

# 非对称塑性力学的物理理论

高 键 林晓玲

(山东工业大学, 济南 250000)  
(杨桂通推荐, 1994年7月18日收到)

## 摘 要

实验观察到塑性变形中的旋转现象。这种塑性旋转是由旋错, 位错的特殊排列和微观结构上缺陷滑动所产生的非均匀性。本文基于塑性旋转的微观机制, 建立了缺陷(位错和旋错)运动所满足的守恒方程。基于非对称连续介质力学理论, 导出了缺陷运动所满足的扩散方程。利用塑性功的最大耗散过程和尺度不变性, 推出了Cosserat塑性力学中的各种模型。

**关键词** 塑性旋转 微观结构 旋错 位错

## 一、简 介

塑性变形是取决于微观缺陷的运动, 例如, 位错, 旋错和空穴等。至今, 已假设了多种模型来描述微观缺陷的运动和宏观塑性变形之间的关系。在它们中一个较好的连续体的模型是由Aifantis发展的<sup>[1][2]</sup>。这种模型能够描述各种尺度上的位错现象, 位错密度 $\rho$ 的守恒运动方程描述了位错的扩散运动。然后, 由尺度的不变性可以导出塑性变形的微观机制和宏观塑性理论的关系。众所周知, 位错表示微观尺度上的位移间的非协调度。在晶体材料中, 存在着另一种缺陷-旋错。旋错描述了晶格旋转的非协调度<sup>[3][4]</sup>。旋转的对偶变量是偶应力和非对称应力。因此, 在非经典连续体力学的框架上建立塑性力学的物理学模型是非常必要的。相对于位错的Patterning模型, 我们首先要讨论旋错的微观运动。

## 二、旋 错 动 力 学

如果一个晶体是具有晶格曲率 $\Lambda$ , 我们称晶格方位的不连续度 $\omega$ 之为 Frank矢量, 并且由下述方程描述它们的关系<sup>[4][5]</sup>:

$$\omega = \oint_C \Lambda^T dx = \int_C \nabla \times \Lambda^T ds \quad (2.1)$$

这里  $C$  是晶格中的一个封闭路径。

因此, 旋错密度张量 $\Phi$ 可由下述方程来定义:

$$\Phi = \nabla \times \Lambda \quad (2.2)$$

旋转角速度矢量的梯度 $\nabla\phi$  ( $\phi$ 是旋转角速度矢量) 是取决于旋错的运动和晶格曲率的变化。我们考虑这样一个微元体, 在微元体内旋错密度不随时间而发生变化(或者说旋错的个数不

变)。此时

$$\nabla\phi = \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (2.3)$$

如果旋错运动, 旋错密度随时间而变, 必须添加描述旋错运动的额外项

$$\nabla\phi = \frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \theta^T \quad (2.4)$$

这里  $\theta^T$  是旋错流张量的转置。

方程(2.4)和(2.2)的协调条件产生出張量形式的旋错运动的守恒方程

$$\dot{\Phi} + \nabla \times \theta^T = 0 \quad (2.5)$$

事实上, 我们考虑介质中某一稳定的封闭曲线  $C$ 。在方程(2.1)中取由  $C$  所生成的任一曲面  $S$ , 由方程(2.5)我们可以得到

$$\frac{d\omega}{dt} = - \oint_C \theta \cdot dl \quad (2.6)$$

从方程(2.6)的物理意义, 我们可以得到: 方程右边的积分确定出单位时间内由旋错运动产生的流入和流出  $C$  域内的 Frank 矢量的度量。因此, 张量  $\theta$  自然地称之为旋错流密度张量。

现在, 我们考虑这样的情况: 一个旋错线  $D$ , 它的方向矢量是  $t_D$ , Frank 矢量是  $\omega_D$ 。正如图1所示。对于这条旋错线, 我们定义。

$$\Phi_D = t_D \otimes \omega_D \quad (2.7)$$

如果晶体中所有方向的 Frank 矢量具有一个确定的数, 平均旋错密度张量  $\Phi$  能够写作:

$$\Phi = \sum_{D=1}^k (t_D \otimes \omega_D) = \int_V (t \otimes \omega) \vartheta ds \quad (2.8)$$

这里  $\vartheta$  是 Frank 矢量分布的标量密度;  $t$  是方向矢量, 取作所有可能的方向;  $\vartheta(t, x) ds$  表示通过由方向矢量  $t$  生成的立体角中垂直于  $t$  的面积  $ds$  的旋错的数量, 旋错具有 Frank 矢量  $\omega$ 。

从旋错流密度的物理意义中, 我们可以考虑具有一个 Frank 矢量  $\omega$  的旋错线  $D$ , 旋错线中每一点以速度  $v = v(x)$  运动。因此, 我们能够计算由通过曲线  $C$  的旋错所产生的 Frank 流矢量。如果  $dl$  是曲线  $C$  上的一个弧元,  $t$  是位错线与曲线  $C$  相交点的位错线  $D$  上的切矢量, 越过曲线  $C$  的旋错线发生在垂直于  $dl$  和  $t$  的  $v$  的分量。显然, 由平行的旋错线单位时间超过  $dl$  的量是由下述方程给出

$$N(dl \times t)v \quad (2.9)$$

这里  $N$  是通过垂直于  $t$  的单位面积上的旋错数。因此, 通过曲线  $C$  的 Frank 矢量流是等于

$$\oint_C \theta dl = \oint_C N[(dl \times t)v] \omega = \oint_C N[\omega \otimes (t \times v)] dl \quad (2.10)$$

