1990)^[23], 1991^[11] 用同样的方法研究了均质正交各向异性材料的脱层问题。Schapery 和 Davidson (1990)^[24] 提出了用“裂纹尖端单元”研究裂纹扩展, 在经典板理论 (CPT) 的基础上, 象 Suo 和 Hutchinson (1990)^[22] 研究应力强度因子一样, 给出了能量释放率分量的表达式。他们选择裂纹尖端的特征荷载作为荷载参数, 而不是选用作用在物体边缘上的两个外荷载参数。Davidson 等 (1994)^[25] 进一步推广了这一裂纹尖端单元的概念, 分析了具

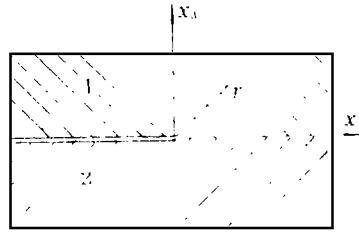


图1 界面裂纹和坐标系

有非振荡或振荡奇异性的层合弹性板。

本文的首要目标是澄清在两个相当一般的各向异性介质间裂纹的能量释放率分量的存在性。然后讨论能量释放率分量和应力强度因子的关系。利用经典板理论求得能量释放率分量的表达式。得到包含一个未知模型混合参数 Ω 的能量释放率分量的封闭形式解。还讨论了确定参数 Ω 的步骤。最后,给出几个实例。本文所得结果可应用于工程实践。

二、界面裂纹分析

2.1 应力强度因子和能量释放率

已经发现,两个最一般的各向异性弹性固体间的裂纹尖端附近应力场,可能呈现一个二维振荡奇异性 $r^{-1/2+i\epsilon}$ 和一个一维奇异性 $r^{-1/2}$,并且这两种类型的奇异性可能包含面内的和反平面的变形(Suo, 1990)^[9]。现在我们考虑两个不同的弹性固体,它们带有如图1所示的裂纹。设材料具有正交于 x_2 轴的轴对称平面。作这一假设,是为了使分析更为简便,另一方面,它仍可包括多种具有实用意义的问题。已知对于双材料系统位移 u_2 与 u_1, u_3 是不耦合的。任何二维问题都可以化为一个面内变形问题和一个反平面的变形问题。其反平面变形问题很容易分析并可求解(例如 Suo(1990)^[9])。其面内变形问题将在本文中讨论。

一般线弹性各向异性材料的本构关系由 Hooke 定律给出为:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.1)$$

其中

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = (\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{23} \ 2\epsilon_{31} \ 2\epsilon_{12})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})$$

\mathbf{S} 是 6×6 常规的对称柔度矩阵。以 x_1x_3 平面为对称平面的材料,其独立弹性常数的个数将减为少13,其柔度矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & s_{15} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & s_{25} & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & s_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & 0 & s_{66} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

带裂纹的双材料偶的能量释放率可表示为(Wu, 1990)^[7]:

$$G = \frac{1}{4} \mathbf{K}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{K} \quad (2.3)$$

其中 \mathbf{D}^{-1} 为位错能量因子矩阵 \mathbf{D} 的逆, \mathbf{D} 由下式给出。

$$(\mathbf{B}_1 + \bar{\mathbf{B}}_2)^{-1} = \mathbf{D} - i\mathbf{W} \quad (2.4)$$

其中下角标1和2分别表示材料1和材料2的矩阵。 \mathbf{D} 和 \mathbf{W} 为实矩阵。 $\bar{\mathbf{B}}_2$ 表示 \mathbf{B}_2 的复共轭矩阵。

\mathbf{B} (无论 \mathbf{B}_1 或 \mathbf{B}_2)为正定 Hermite 矩阵,由下式给出:

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{cc} b_{11} \text{Im}(\mu_1 + \mu_2) & -i(b_{11}\mu_1\mu_2 - b_{13}) \\ i(b_{11}\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 - b_{13}) & -b_{33} \text{Im}(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}) \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

这里, μ_1, μ_2 为代数方程

$$b_{11}\mu^4 - 2b_{15}\mu^3 + (2b_{13} + b_{35})\mu^2 - 2b_{35}\mu + b_{35} = 0 \quad (2.6)$$

的两个不同的具有正虚部的根, 并且

$$h_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & \text{平面应力} \\ s_{ij} - s_{i2}s_{j2}/s_{22} & \text{平面应变} \end{cases} \quad (i, j=1, 3, 5) \quad (2.7)$$

本文中, 平面应力或平面应变除非特别指明, 都是相对于 x_2 (或 y) 轴的. 将(2.5)式代入(2.4)式, 得到矩阵 \mathbf{D} 和 \mathbf{W}

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_3 & -d_2 \\ d_1 d_3 - d_2^2 - w^2 & -d_2 \\ -d_2 & d_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_1 d_3 - d_2^2 - w^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= [b_{11}\text{Im}(\mu_1 + \mu_2)]_1 + [b_{11}\text{Im}(\mu_1 + \mu_2)]_2 \\ d_2 &= [b_{11}\text{Im}(\mu_1\mu_2)]_1 + [b_{11}\text{Im}(\mu_1\mu_2)]_2 \\ d_3 &= [-b_{33}\text{Im}(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})]_1 + [-b_{33}\text{Im}(\mu_1^{-1} + \mu_2^{-1})]_2 \\ w &= [b_{11}\text{Re}(\mu_1\mu_2) - b_{13}]_2 - [b_{11}\text{Re}(\mu_1\mu_2) - b_{13}]_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$\text{Re}(\quad)$ 和 $\text{Im}(\quad)$ 分别表示复变量的实部和虚部. 我们引进一个各向异性双材料偶的广义 Dundurs 参数 β (Dundurs, 1969)^[26]:

$$\beta = w / \sqrt{d_1 d_3 - d_2^2} \quad (2.10)$$

由于矩阵 \mathbf{D} 是可逆的, $d_1 d_3 - d_2^2 \neq 0$. β 为一实的无量纲量. 对各向同性双材料偶, 可求得 $|\beta| < 0.5$. \mathbf{R} 可由下式求得

$$\mathbf{R} \left[\begin{pmatrix} r \\ \hat{r} \end{pmatrix}^{ie} \right] = \text{Re} \left(\begin{pmatrix} r \\ \hat{r} \end{pmatrix}^{ie} \right) \mathbf{I} + \text{Im} \left(\begin{pmatrix} r \\ \hat{r} \end{pmatrix}^{ie} \right) \frac{\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1}}{\beta} \quad (2.11)$$

其中 \mathbf{I} 为单位矩阵. 将(2.11)式反代入(1.2)式, 沿裂尖前端界面的粘合力 \mathbf{t} 就完全由应力强度因子 \mathbf{K} 确定.

能量释放率(2.3)式又变为

$$G = \frac{1-\beta^2}{4} (d_3 K_{\mathbf{I}}^2 + 2d_2 K_{\mathbf{I}} K_{\mathbf{II}} + d_1 K_{\mathbf{II}}^2) \quad (2.12)$$

这就是二维各向异性双材料偶由应力强度因子表示的能量释放率的一般表达式. 注意, G 独立于(1.2)式中的长度参数 \hat{r} . 振荡指数 ε 与 β 有关:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (2.13)$$

显然, $\varepsilon=0$ 的必要和充分条件是 $\beta=0$ 或 $w=0$.

2.2 能量释放率分量及其与应力强度因子的关系

方程(2.12)为总的能量释放率表达式, 如果可能的话, 我们希望求得能量释放率的分量. 与有争议的应力强度因子的定义相比, 能量释放率分量很好定义. $G_{\mathbf{I}}$ 和 $G_{\mathbf{II}}$ 定义如下:

$$\left. \begin{aligned} G_{\mathbf{I}} &= \frac{1}{2\Delta} \int_0^\Delta \sigma_{zz}(\Delta-r) \Delta u_z(r) dr \\ G_{\mathbf{II}} &= \frac{1}{2\Delta} \int_0^\Delta \sigma_{zz}(\Delta-r) \Delta u_z(r) dr \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中 Δ 为裂纹扩展增量. 积分沿裂纹线进行. 裂纹面相对位移 $\Delta \mathbf{u}^T = (\Delta u_x, \Delta u_y)$ 为

$$\Delta u = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cosh(\pi\varepsilon) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R} \left[\frac{1}{1+2i\pi} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{i\pi} \right] \mathbf{K} \quad (2.15)$$

其中函数 $\mathbf{R}[\]$ 见(2.11)式。将(1.2)式和(2.15)式代入(2.14)式, 可得(参见附录)

$$\left. \begin{aligned} G_{\text{I}} &= \frac{1}{\cosh(\pi\varepsilon) \sqrt{1+4\varepsilon^2}} (d_3 I_1 K_{\text{I}}^2 + I_2 K_{\text{I}} K_{\text{I}} + d_1 I_3 K_{\text{I}}^2) \\ G_{\text{II}} &= \frac{1}{\cosh(\pi\varepsilon) \sqrt{1+4\varepsilon^2}} (d_3 I_4 K_{\text{I}}^2 + I_5 K_{\text{I}} K_{\text{I}} + d_1 I_6 K_{\text{I}}^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中积分 I_1 到 I_6 在附录中给出。将上式中的 G_{I} 和 G_{II} 相加并与(2.12)式比较, 可导出如下的重要数学结果:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \left(\cos\left(\varepsilon \ln \frac{1-t}{t}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln \frac{1-t}{t}\right) \right) dt = \frac{\pi(1+4\varepsilon^2)}{2\cosh(\pi\varepsilon)} \quad (2.17)$$

一般说来, 这些 I 的值取决于长度参数 \hat{r} 和 Δ 。当 Δ 逼近裂纹尖端时, I_1 到 I_6 的值将发生振荡。因而, 当 Δ 继续趋近于 0 时, G_{I} 和 G_{II} 也将产生振荡。从物理上说, ε 正是两种相互粘附材料的不同弹性特性的度量。当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 在两种材料间存在一个界面。在裂纹尖端应力场, 存在着每一种材料对另一种材料的作用。因此, 为了使 G_{I} 和 G_{II} 存在, 振荡指数就必须消失。这就是能量释放率分量存在的必要充分条件。

取 $\varepsilon = 0$, 可求得 $I_1 = I_6 = 1/4$, $I_2 = I_5 = d_2/4$, $I_3 = I_4 = 0$, 且(2.16)式简化为:

$$G_{\text{I}} = \frac{1}{4} K_{\text{I}} (d_3 K_{\text{I}} + d_2 K_{\text{I}}), \quad G_{\text{II}} = \frac{1}{4} K_{\text{I}} (d_1 K_{\text{I}} + d_2 K_{\text{I}}) \quad (2.18)$$

两种材料相同时, 上式变成了 Sih 等(1965)^[20]给出的均质材料问题的方程。当整个材料同质, 或异质但其弹性模量是空间坐标的连续可微函数, 或是材料性质满足 $w=0$ 的双材料偶, 都可能出现 $\varepsilon=0$ 。 $\varepsilon=0$ 意味着两种类型面内裂纹的裂纹尖端应力场是解耦的。从(2.18)式看到, K_{I} 和 K_{II} 的交叉乘积项仍然出现在 G_{I} 和 G_{II} 的表达式中。这是由于各向异性特性所致。各向异性将导致变形的交互影响。 G_{I} 与 K_{II} 耦合, G_{II} 和 K_{I} 耦合正是这一各向异性的结果。参数 d_2 为 $\varepsilon=0$ 时各向异性强度的度量。

$d_2=0$ 时, 方程(2.18)将进一步简化为

$$G_{\text{I}} = \frac{1}{4} d_3 K_{\text{I}}^2, \quad G_{\text{II}} = \frac{1}{4} d_1 K_{\text{I}}^2 \quad (2.19)$$