我们得到

$$\theta^T = N[(t \times v) \otimes \omega] \quad (2.11)$$

由求旋错的平均密度  $\vartheta$  的类似过程, 我们可以得到

$$\theta^T = \int_V (t \times J) \otimes \omega ds \quad (2.12)$$

这里  $J$  是旋错流的矢量分布函数, 或称之为旋错流矢量。

我们考虑一族旋错沿着它们的滑动系统运动。这个滑动系统可以由  $(n, v)$  来描述。  $n$  表示垂直于滑动面的法矢,  $v$  是滑动方向上的单位矢量。如图2所示。在下一段, 主要考虑楔形旋

错(Wedge disclination), 楔形旋错的Frank矢量平行于方向矢量 $\mathbf{t}^{(7);(8)}$ 。

将方程(2.12)和(2.8)代入方程(2.5), 我们得到

$$\int_V (\dot{\mathbf{j}} + \text{div} \mathbf{J}) (\mathbf{t} \otimes \boldsymbol{\omega}) ds = 0 \quad (2.13)$$

如果考虑到旋错的湮灭和生成, 一个源项应该添加到局部化的旋错运动的守恒方程:

$$\dot{\mathbf{j}} + \text{div} \mathbf{J} = \mathbf{a} \quad (2.14)$$

旋错运动的守恒方程是类似于Aifantis给出的位错方程。位错运动的守恒方程:

$$\dot{\rho} + \text{div} \mathbf{j} = \mathbf{c}$$

这里  $\rho$  表示位错密度;  $\mathbf{j}$  表示位错流矢量;  $\mathbf{c}$  是位错源项, 它描述了位错湮灭和生成。

### 三、在变形带中的位错和旋错形图

塑性变形的非稳定性(例如剪切带和旋转带)来自于缺陷的不稳定运动。它们是自由位错的滑移通道和晶格重新生成的方位带等<sup>[9]</sup>。Aifantis 已建立一个位错运动的连续化模型。这里, 我们基于非对称连续体力学和已建立的旋错动力学来建立位错——旋错运动的连续化模型。

材料态是指原子在它们的平衡位置受到高扰动的状态。当原子偏离原子晶格中的正常位置, 形成了材料中的位错和旋错。我们定义这样的状态为缺陷态。在晶格正常位置的状态为晶格态。因此, 我们能分解材料态为晶格态和缺陷态(位错-旋错态)。与此相对应的应力和偶应力被分解为由上标  $L$  标志的晶格态应力, 偶应力和由上标  $D$  标志的缺陷态的应力、偶应力

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^L + \mathbf{T}^D, \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^L + \boldsymbol{\mu}^D \quad (3.1a, b)$$

这里  $\mathbf{S}$  表示总应力,  $\boldsymbol{\mu}$  表示总偶应力。

对于位错-旋错态, 线动量, 动量矩的守恒定律分别表示为:

$$\text{div} \mathbf{T}^D = \hat{\mathbf{f}}^D \quad (3.2)$$

$$\text{div} \boldsymbol{\mu}^D + \mathbf{e} \cdot \mathbf{T}^D = \hat{\mathbf{g}}^D \quad (3.3)$$

这里  $\hat{\mathbf{f}}^D$  和  $\hat{\mathbf{g}}^D$  是由晶格态和缺陷态之间动量和动量矩的交换所产生的力和力矩。 $\mathbf{e}$  是Eddington张量。

相应于晶格态的守恒方程, 可用“ $L$ ”替代方程(3.2)、(3.3)中的上标“ $D$ ”。但是, 总应力和偶应力一定满足总的守恒定律, 这要求:

$$\hat{\mathbf{f}}^D + \hat{\mathbf{f}}^L = 0, \quad \hat{\mathbf{g}}^D + \hat{\mathbf{g}}^L = 0 \quad (3.4a, b)$$

在Cosserat理论中, 应力是非对称的, 分解应力为两部分: 对称应力  $\mathbf{T}_s^L = \frac{1}{2} (\mathbf{T}^L + \mathbf{T}^{L^T})$

和反对称应力  $\mathbf{T}_a^L = \frac{1}{2} (\mathbf{T}^L - \mathbf{T}^{L^T})$ 。对于位错和旋错沿着它们的滑移系统运动所形成的变形带, 本构变量可以选为

$$\{\rho, \theta, \mathbf{j}, \mathbf{J}, \mathbf{T}_s^L, \mathbf{T}_a^L, \boldsymbol{\mu}^L, \mathbf{n}, \mathbf{v}\} \quad (3.5)$$

为方便起见, 响应的本构函数可以表示为下列形式:

$$\{\mathbf{T}^D, \boldsymbol{\mu}^D, \hat{\mathbf{f}}^D, \hat{\mathbf{g}}^D, \mathbf{c}, \mathbf{a}\} \quad (3.6)$$

根据各向同性函数的表示定理, 方程(3.5)的合适的变量可以重写为下列形式:

$$\{\rho, \vartheta, j, j_c, \tau_s, \tau_a, \tau_c, J, J_c, \mu, \mu_c\} \quad (3.7)$$

这里  $j = j\mathbf{v}, j_c = j\mathbf{n}, \tau_s = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}_s^L \mathbf{n}), \tau_a = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}_a^L \mathbf{n}), \tau_c = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}^L \mathbf{n}), J = J\mathbf{v}, J_c = J\mathbf{n}, \mu = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\mu}^L \mathbf{t}), \mu_c = \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\mu}^L \mathbf{t})$ .