导出上式的必要充分条件是 $\varepsilon=0$ 且 $d_2=0$ 。这第一个条件前面已经讨论了, 至于第二个条件, 一则需要考察 4 次代数方程(2.6)的根, 二则要看(2.9)式中 d_2 是否消失。然而, 若两材料是正交各向异性的且其材料主轴与坐标轴重合, 或者材料是各向同性的, 则 d_2 总是为零的。

三、经典板理论时的能量释放率

本问题的物理模型示于图 2。整体笛卡尔坐标系选择以中平面为 xy (或 x_1x_2) 面。裂纹长度为 a , 未裂部分长度为 b 。设 a, b 都远大于整个板厚。面内力 N, N_1, N_2 和弯矩 M, M_1, M_2 定义为每单位宽度上的值, 且相对于 y 轴 (或 x_2 轴) 而言的。这一模型既可以是平面应力的也可以是平面应变的。这一模型可代表多种物理问题: 当材料 1 和材料 2 具有不同特性时, 该模型就是界面裂纹问题; 当 $t_1 \ll t_2$ 时, 又成了薄膜问题; 如果裂纹平面以上部分 1 和另一部分 2 组成一般叠层板, 则又成为一般复合材料层合板的脱层问题模型。

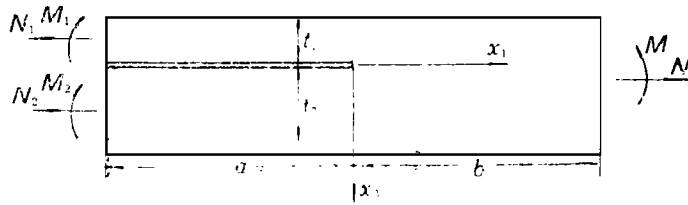


图2 模型的几何条件和荷载情况

利用 Irwin 经典板理论的虚拟裂纹闭合技术 (VCCT), 一般线弹性材料带裂纹层合板的能量释放率由下式给出 (Schapery 和 Davidson, 1990)^[24]:

$$G = \frac{1}{2} (c_1 N_c^2 + c_2 M_c^2 + 2c_{12} N_c M_c) \quad (3.1)$$

其中, N_c 和 M_c 为裂纹尖端处面内力和弯矩的特征荷载, 它们可用外荷载表示为

$$\left. \begin{aligned} N_c &= -N_1 + a_{11}N + a_{12}M \\ M_c &= -N_1 t_1/2 + (a_{11}t_1/2 - a_{21})N + M_1 + (a_{12}t_1/2 - a_{22})M \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

c_1 , c_2 和 c_{12} 为板的特征参数,

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= A_1' + A_2' + B_1' t_1 - B_2' t_2 + D_1' t_1^2/4 + D_2' t_2^2/4 \\ c_2 &= D_1' + D_2', \quad c_{12} = D_1' t_2/2 - D_2' t_1/2 - B_1' - B_2' \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

这里 t_1 和 t_2 分别为子层1和子层2的板厚, a_{ij} 由下式给出:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= A_1 A' + (B_1 - A_1(t_2/2))B', \quad a_{12} = A_1 B' + (B_1 - A_1(t_2/2))D' \\ a_{21} &= B_1 A' + (D_1 - B_1(t_2/2))B', \quad a_{22} = B_1 B' + (D_1 - B_1(t_2/2))D' \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中, A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , D_1 , D_2 分别为子层1和子层2传统的附加刚度、耦合刚度和弯曲刚度, A' , B' 和 D' 为整个层合板相应的柔度 (Jones, 1975)^[27].

四、能量释放率分量的解

4.1 应力强度因子的一般方程

首先, 考虑一个一般的层合板. 层据经典板理论, 板的应力 σ_{33} , σ_{13} , σ_{23} 与 σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} 相比很小. 因此, 可设为关于 x_3 轴的近似平面应力状态. 为了适合界面裂纹分析, 设紧挨裂纹平面的上、下面材料具有如(2.2)式类似的柔度矩阵. 因此本构关系可化为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

这说明, 层合板的两种材料必须是正交各向异性的, 他们的主轴彼此可能并不共线, 但却必须和参考坐标轴共线. 对整个层合板而言, 这一条件仅限于与裂纹平面直接接触的两层, 而其余各层可以有不同的取向.

能量释放率(3.1)可改写为

$$G = \frac{1}{2} |i\sqrt{c_1} N_c + \exp[i\Gamma]\sqrt{c_2} M_c|^2 \quad (4.2)$$

$$\text{其中} \quad \sin\Gamma = c_{12}/\sqrt{c_1 c_2} \quad (4.3)$$

另一方面, 能量释放率表达式(2.12)在 $d_2=0$ 时, 也可重写为

$$G = \frac{1-\beta^2}{4} |i\sqrt{d_1}K_I + \sqrt{d_3}K_{II}|^2 \quad (4.4)$$

令(4.2)和(4.4)相等, 就得到两个大小相等的复变量。这两个复变量可能仅是相角不同而已。用 ε 代替 β , 得

$$\frac{\sqrt{2}}{\cosh(\pi\varepsilon)} (i\sqrt{c_1}N_c + \exp[i\Gamma]\sqrt{c_2}M_c) \left(\frac{r}{h}\right)^{\varepsilon} \varepsilon^{i\Omega} = i\sqrt{d_1}K_I + \sqrt{d_3}K_{II} \quad (4.5)$$

其中 h 为长度参数, 引入这一参数是为了使 r/h 项无量纲化。它可以是几何特征尺寸, 例如裂纹长度。 Ω 是无量纲量, 作为模型混合参数, 它与荷载无关, 是层合板的特征参数。从而应力强度因子可表示为:

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sqrt{\frac{2}{d_3}} \cosh(\pi\varepsilon) \left[-\sqrt{c_1}N_c \sin\left(\Omega + \varepsilon \ln \frac{r}{h}\right) + \sqrt{c_2}M_c \cos\left(\Omega + \Gamma + \varepsilon \ln \frac{r}{h}\right) \right] \\ K_{II} &= \sqrt{\frac{2}{d_1}} \cosh(\pi\varepsilon) \left[\sqrt{c_1}N_c \cos\left(\Omega + \varepsilon \ln \frac{r}{h}\right) + \sqrt{c_2}M_c \sin\left(\Omega + \Gamma + \varepsilon \ln \frac{r}{h}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