楔形旋错的变形机制是沿  $\mathbf{v}$  方向的旋错流的发展。这个发展是由作用在垂直  $\mathbf{v}$  于上方向的平面上的偶应力激发的。

本构函数可以展开成下列形式：

$$\mathbf{T}^D = t_{vv}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + t_{vn}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) + t_{nv}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) + t_{nn}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad (3.8a)$$

$$\boldsymbol{\mu}^D = \mu_{nt}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) + \mu_{vt}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{t}) \quad (3.8b)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^D = (\alpha - \gamma\tau + \beta j + \delta J - \zeta\mu)\mathbf{v} + (\alpha_c - \gamma_c\tau_c + \beta_c j_c + \delta_c J_c - \zeta_c\mu_c)\mathbf{n} \quad (3.8c)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^D = [(a - b\tau + dj + eJ - f\mu) + (a_c - b_c\tau_c + d_c j_c + e_c J_c - f_c\mu_c)]\mathbf{t} \quad (3.8d)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}(\rho, \vartheta) \quad (3.8e)$$

$$\hat{\mathbf{c}} = \hat{\mathbf{c}}(\rho, \vartheta) \quad (3.8f)$$

这里,  $\tau = \tau_s + \kappa\tau_a$ ,  $\kappa$  是  $\rho$  和  $\vartheta$  的函数。

Vladimiro 和 Romanov<sup>[9]</sup>, Aifantis 和 Romanov<sup>[10]</sup> 曾指出, 旋转带的微观机制, 即是旋转带中塑性变形主要是由于楔形旋错极子, 位错的第二滑移运动系统在楔形旋错运动平面的运动。函数  $\hat{\mathbf{c}}$  和  $\hat{\mathbf{a}}$  描述了位错和旋错的生成或湮灭。楔形旋错可由位错墙的对称分布来描述。而作用于楔形旋错极子上的力是与在缺陷态上的  $P$ - $K$  力的非均匀分布有关。

系数  $(\alpha, \alpha_c)$  和  $(a, a_c)$  是描述位错, 旋错运动对塑性屈服的响应, 系数  $(\gamma, \gamma_c)$  和  $(\zeta, \zeta_c)$  是度量  $P$ - $K$  力均匀作用在位错和旋错的效果, 而系数  $(b, b_c)$  和  $(f, f_c)$  是度量  $P$ - $K$  力非均匀作用在位错和旋错上的效果。这种非均匀性是由于材料的特征尺度, 例如, 位错极子和旋错极子的特征长度, 原子间的距离; 与这些缺陷有关的内力沿着这些特征面的分布一般是非均匀的。系数  $(\beta, \beta_c)$  和  $(\delta, \delta_c)$  是度量位错和旋错沿直线运动所系数的拖曳, 而  $(d, d_c)$  和  $(e, e_c)$  是度量晶格的错排方位的拖曳。  $\kappa$  描述对称应力和非对称应力对位错和旋错的作用的差别。

所有系数均是  $\rho$  和  $\vartheta$  的函数。

把方程 (3.8) 代入方程式 (3.2) 和 (3.3) 和比较方程两端, 得到:

$$D_{vn}^{\rho} \nabla_n \rho + D_{vn}^{\vartheta} \nabla_n \vartheta + D_{vv}^{\rho} \nabla_v \rho + D_{vv}^{\vartheta} \nabla_v \vartheta = \alpha - \gamma\tau + \beta j + \delta J - \zeta\mu \quad (3.9a)$$

$$D_{nn}^{\rho} \nabla_n \rho + D_{nn}^{\vartheta} \nabla_n \vartheta + D_{nv}^{\rho} \nabla_v \rho + D_{nv}^{\vartheta} \nabla_v \vartheta = \alpha_c - \gamma_c\tau_c + \beta_c j_c + \delta_c J_c - \zeta_c\mu_c \quad (3.9b)$$

$$C_{iv}^{\rho} \nabla_v \rho + C_{iv}^{\vartheta} \nabla_v \vartheta + D_{[vn]}^{\rho} \rho + D_{[vn]}^{\vartheta} \vartheta = a - b\tau + dj + eJ - f\mu \quad (3.9c)$$

$$C_{in}^{\rho} \nabla_n \rho + C_{in}^{\vartheta} \nabla_n \vartheta + D_{[vn]}^{\rho} \rho + D_{[vn]}^{\vartheta} \vartheta = a_c - b_c\tau_c + d_c j_c + e_c J_c - f_c\mu_c \quad (3.9d)$$

这里符号  $\nabla_n$  和  $\nabla_v$  表示方向系数,

$$\nabla_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}, \nabla_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \quad (3.10)$$

和

$$D_{ij}^{\rho} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial \rho}, D_{ij}^{\vartheta} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial \vartheta}, C_{jv}^{\rho} = \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \rho}, C_{ji}^{\vartheta} = \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial \vartheta}$$

$$D_{[vn]}^{\rho} = \frac{1}{2} [D_{vn}^{\rho} - D_{nv}^{\rho}], D_{[vn]}^{\vartheta} = \frac{1}{2} [D_{vn}^{\vartheta} - D_{nv}^{\vartheta}].$$

方程 (3.9) 可以看作度量  $(j, J)$  和  $(j_c, J_c)$  的线性代数方程, 方程的解可以给出缺陷流矢量

$$\mathbf{j} = j\mathbf{v} + j_0\mathbf{n}, \quad \mathbf{J} = J\mathbf{v} + J_0\mathbf{n} \quad (3.11)$$

将方程(3.9)和(3.11)得到的缺陷流矢量代入方程(2.14)和(2.15), 我们可以得到位错和旋错运动的守恒方程(类似于弥散-反应方程):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & [A_{vv}\nabla_{vv}^2 + A_{vn}\nabla_{vn}^2 + A_{nn}\nabla_{nn}^2 + A_v\nabla_v + A_n\nabla_n]\rho \\ & + [B_{vv}\nabla_{vv}^2 + B_{vn}\nabla_{vn}^2 + B_{nn}\nabla_{nn}^2 + B_v\nabla_v + B_n\nabla_n]\vartheta + c \end{aligned} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = & [C_{vv}\nabla_{vv}^2 + C_{vn}\nabla_{vn}^2 + C_{nn}\nabla_{nn}^2 + C_v\nabla_v + C_n\nabla_n]\rho \\ & + [D_{vv}\nabla_{vv}^2 + D_{vn}\nabla_{vn}^2 + D_{nn}\nabla_{nn}^2 + D_v\nabla_v + D_n\nabla_n]\vartheta + d \end{aligned} \quad (3.12b)$$

这里  $\nabla_{nn}^2 = \text{tr}\{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \text{grad}^2\}$ ,  $\nabla_{vn}^2 = \text{tr}\{\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \text{grad}^2\}$ ,  $\nabla_{vv}^2 = \text{tr}\{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \text{grad}\}$ .

由这样假设“在缺陷态的应力和偶应力是( $\rho\vartheta$ )的线性函数”, 上述方程的系数是常数. 如果我们定义,  $\mathbf{A} = A_v\mathbf{v} + A_n\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{B} = B_v\mathbf{v} + B_n\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{C} = C_v\mathbf{v} + C_n\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{D} = D_v\mathbf{v} + D_n\mathbf{n}$ ; 矢量 $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 描述了位错和旋错的对流运动. 这种运动类似于流体中化学反应的非线性反应——扩散方程中溶解速度.

让坐标系的 $x_1, x_2$ 坐标分别与 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{n}$ 方向一致. 作用在晶体上的应力和偶应力都是常数. 对于一维系统的运动守恒方程成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & A \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + B \frac{\partial \rho}{\partial x} + f(\rho) - p\rho^2\vartheta \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = & C \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + D \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - g(\vartheta) + \xi p\rho^2\vartheta \end{aligned} \quad (3.13)$$

这里  $f(\rho)$ 是位错生成项,  $p\rho^2\vartheta$ 是由于旋错的存在而使位错湮灭, 或位错转化为旋错.  $g(\vartheta)$ 是旋错的沉陷项.  $\xi p\rho^2\vartheta$ 是旋错的生成项<sup>[10]</sup>; 系数 $\xi \leq 1$ 是考虑到, 不是所有湮灭的位错都转换成旋错. 在方程的右边有两项位错或旋错的梯度项. 二阶梯度项表示了扩散; 一阶导数项表示了缺陷的对流.

#### 四、缺陷的微观运动和塑性变形的宏观描述

缺陷的微观运动可由方程(2.14), (2.15), (3.2), (3.3)来描述. 而宏观的塑性变形取决于缺陷的微观运动. 为了证明微观模型和塑性宏观理论的一性, 我们首先区分一下它们的不同特征.

在塑性的宏观理论模型中, 变量表示了大尺度上材料的力学状态的平均度量, 而忽略了微观的不均匀性, 这种不均匀性的特征尺度可以是由材料中原子的距离等. 因此, 忽略微观运动方程中的扩散项是合理的.

另外, 宏观的塑性理论是基于塑性的不可压缩性. 位错的攀移过程引起晶体的体积变化. 因此可以忽略位错流的攀移分量 $j_0$ 和忽略与位错攀移有关的旋错流的分量 $S_0$ .

采用以上的简化, 用于证明同一性的微分方程具有下述形式:

$$\dot{\rho} = c(\rho, \vartheta) \quad (4.1)$$

$$\dot{\vartheta} = a(\rho, \vartheta) \quad (4.2)$$

$$\hat{\mathbf{r}}^D = (a - \gamma\tau + \beta j + \delta J - \xi\mu)\mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$

$$\hat{\mathbf{g}}^D = (a - b\tau + d j + e J - f\mu)\mathbf{n} = 0 \quad (4.4)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^L + \mathbf{T}^D, \quad \mu = \mu^L + \mu^D \quad (4.5a, b)$$

从方程(4.3)和(4.4), 我们能够解出

$$\tau = h_0 + h_1 j + h_2 J \quad (4.6)$$

$$\mu = k_0 + k_1 j + k_2 J \quad (4.7)$$

这里

$$\{h_0, h_1, h_2\} = \frac{1}{\gamma f - b \xi} \{f\alpha - \xi a, f\beta - \xi d, f\delta - \xi e\}$$