上式是应力强度因子的一般方程。由(4.5)式可知, 加权的 K 值的大小并不取决于 r , 而其相角取决于 r 。 r 确定时, K 可表征裂纹尖端应力场的强度。根据本构关系(4.1)式, (4.6)式仅对紧接裂纹平面上下的材料是正交各向异性或各向同性的层合板是有效的。最一般的层合板, 也可求得类似的表达式。

由(2.15)式, 可求得裂纹面相对位移和应力强度因子之间的关系:

$$\sqrt{\frac{d_1}{d_3}} \Delta u_z + \Delta u_z = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{2d_1}{(1+2i\varepsilon)\cosh(\pi\varepsilon)} \left(\sqrt{\frac{d_3}{d_1}}K_I + iK_{II}\right) \left(\frac{r}{h}\right)^{\varepsilon} \quad (4.7)$$

这一结果与 Suo (1990)^[9] 利用不同方法导得的相应解一致。唯一的不同点是应力强度因子的定义不同。将(4.5)式代入(2.15)式, 根据外荷载和模型混合参数 Ω , 得到裂纹表面相对位移为

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{d_1}{d_3}} \Delta u_z + i\Delta u_z &= \sqrt{\frac{rd_1}{\pi}} \frac{2}{\cosh^2(\pi\varepsilon)\sqrt{1+4\varepsilon^2}} (i\sqrt{c_1}N_c + \exp[i\Gamma]\sqrt{c_2}M_c) \\ &\quad \cdot \exp[i(\Omega - \tan^{-1}(2\varepsilon) + \varepsilon \ln(r/h))] \end{aligned} \quad (4.8)$$

这一方程对于由 Δu_z (或 Δu_z) 确定 Ω 是有用的。

4.2 振荡指数消失的条件

振荡指数的值通常很小, 对各向同性材料界面, 其值为 $-0.175 < \varepsilon < 0.175$ 。事实上, 对于实际的金属和非金属的不同材料界面组合, ε 的值相当小 (Rice, 1988)^[19]。一般复合材料界面也同样如此 (Gao 等, 1992)^[6]。因此, He 和 Hutchinson(1989, 1990)^[28, 29] 建议, 在工程应用中, 可忽略各向同性材料界面的振荡效应。只要在这些情况下, 振荡影响与外荷载和几何条件的影响相比是非常小的。Davidson (1993)^[30] 建议了一个“ $\beta=0$ 法”来消除一般复合材料中的振荡影响, 并应用此法于石墨—环氧层合板的边缘脱层分析。Ruju 等(1988)^[31] 在边缘脱层分析中引入了一个薄粘夹层的概念。Davidson 和 Hu(1993)^[32] 研究了这一夹层模式, 并发现对某一模式比的已知界面裂纹问题, 总存在两种荷载组合。在夹层的模量的某一范围内, 模式比对各向同性材料粘合夹层的模量非常敏感, 而总能量释放

率无此现象。在某种荷载作用下，模式比总是随夹层模量的增加而增加，而在另一种荷载下，又是减小的。用 $\beta=0$ 法预测的模式比，即使不重合，也总是在夹层模型两种不同荷载组合预计的两条曲线的交点附近。因此对于消除振荡影响， $\beta=0$ 法似乎较夹层模型更好。

对两种正交各向异性材料界面裂纹问题，振荡指数为零的条件，可用工程常数表示为

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{1}{E_{11}} \left(\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} - \nu_{13} \right) \right]_1 = \left[\frac{1}{E_{11}} \left(\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} - \nu_{13} \right) \right]_2 \quad \text{平面应力} \\ & \left\{ \frac{1}{E_{11}} \left[\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_{22}}{E_{11}} \right) \left(1 - \nu_{23}^2 \frac{E_{33}}{E_{22}} \right) - (\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{23}) \right] \right\}_1 \\ & = \left\{ \frac{1}{E_{11}} \left[\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{33}}} \left(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_{22}}{E_{11}} \right) \left(1 - \nu_{23}^2 \frac{E_{33}}{E_{22}} \right) - (\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{23}) \right] \right\}_2 \quad \text{平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

对各向同性材料，可写为

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{1-\nu}{E} \right]_1 = \left[\frac{1-\nu}{E} \right]_2 \quad \text{平面应力} \\ & \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \right]_1 = \left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \right]_2 \quad \text{平面应变} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

4.3 能量释放率分量方程

在消除振荡后，裂纹尖端应力场去耦为经典形式，能量释放率分量也可得到了。将(4.6)式回代入(2.19)式得

$$\left. \begin{aligned} G_I &= \frac{1}{2} \left[-\sqrt{c_1} N_c \sin \Omega + \sqrt{c_2} M_c \cos(\Omega + \Gamma) \right]^2 \\ G_{II} &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{c_1} N_c \cos \Omega + \sqrt{c_2} M_c \sin(\Omega + \Gamma) \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

这就是带裂纹层合板能量释放率分量的封闭形式解。由此可见，一旦 Ω 已知，在如图2所示的任何荷载组合下的能量释放率分量就可以解析确定了。现在讨论一些特殊情况。对正交各向异性双材料偶， d_1 和 d_3 可化为

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= 2[b_{11}]_1 \left[(n\lambda^{-1/4})_1 + \Sigma(n\lambda^{-1/4})_2 \right] \\ d_3 &= 2[b_{11}]_1 \left[(n\lambda^{-3/4})_1 + \Sigma(n\lambda^{-3/4})_2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

其中下角标1和2分别代表材料1和2。 $\Sigma = [b_{11}]_2/[b_{11}]_1$ 为两种材料的折合刚度比。 n, ρ 和 λ 为无量纲材料参数，定义如下

$$n = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}, \quad \rho = \frac{2b_{13}+b_{55}}{2\sqrt{b_{11}b_{33}}}, \quad \lambda = \frac{b_{11}}{b_{33}} \quad (4.13)$$

c_1, c_2, c_{12} 为

$$c_1 = \frac{4[b_{11}]_1}{t_1} (1 + \Sigma\eta), \quad c_2 = \frac{12[b_{11}]_1}{t_1^3} (1 + \Sigma\eta^3), \quad c_{12} = -\frac{6[b_{11}]_1}{t_1^2} (1 - \Sigma\eta^2) \quad (4.14)$$