事实上, 当  $j = J = 0$  时, 可以得到微观屈服条件:

$$\tau = h_0, \quad \mu = k_0 \quad (4.8a, b)$$

变形带一种典型表现是晶格相对于周围介质旋转的不稳定性. 变形带的微观物理机制是不全楔型旋错极子的运动和累积. 因此, 引入塑性旋转矢量  $\phi^p$  表示相对于周围介质的独立的塑性转动. 在变形带中的几何变形量可以表示为:

$$\mathbf{L}^p = \dot{\gamma}^p (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) - \dot{\phi}^p \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Lambda}^p = \delta^p (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) \quad (4.9a, b)$$

或

$$\mathbf{D}^p = \dot{\gamma}^p \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{\Xi}^p = (\dot{\gamma}^p - \dot{\phi}^p) \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) \quad (4.10b)$$

$$\mathbf{\Lambda}^p = \delta^p \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{t} \quad (4.11)$$

这里  $\gamma^p = \gamma^p(\rho, \vartheta, l, L)$ ,  $\phi^p = \phi^p(\rho, \vartheta, l, L)$ ,  $\delta^p = \delta^p(\rho, \vartheta, l, L)$ ,  $\delta^p$  是旋转角  $\phi^p$  的梯度.  $l$  和  $L$  分别是位错和旋错的内特征尺度参数. 当缺陷处于运动状态, 它们可以是“平均运动距离”. 事实上,  $\mathbf{\Xi}^p$  是两种塑性转动之差. 首先, 是晶体中的单滑移产生的塑性转动  $\mathbf{W}^p = \dot{\gamma}^p \mathbf{\Omega}$ . 另一塑性转动  $\mathbf{W}_s^p = \dot{\phi}^p \mathbf{\Omega}$  可以看作相对于周围介质的独立转动. 事实上, 双滑移系统可以由方程(4.9)来描述. 如果双滑移系统是:

$$\mathbf{L}_i^p = \dot{\gamma}_i^p (\mathbf{n} \otimes \mathbf{v}), \quad \mathbf{L}_s^p = \dot{\phi}_s^p (\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) \quad (4.9a, b)'$$

我们可以看到  $\dot{\gamma}^p = \dot{\gamma}_i^p + \dot{\phi}_s^p$  和  $\dot{\phi}^p = 2\dot{\phi}_s^p$ . 当  $\mathbf{\Xi}^p = 0$  时, 我们可以推出,  $\dot{\gamma}_i^p = \dot{\phi}_s^p$ . 在这种情况下, 塑性变形是纯剪切. 当  $\dot{\phi}_s^p = 0$  时, 塑性变形是简单剪切.

$$\dot{\gamma}^p = \frac{\partial \gamma^p}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \gamma^p}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \gamma^p}{\partial l} \dot{l} + \frac{\partial \gamma^p}{\partial L} \dot{L} = a_1 \dot{\rho} + b_1 \dot{\vartheta} + a_1 j + \beta_1 J \quad (4.12)$$

$$\dot{\phi}^p = \frac{\partial \phi^p}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \phi^p}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \phi^p}{\partial l} \dot{l} + \frac{\partial \phi^p}{\partial L} \dot{L} = a_2 \dot{\rho} + b_2 \dot{\vartheta} + a_2 j + \beta_2 J \quad (4.13)$$

$$\dot{\delta}^p = \frac{\partial \delta^p}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \delta^p}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \delta^p}{\partial l} \dot{l} + \frac{\partial \delta^p}{\partial L} \dot{L} = a_3 \dot{\rho} + b_3 \dot{\vartheta} + a_3 j + \beta_3 J \quad (4.14)$$

方程(4.12), (4.13)和(4.14)清楚地表明, 塑性流动速率取决于位错和旋错的生成和运动速率. 如果我们建议,  $a_i = b_i = 0 (i=1, 2, 3)$ , 塑性流是  $\rho$  和  $\vartheta$  的隐函数, 亦即,  $\gamma^p = \gamma^p[l(\rho), L(\vartheta)]$ ,  $\phi^p = \phi^p[l(\rho), L(\vartheta)]$ ,  $\delta^p = \delta^p[l(\rho), L(\vartheta)]$ . 因此,  $\dot{\gamma}^p = a_1 j + \beta_1 J$ ,  $\dot{\phi}^p = a_2 j + \beta_2 J$ , 和  $\dot{\delta}^p = a_3 j + \beta_3 J$ . 如果我们假设,  $\kappa = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1}$  和从  $\tau$  和  $\mu$  的定义, 塑性功成为

$$\text{tr}\{\mathbf{T}_i^p \mathbf{D}^p + \mathbf{T}_s^p \mathbf{\Xi}^p + \mu^L \mathbf{\Lambda}^p\} = (\alpha, \tau + \alpha_3 \mu) j + (\beta_1 \tau + \beta_3 \mu) J > 0 \quad (4.15)$$

方程(4.15)表明, 微观结构上的塑性, 耗散功等价于宏观塑性变形的塑性功. 在这样的假设下, 最大熵增定理等价于宏观塑性理论中的最大塑性功耗散定律. 由最大塑性功耗散

定律的实现可以确定出塑性变形速率张量或方位张量  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  和  $\mathbf{K}$ 。

上述讨论建议下述的最大值问题:

$$\max\{\text{tr}[\mathbf{T}_s^L \mathbf{D}^p + \mathbf{T}_s^L \Xi^{p'} + \mu^L \Lambda^{p'}]\} \quad (4.16a)$$