其中 $\eta = t_1/t_2$ 为厚度比。将(4.12)和(4.14)代入(4.5)，并注意到 $\varepsilon=0$ ，则

$$\begin{aligned} & 2 \exp[i\Omega] \left(\sqrt{\frac{1+\Sigma\eta}{t_1}} N_c - i \exp[i\Gamma] \sqrt{\frac{3(1+\Sigma\eta^3)}{t_1^3}} M_c \right) \\ & = iK_I [(n\lambda^{-1/4})_1 + \Sigma(n\lambda^{-1/4})_2]^{1/2} + K_{II} [(n\lambda^{-3/4})_1 + \Sigma(n\lambda^{-3/4})_2]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

根据量纲分析, Ω 可能是无量纲量 η , Σ , ρ_1 , ρ_2 , λ_1 和 λ_2 的函数. 如前所述, 当振荡指数消失时, 每种材料的裂纹尖端应力场与另一种材料的性质无关. 也就是说, 每种材料的裂纹尖端应力场等同于相应均质正交各向异性材料的裂纹性质. 均质正交各向异性材料的 $\lambda^{-1/8}K_I$ 和 $\lambda^{-3/8}K_{II}$ 与 λ 无关 (Suo, 1990)^[23]. 因此, Ω 仅是 η , Σ , ρ_1 和 ρ_2 的函数. 其应力强度因子可由 (4.15) 式确定, 其对应的能量释放率分量由 (2.19) 式给出为

$$\left. \begin{aligned} G_I &= 2[b_{11}]_1 \left(-\sqrt{\frac{1+\Sigma\eta}{t_1}} N_c \sin\Omega + \sqrt{\frac{3(1+\Sigma\eta^3)}{t_1^3}} M_c \cos(\Omega+\Gamma) \right)^2 \\ G_{II} &= 2[b_{11}]_1 \left(\sqrt{\frac{1+\Sigma\eta}{t_1}} N_c \cos\Omega + \sqrt{\frac{3(1+\Sigma\eta^3)}{t_1^3}} M_c \sin(\Omega+\Gamma) \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

其中, $b_{11}=1/E_{11}$ (平面应力), $b_{11}=(1-\nu_{12}^2 E_{22}/E_{11})/E_{11}$ (平面应变).

当两种材料相同时, $\Sigma=1$, Ω 则为 η 和 ρ 的函数. 对各向同性双材料偶, 由于 $\rho_1=\rho_2=1$, 则 Ω 仅是 η 和 Σ 的函数. 若整个材料都是均质各向同性的, 则 Ω 又仅是 η 的函数.

4.4 确定模型混合参数的方法

在上一小节, 我们得到了用 N_c 和 M_c 表示的能量释放率分量的某些封闭形式解. 在这些表达式中, 模型混合参数 Ω 是未知的. 一旦 Ω 已知, 就可利用此封闭形式解求得在任意荷载组合下的能量释放率分量. 经典板理论本身并未提供确定 Ω 的充分依据, 只能通过数值分析或实验确定 Ω .

已有一些确定模型混合参数的不同方法, 如 Suo 和 Hutchinson (1990)^{[22][23]} 利用积分方程法确定了这一参数 (在他们的工作中, 是用稍有不同的参数 ω 来替代 Ω). Schapery 和 Davison (1990)^[24], Davison 等 (1994)^[25] 利用有限元法确定了这一参数, 并指出有限元解足够精确而且很容易求解.

本文也利用有限元法求解. 确定 Ω 的步骤如下: 首先对一给定层合板选择荷载组合, 使 $M_c=0$, $N_c \neq 0$. 然后在这一具体荷载下进行有限元计算. 最后利用虚拟裂纹封闭技术 (VCCT) 求得 G_I , 而 Ω 由下式确定

$$\sin \Omega = \pm \sqrt{2G_I} / \sqrt{c_1} N_c \quad (4.17)$$

Ω 的符号可根据其物理意义确定. Ω 的符号与 Γ 的符号有关. 迄今为止各种研究结果中得出的 Ω 都在 -90° 和 90° 之间, 并且当 $\Gamma < 0$ (或 $c_{12} < 0$) 时, $\Omega > 0$; 当 $\Gamma > 0$ (或 $c_{12} > 0$) 时, $\Omega < 0$.

五、数值结果

本文研究了几种层合板. 对一些简单的层合板, 如均质各向同性板, Ω 可表达为某些几何参数和材料参数的函数. 已知 Ω 后, 就可预测在一般荷载条件下具有相同 Ω 值的同类层合板的能量释放率分量. 对于更一般的层合板, 由于问题的复杂性, 则很难求得能够预测另一层合板能量释放率分量的 Ω 值. 因此, 对每一层合板都必须求其 Ω 值, 并用其预测这种层合板在一般荷载组合下的能量释放率分量. 本文下面给出的某些结果也同其他研究论文中的结果进行了比较.

5.1 均质各向同性板

考虑一个由均质各向同性材料组成的裂纹板。在此 $\Omega = \Omega(\eta)$ 。 Ω 的数值结果列于表1。可以看出， Ω 是以 $\log \eta$ 反对称的。这就是说，如当 $\eta = t_1/t_2$ 时的 Ω 已知，则 $\eta = t_2/t_1$ 的 Ω 值就等于 $-\Omega$ 。

表 1 均质各向同性材料的 $\Omega(\eta)$ 值

$1/\eta$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0	20.0	40.0
$\Omega(^{\circ})$	0.00	7.02	10.60	12.74	14.23	15.31	16.76	17.68	19.71	20.82

$0.025 \leq \eta \leq 40$ 的有限元结果刚好满足下列5次代数方程 (Davidson 等, 1994)^[25],

$$\Omega = -23.529 \log \eta + 6.8406 (\log \eta)^2 - 1.0706 (\log \eta)^5 \quad (5.1)$$

5.2 各向同性双材料偶

各向同性双材料偶的 Ω 为 η 和 Σ 的函数。我们引进与 Σ 有关的 Dundurs 参数 α ,

$$\alpha = (\Sigma - 1) / (\Sigma + 1) \quad (5.2)$$

则 $\Omega = \Omega(\eta, \alpha)$ 。图3示出了本文结果与 Suo 和 Hutchinson (1990)^[22]结果的比较。由图中可看出， $\eta = 1$ 时，Suo 和 Hutchinson 的结果和有限元解非常接近。 η 增大(或减小)，其误差都会增大。

5.3 均质正交异性板

材料主轴与参考坐标轴共线的均质正交异性板的 $\Omega = \Omega(\eta, \rho)$ 。计算结果示于图4。由图中可看出， Ω 随 η 和 ρ 的增大而增大。 Ω 对于 η 比 ρ 更敏感。对较大的 η ， Ω 对 ρ 很不敏感。作为较好的近似，可设 $\Omega = \Omega(\eta)$ 。

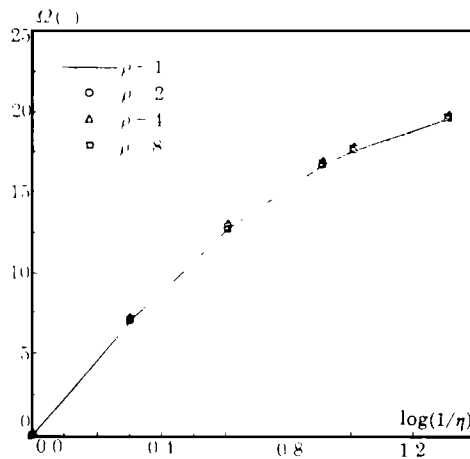
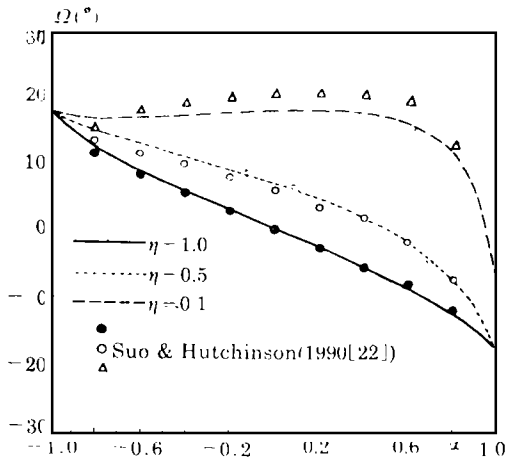


图3 各向同性双材料偶的模型混合参数

图4 均质正交各向异性材料的模型混合参数

5.4 两种各向同性材料叠合的层合板

本文考虑三种层合板。其中一种是各向同性材料，其它两种为石墨/环氧材料。首先求出每一种的 Ω 。然后利用它预测出不同荷载下的能量释放率分量，并将所得结果与对应的有限

元结果进行比较。

考虑一在中平面有一边缘脱层的 $[1/2/2/1/\text{裂纹}/2/1/1/2]$ 层合板。两种材料的弹性模数为 $E_1=6895\text{Pa}$, $\nu_1=0.3$, $E_2=13259\text{Pa}$, $\nu_2=0$ 。每一层的厚度为 $2.54 \times 10^{-4}\text{m}$ 。求得 Ω 为 6.13° 。其结果在表2中给出。

表 2 $[1/2/2/1/\text{裂纹}/2/1/1/2]$ 层合板经典板理论 (CPT)结果与有限元分析(FEA)结果的比较

$N_c(\text{N/m})$	$M_c(\text{Nm/m})$	$G(\text{CPT})(\text{J/m}^2)$	$G(\text{FEA})(\text{J/m}^2)$	$G_1/G(\text{CPT})$	$G_1/G(\text{FEA})$
-214.5342	0.0013	18033.1	18026.1	0.014	0.014
-459.7162	0.1050	106612.1	106521.1	0.191	0.191
-218.9125	0.1108	38542.6	38481.3	0.458	0.458
-142.2931	0.2798	107125.3	106974.7	0.887	0.888
-8.7565	0.1770	36327.2	36232.6	0.990	0.991

5.5 石墨/环氧层合板1

两种石墨/环氧层合板的材料性质分别列于表3和表4。通过调整裂纹平面上(或下)层的 ν_{23} 值,它对材料断裂问题影响很小,使 $\varepsilon=0$ 的条件得到保证。第一种层合板为 $[0_8/90_4]_s$,在其较上面的0/90界面有一脱层。求得 $\Omega=10.57^\circ$ 。裂纹尖端单元结果与有限元计算的结果的比较列于表5。

表 3 $[0_8/90_4]_s$ 石墨/环氧层合板的单向材料性质

$E_{xx}=137.9\text{ GPa}$	$\nu_{xy}=0.25$	$G_{xy}=5.90\text{ GPa}$
$E_{yy}=14.5\text{ GPa}$	$\nu_{xz}=0.25$	$G_{xz}=5.80\text{ GPa}$
$E_{zz}=14.5\text{ GPa}$	$\nu_{yz}=0.25$	$G_{yz}=5.80\text{ GPa}$
单层厚度: $140.0 \times 10^{-6}\text{m}$		

表 4 $[0/\pm 35/90]_s$ 石墨/环氧层合板的单向材料性质

$E_{xx}=134.4\text{ GPa}$	$\nu_{xy}=0.30$	$G_{xy}=5.52\text{ GPa}$
$E_{yy}=10.2\text{ GPa}$	$\nu_{xz}=0.30$	$G_{xz}=5.52\text{ GPa}$
$E_{zz}=10.2\text{ GPa}$	$\nu_{yz}=0.49$	$G_{yz}=3.43\text{ GPa}$
单层厚度: $137.2 \times 10^{-6}\text{m}$		