或

$$\max\{\text{tr}[\mathbf{T}_s^L \mathbf{M} + p \mathbf{T}_s^L \mathbf{\Omega} + q \mu^L \mathbf{K}]\} \quad (4.16b)$$

这里  $p = \frac{\dot{\gamma}^p - \phi^p}{\dot{\gamma}^p}$ ,  $q = \dot{\delta}^p / \dot{\gamma}^p$ . 和约束条件

$$\text{tr} \mathbf{M} = \text{tr} \mathbf{\Omega} = \text{tr} \mathbf{K} = 0 \quad (4.17a)$$

$$\text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}) = \frac{1}{2}, \quad \text{tr}(\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T) = \frac{1}{2}, \quad \text{tr}(\mathbf{K}\mathbf{K}^T) = 1 \quad (4.17b)$$

利用拉格朗日乘子法, 得到

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{M}} = \dot{\gamma}^p \mathbf{T}_s^L - \lambda_1 \mathbf{I} - 2\lambda_2 \mathbf{M} = 0 \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{\Omega}} = (\dot{\gamma}^p - \phi^p) \mathbf{T}_s^L - \lambda_3 \mathbf{I} - 2\lambda_4 \mathbf{\Omega} = 0 \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{K}} = \dot{\delta}^p \mu^L - \lambda_5 \mathbf{I} - 2\lambda_6 \mathbf{K} = 0 \quad (4.18c)$$

其次, 从方程(4.16)(4.17)给出的约束条件, 得到

$$\lambda_1 = \frac{\dot{\gamma}^p}{3} \text{tr} \mathbf{T}_s^L, \quad \lambda_3 = \lambda_5 = 0 \quad (4.19a, b)$$

$$\lambda_2 = \dot{\gamma}^p \sqrt{J_s}, \quad \lambda_6 = \frac{\dot{\delta}^p}{\sqrt{2}} \sqrt{J_\mu} \quad (4.19c, d)$$

$$\lambda_4 = (\dot{\gamma}^p - \phi^p) \sqrt{J_a} \quad (4.19e)$$

和流动规律

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2\sqrt{J}} \mathbf{T}_s^{L'} = \frac{1}{2\sqrt{J}} (\mathbf{S}_s' - \mathbf{T}_s^{D'}) \quad \text{或} \quad \mathbf{D}^p = \frac{\dot{\gamma}^p}{2\sqrt{J_s}} \mathbf{T}_s^{L'} = \frac{\dot{\gamma}^p}{2\sqrt{J_s}} (\mathbf{S}_s' - \mathbf{T}_s^{D'}) \quad (4.20a, b)$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{T}_s^L}{2\sqrt{J_a}} = \frac{1}{2\sqrt{J_a}} (\mathbf{S}_a - \mathbf{T}_a^D) \quad \text{或} \quad \Xi^{p'} = \frac{\dot{\gamma}^p - \phi^p}{2\sqrt{J_a}} \mathbf{T}_s^L = \frac{\dot{\gamma}^p - \phi^p}{2\sqrt{J_a}} (\mathbf{S}_a - \mathbf{T}_a^D) \quad (4.21a, b)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\sqrt{2J_\mu}} \mu^L = \frac{1}{\sqrt{2J_\mu}} (\mu - \mu^D) \quad \text{或} \quad \Lambda^{p'} = \frac{\dot{\delta}^p}{\sqrt{2J_\mu}} \mu^L = \frac{\dot{\delta}^p}{\sqrt{2J_\mu}} (\mu - \mu^D) \quad (4.22a, b)$$

这里,  $J_s = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{T}_s^{L'} \mathbf{T}_s^{L'}]$ ,  $J_a = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{T}_s^L \mathbf{T}_s^{L'T}]$ ,  $J_\mu = \frac{1}{2} \text{tr}[\mu^L \mu^{L'T}]$ ,  $\mathbf{S}_s' = \mathbf{S}_s - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}_s \mathbf{I}$ .

至此, 宏观塑性流动规律已从塑性功最大耗散过程推出. 从方程(4.5)和(4.6)给出的微观屈服条件, 得到

$$\tau = \max\{\mathbf{T}_s^{L'} \mathbf{M} + \kappa \mathbf{T}_a^L \mathbf{\Omega}^T\} = \sqrt{J_s} + \kappa \sqrt{J_a} = h_0 \quad (4.23)$$

$$\sqrt{2J_\mu} = \max\{\mu^L \mathbf{K}^T\} = k_0 \quad (4.24)$$

如果我们把  $\sqrt{J}$  和  $\sqrt{J_a}$  看作两个独立变量, 屈服条件(4.22)可以分解为下列两个独立的屈服条件:

$$\sqrt{J} = h_0^* \quad \text{和} \quad \sqrt{J_a} = h_a^* \quad (4.25a, b)$$

这三个独立的屈服条件把塑性变形区分为部分塑性变形和总塑性变形。

从微观分析中所得到的结果，能够推出 Cosserat 塑性力学中的各种宏观的本构理论。

当  $\Xi^p = 0$ ，我们得到  $\mathbf{W}^p = \mathbf{W}_s^p$ 。在这种情况下，我们可以得到两种可能性：一是部分塑性变形，反对称应力处于弹性变形 ( $\sqrt{J_a} < h_a^*$ )。另一是  $\mathbf{T}_a^L = 0$  和本构模型退化为 Cosserat 塑性力学中的对称模型。如果偶应力被忽略，本构模型退化为经典的塑性力学。我们考虑这样的情形，即微转动角消失。总偶应力  $\boldsymbol{\mu}$  和反对称应力  $\mathbf{T}_a$  一定消失。塑性旋  $\mathbf{W}^p$  可以表示为：

$$\mathbf{W}^p = \dot{\gamma}^p \boldsymbol{\Omega} = -\dot{\gamma}^p \frac{\mathbf{T}_a^D}{2\sqrt{J_a}} \quad (4.26)$$