表 5 $[0_8/90_4]_s$ 层合板经典板理论(CPT)结果与有限元分析(FEA)结果的比较

$N_c(\text{N/m})$	$M_c(\text{Nm/m})$	$G(\text{CPT})(\text{J/m}^2)$	$G(\text{FEA})(\text{J/m}^2)$	$G_1/G(\text{CPT})$	$G_1/G(\text{FEA})$
-92.2357	0.0586	3849.7	3850.6	0.250	0.250
-22.0121	0.0924	3313.6	3309.6	0.500	0.499
47.9137	0.1380	4100.8	4089.3	0.750	0.750

5.6 石墨/环氧层合板2

第二种石墨/环氧层合板的叠合顺序为 $[0/\pm 35/90]_s$ 。边缘脱层在较上的 $-35/90$ 界面上。裂纹平面上的 $+35^\circ$ 层和 -35° 层结合为一层,以使其主轴与坐标轴重合。求得的 $\Omega=10.73^\circ$ 。其结果列于表6。

表 6 [0/±35/90] 层合板经典板理论(CPT)结果与有限元分析(FEA)结果的比较

$N_c(N/m)$	$M_c(Nm/m)$	$G(CPT)(J/m^2)$	$G(FEA)(J/m^2)$	$G_1/G(CPT)$	$G_1/G(FEA)$
-83.8365	0.0119	4056.5	4055.3	0.250	0.250
-31.4892	0.0157	2406.5	2402.4	0.500	0.500
4.0777	0.0231	2873.0	2864.1	0.750	0.750

六、结 论

本文分析界面裂纹问题, 讨论了能量释放率分量的存在条件, 并给出了能量释放率分量与应力强度因子间的关系式. 根据材料的弹性常数给出了能量释放率的显式表达式. 结合经典板理论的分析结果, 给出了几种不同层合板能量释放率的封闭形式解. 在这些公式中有一个称谓模型混合参数的未知参数 Ω . 文中讨论了确定 Ω 的步骤, 给出了几种层合板的 Ω 值. 一些较简单的层合板, 其 Ω 可表示为层合板几何参数和材料参数的函数. 本文得出的结果与现有文献中得到的结果进行了比较. 对于更一般的层合板, 首先求出其 Ω , 然后利用封闭形式解预测能量释放率分量, 最后将结果与对应的有限元计算结果相比较. 所得数值结果表明, 本文提出的方法, 对于分析复合材料断裂问题是有效的. 数值分析结果可概述如下:

- (1) 均质各向同性板的 Ω 为厚度比 η 的非线性函数. 它可以表示为 $\log \eta$ 的 5 次奇函数.
- (2) 各向同性双材料偶的 Ω 取决于 η 和材料参数 α . 有限元解与 Suo 和 Hutchinson (1990)^[22]解的误差随 η 和 α 的增加而增大.
- (3) 均质正交异性板的 Ω 取决于 η 和材料参数 ρ . Ω 对 η 比对 ρ 更敏感. 作为近似, 可以考虑 Ω 仅为 η 的函数.
- (4) 对于三种叠合板实例, 本文提出的能量释放率分量的理论预测值与有限元分析结果非常接近.

附 录

裂纹尖端相对位移方程(2.15)为

$$\Delta u = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{\cos(\phi - \delta)}{\cosh(\pi\varepsilon)\sqrt{1+4\varepsilon^2}} \left\{ \begin{array}{l} K_{II}(d_2 + D \tan(\phi - \delta)) + K_{II}d_1 \\ K_{II}d_3 + K_{II}(d_2 - D \tan(\phi - \delta)) \end{array} \right\} \quad (A.1)$$

其中 $D = (d_1d_3 - d_2^2)^{1/2}$, $\phi = \varepsilon \ln(r/\bar{r})$, $\delta = \tan^{-1}(2\varepsilon)$. 界面粘合力方程(1.2)为

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \begin{array}{l} K_{II} \left(\frac{d_3}{D} \sin\phi + K_{II} \left(\cos\phi + \frac{d_2}{D} \sin\phi \right) \right) \\ K_{II} \left(\cos\phi - \frac{d_2}{D} \sin\phi \right) - K_{II} \frac{d_1}{D} \sin\phi \end{array} \right\} \quad (A.2)$$

将(A.1)和(A.2)代入(2.14), 就得到能量释放率分量(2.16), 其中的积分 I_1 到 I_3 为:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \left(\cos\phi - \frac{d_2}{D} \sin\phi \right) \cos(\phi' - \delta) dr \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \left(d_2 \cos(\phi' - \delta) - D \cos\phi \sin(\phi' - \delta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_1d_3 + d_2^2}{D} \sin\phi \cos(\phi' - \delta) \right) dr \\ I_3 &= \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \left(\sin\phi \sin(\phi' - \delta) - \frac{d_2}{D} \sin\phi \cos(\phi' - \delta) \right) dr \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 I_4 &= \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \left(\sin\phi \sin(\phi'-\delta) + \frac{d_2}{D} \sin\phi \cos(\phi'-\delta) \right) dr \\
 I_5 &= \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \left(d_2 \cos(\phi''-\delta) + D \cos\phi \sin(\phi'-\delta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d_1 d_3 + d_2^2}{D} \sin\phi \cos(\phi'-\delta) \right) dr \\
 I_6 &= \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \left(\cos\phi + \frac{d_2}{D} \sin\phi \right) \cos(\phi'-\delta) dr
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

其中, $\phi' = \varepsilon \ln(\Delta-r)/\hat{r}$, $\phi'' = \varepsilon \ln(\Delta-r)/r$. 将(2.16)式中的 G_{I} 和 G_{II} 相加, 可得 $I_1 + I_4 = I_3 + I_6 = I$, $I_2 + I_5 = 2Id_2$. 将 G_{I} 和 G_{II} 的和与(2.12)中的 G 相比较, 可得

$$I = \frac{1}{2\pi\Delta} \int_0^\Delta \sqrt{\frac{\Delta-r}{r}} \cos\left(\varepsilon \ln \frac{\Delta-r}{r} - \delta\right) dr = \frac{\sqrt{1+4\varepsilon^2}}{4\cosh(\pi\varepsilon)} \quad (\text{A.4})$$

或

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} \left[\cos\left(\varepsilon \ln \frac{1-t}{t}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln \frac{1-t}{t}\right) \right] dt \\
 &= \frac{\pi(1+4\varepsilon^2)}{2\cosh(\pi\varepsilon)} \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

这就是本文的(2.17)式.

参 考 文 献

- [1] Z. Suo, G. Bao, B. Fan and T. C. Wang, Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites, *Int. J. Solids Structure*, **28** (1991), 235-248.
- [2] T. K. O'Brien, Generic aspects of delamination in fatigue of composite materials, *J. Am. Helicopter Soc.*, **32** (1987), 13-18.
- [3] A. Hoenig, Near-tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body, *Engineering Fract. Mech.*, **16** (1982), 393-403.
- [4] J. W. Eischen, Fracture of nonhomogeneous materials, *Int. J. Fracture*, **34** (1987), 3-22.
- [5] M. L. Williams, The stresses around a fault or crack in dissimilar media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **49** (1959), 199-204.
- [6] H. Gao, M. Abbudi and D. M. Barnett, Interfacial crack-tip field in anisotropic elastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **40** (1992), 393-416.
- [7] K. C. Wu, Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials, *ASME, J. Appl. Mech.*, **57** (1990), 882-886.
- [8] K. C. Wu, Explicit crack-tip fields of an extending interface crack in an anisotropic bimaterial, *Int. J. Solids Struct.*, **27** (1991), 455-466.
- [9] Z. Suo, Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A427** (1990), 331-358.
- [10] J. L. Bassani and J. Qu, Finite crack on bimaterial and bicrystal interfaces, *J. Mech. Phys. Solids*, **37** (1989), 435-453.
- [11] J. Qu and J. L. Bassani, Cracks on bimaterial and bicrystal interfaces, *J. Mech. Phys. Solids*, **37** (1989), 417-433.
- [12] T. C. T. Ting, Interface cracks in anisotropic bimaterials, *J. Mech. Phys. Solids*, **38** (1990), 505-513.

- [13] T. C. T. Ting, Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composite, *Int. J. Solids Struct.*, **22** (1986), 965—983.
- [14] S. S. Wang, Fracture mechanics for delamination problems in composite materials, *J. Composite Materials*, **17** (1983), 210—223.
- [15] J. R. Willis, Fracture mechanics of interfacial cracks, *J. Mech. Phys. Solids*, **19** (1971), 353—368.
- [16] J. W. Hutchinson, M. E. Mear and J. R. Rice, Crack paralleling an interface between dissimilar materials, *ASME, J. Appl. Mech.*, **54** (1987), 828—832.
- [17] A. H. England, A crack between dissimilar media, *J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 400—402.
- [18] J. R. Rice and C. C. Sih, Plane problems of cracks in dissimilar media, *J. Appl. Mech.*, **33** (1965), 418—423.
- [19] J. R. Rice, Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *ASME, J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 98—103.
- [20] G. C. Sih, P. C. Paris and G. R. Irwin, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *Int. J. Fracture Mech.*, **1** (1965), 189—203.
- [21] J. G. Williams, On the calculation of energy release rates for cracked laminates, *Int. J. Fracture*, **36** (1988), 101—119.
- [22] Z. Suo, and J. W. Hutchinson, Interface crack between two elastic layers, *Int. J. Fracture*, **43** (1990), 1—18.
- [23] Z. Suo, Delamination specimens for orthotropic materials, *ASME, J. Appl. Mech.*, **57** (1990), 627—634.
- [24] R. A. Schapery, and B. D. Davidson, Prediction of energy release rate for mixed-mode delamination using classical plate theory, *Applied Mechanics Review*, **43**(2) (1990), S281—S287.
- [25] B. D. Davidson, H. Hu and R. A. Schapery, An analytical crack tip element for layered elastic structures, *J. Appl. Mech.*, (in Press).
- [26] J. Dundurs, *Mathematical Theory of Dislocations*, ASME (1969), 70—115.
- [27] R. M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, New York (1975).
- [28] M-Y He and J. W. Hutchinson, Kinking of a crack out of an interface, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 270—278.
- [29] J. M. Hutchinson, Mixed mode fracture mechanics of interfaces, *Metal-Ceramic Interfaces*, ed. by M. Rühle, A. G. Evans, M. F. Ashby and J. P. Hirth, Pergamon Press, New York (1990).
- [30] B. D. Davidson, Prediction of energy release rate for edge delamination using a crack tip element, *Presented at the Fifth ASTM Symposium on Composite Materials: Fatigue and Fracture*, Atlanta, Georgia, May 4—6 (1993).
- [31] I. S. Raju, J. H. Crews, Jr. and M. A. Aminpour, Convergence of strain release rate components for edge-delaminated composite laminates, *Engineering Fract. Mech.*, **30** (1988), 383—396.
- [32] B. D. Davidson and H. Hu, A technique to define mixed mode energy release

rate at dissimilar interfaces in fiber reinforced, laminated materials, to be submitted to *Int. J. of Fracture*.

Analysis of Energy Release Rate for Cracked Laminates

Hu Hurang

(*Department of Mechanical, Aerospace and Manufacturing Engineering,
Syracuse University, Syracuse, NY 13244, USA*)

Wu Chengping

(*Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 630042, P. R. China*)

Abstract

An interface crack analysis is presented for further understanding the characteristics of the crack-tip field. The conditions under which the energy release rate components would exist are emphasized, and the relations between energy release rate components and the stress intensity factors are given. Combining with the results of classical plate theory analysis, a closed-form solution for stress intensity factors in terms of external loading as well as some geometric and material parameters for fairly general composite laminates is derived. Then, an analytical solution for energy release rate components is deduced. In order to get energy release rate components under general loading condition, a mode mix parameter, Ω , must be determined separately. A methodology for determining Ω is discussed. Finally, several different kinds of laminates are examined, and the results obtained could be used in engineering applications.

Key words composite materials, laminates, crack-tip field, energy release rate, stress intensity factor, interface crack