在上述关系中，我们必须补充关于残余应力 (back stress) 的“本构方程”。在经典理论中，仅定义了关于对称残余应力的几何硬化方程。当反对称残余应力张量也能够由对称残余应力和塑性应变率张量描述时，

$$\frac{\mathbf{T}_a^D}{2\sqrt{J_a}} = \frac{1}{t_n \dot{\gamma}^p} [\mathbf{T}_a^D \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \mathbf{T}_a^D] \quad (4.27)$$

由位错的单滑移所产生的塑性旋能够由下列方程来确定。

$$\mathbf{W}^p = -\frac{1}{t_n} [\mathbf{T}_a^D \mathbf{D}^p - \mathbf{D}^p \mathbf{T}_a^D] \quad (4.28)$$

由方程 (4.28) 和 (4.26)，推出  $t_n = \Delta \sqrt{J_a}$ 。因为  $\sqrt{J_a}$  是一种“特殊的流动应力”，本构常数  $t_n$  是与塑性变形有关的函数。

## 五、各种 Cosserat 塑性力学的本构模型的微观机制

屈服条件在宏观塑性力学理论中起着十分重要的作用。在宏观 Cosserat 塑性力学的理论框架中，响应于独立的几何变形存在有独立的屈服条件。Lippman 认为在 Cosserat 介质中的屈服条件是 18 个，和建议使用两个独立的屈服条件。一个屈服条件是关于应力的和另一个是关于偶应力<sup>[11]</sup>。根据应变能的考虑，Olesiak 认为有两个独立的屈服条件：剪切屈服条件和旋转屈服条件<sup>[12]</sup>。根据微观分析，存在三个独立的屈服条件，这三个屈服条件响应于独立的几何变形，旋转角，旋转角梯度和剪应变。这三个独立屈服条件塑性变形化分为部分塑性变形和总塑性变形。为简便起见，人们习惯于使用一个统一的屈服条件，而不是独立的屈服条件来描述总的塑性变形。事实上，这两种模型是等价的。

由方程 (4.10) 和 (4.11) 暗含着这样的关系：

$$\frac{\dot{\gamma}^p}{2} = \sqrt{\mathbf{I}} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{D}^p \mathbf{D}^p]} \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{2} (\dot{\gamma}^p - \dot{\phi}^p) = \sqrt{\mathbf{I}_a} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}[\Xi^p \Xi^{pT}]} \quad (5.2)$$

$$\frac{\dot{\delta}^p}{2} = \sqrt{\mathbf{I}_\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}[\Lambda^p \Lambda^{pT}]} \quad (5.3)$$

因此：方程 (4.19) ~ (4.21) 能够写作下述形式：

$$\mathbf{D}^p = \frac{\sqrt{\mathbf{I}}}{\sqrt{J}} \mathbf{T}_s^{L'} \quad (5.4)$$



$$\Xi^p = \frac{\sqrt{J_a}}{\sqrt{J_a}} \mathbf{T}_a^L \quad (5.5)$$

$$\Lambda^p = \frac{\sqrt{J_\mu}}{\sqrt{J_\mu}} \mu^L \quad (5.6)$$

在总的塑性变形状态, Vardoulakis, Muhlhaus 和 Besdo 假设同一的有效应力和塑性流是<sup>[13][14][16]</sup>:

$$\tau_z = \sqrt{\frac{1}{2} [\text{tr} [\mathbf{T}_s^{L'} \mathbf{T}_s^{L'}] + \frac{1}{m} \text{tr} (\mathbf{T}_a^L \mathbf{T}_a^{L'}) + \frac{1}{n} \text{tr} (\mu^L \mu^{L'})]} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_z &= \sqrt{\frac{1}{2} [\text{tr} (\mathbf{D}^p \mathbf{D}^p) + m \text{tr} (\mathbf{W}^p \mathbf{W}^{pT}) + n \text{tr} (\Lambda^p \Lambda^{pT})]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{\dot{\gamma}^p}{2} + \frac{m}{2} (\dot{\gamma}^p - \dot{\phi}^p)^2 + n \dot{\delta}^p \right]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

在总的塑性状态, 得到这样的关系:

$$\frac{\dot{\gamma}^p}{2\dot{\lambda}_z} = k_\gamma, \quad \frac{\dot{\gamma}^p - \dot{\phi}^p}{2\dot{\lambda}_z} = k_\phi, \quad \frac{\dot{\delta}^p}{\dot{\lambda}_z} = k_\delta \quad (5.9a, b, c)$$

和

$$\frac{\sqrt{J}}{\tau_z} = f_s, \quad \frac{\sqrt{J_a}}{\tau_z} = f_a, \quad \frac{\sqrt{J_\mu}}{\tau_z} = f_\mu \quad (5.10a, b, c)$$

这里  $f_i$  和  $k_j$  ( $i=s, a, \mu$ ;  $j=\gamma, \phi, \delta$ ) 是比例系数.

将方程(5.9)和(5.10)代入方程(4.20b)~(4.22b), 得到:

$$\mathbf{D}^p = \frac{k_\gamma}{f_s} \frac{\dot{\lambda}_z}{\tau_z} \mathbf{T}_s^{L'} \quad (5.11)$$

$$\Xi^p = \frac{k_\phi}{f_a} \frac{\dot{\lambda}_z}{\tau_z} \mathbf{T}_a^L \quad (5.12)$$

$$\Lambda^p = \frac{k_\delta}{f_\mu} \frac{\dot{\lambda}_z}{\tau_z} \mu^L \quad (5.13)$$

塑性功满足下述关系:

$$[\mathbf{T}_s^p \mathbf{D}^p + \mathbf{T}_a^L \Xi^{pT} + \mu^L \Lambda^{pT}] = 2\tau_z \dot{\lambda}_z \quad (5.14)$$

当且仅当  $\frac{f_s}{k_\gamma} = 1, \frac{f_a}{k_\phi} = m, \frac{f_\mu}{k_\delta} = n.$

因此, 流动规律可以写成下述形式:

$$\mathbf{D}^p = \frac{\dot{\lambda}_z}{\tau_z} \mathbf{T}_s^{L'} \quad (5.15)$$

$$\Xi^p = \frac{\dot{\lambda}_z}{\tau_z} \mathbf{T}_a^L \quad (5.16)$$

$$\Lambda^{pT} = \frac{\dot{\lambda}_z}{\tau_z} \mu^L \quad (5.17)$$

显然, 与上述流动规律相对应的屈服条件可由微观屈服条件来确定. 由方程(4.10)~(4.11)和(5.15)~(5.17), 得到:

$$\tau_z = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \text{tr} (\mathbf{T}_s^{L'} \mathbf{T}_s^{L'}) + \frac{1}{\alpha} \text{tr} (\mathbf{T}_a^L \mathbf{T}_a^{L'}) + \frac{1}{\beta} \text{tr} (\mu^L \mu^{L'}) \right]} \quad (5.18)$$

$$= \frac{1}{\xi} (\tau + k\mu) = k_2^0$$

这里  $\xi$ ,  $k$ ,  $k_2^0$  是描述塑性变形的临界状态的常数。

由类似的方法, 也可以证明 Lippman 建议的两个独立的屈服条件的 Cosserat 塑性模型。等价于三个独立的屈服条件的塑性模型。

至此, 使用连续化模型建立了非对称塑性力学的物理学模型理论。事实上, 这一新理论是由 Aifantis 建立的塑性变形的物理学的进一步扩展到非对称塑性力学。这一新的工作给我们能有一个简单物理学模型来理解涉及到塑性旋转的复杂的力学现象。因此, 在经典连续介质力学的框架中不可能求解的旋转带等问题, 可以利用本文所建议的新理论来求解。

**致谢** 作者非常感谢他们的导师杨桂通教授对此研究工作的大力支持和帮助。

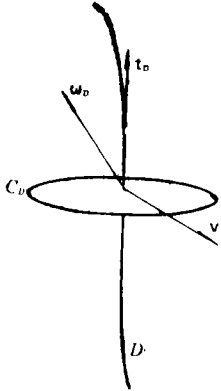


图 1

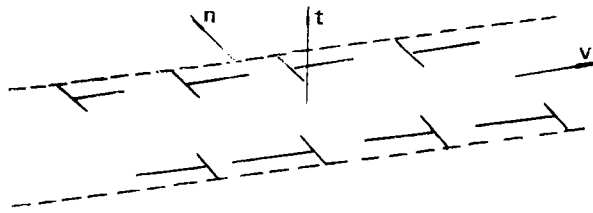


图2 变形带

## 附 录

### 附录 I

从方程(3.9), 得到解为:

$$j = \frac{1}{\beta e - d\delta} (eD_{n\nu}^{\rho} \nabla_n \rho + eD_{n\nu}^{\theta} \nabla_n \theta + (eD_{\nu n}^{\rho} - \delta C_{\nu n}^{\rho}) \nabla_n \rho + (eD_{\nu n}^{\theta} - \delta C_{\nu n}^{\theta}) \nabla_n \theta \\ \cdot \delta(D_{[\nu n] \rho}^{\rho} + D_{[\nu n] \theta}^{\theta}) (-ea - \delta a) + (e\gamma - \delta b)\tau + (e\xi - \delta f)\mu] \quad (A1.1)$$

$$J = \frac{1}{d\delta - \beta e} \{ (dD_{\nu n}^{\rho} - \beta C_{\nu n}^{\rho}) \nabla_n \rho + (dD_{\nu n}^{\theta} - \beta C_{\nu n}^{\theta}) \nabla_n \theta + dD_{n\nu}^{\rho} \nabla_n \rho + dD_{n\nu}^{\theta} \nabla_n \theta \\ - \beta (D_{[\nu n] \rho}^{\rho} + D_{[\nu n] \theta}^{\theta}) + (-da - \beta a) + (d\gamma - \beta b)\tau + (d\xi - \beta f)\mu \}$$

$$j_c = \frac{1}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} [e_c D_{n\nu}^{\rho} \nabla_n \rho + e_c D_{n\nu}^{\theta} \nabla_n \theta + (e_c D_{\nu n}^{\rho} - \delta_c C_{\nu n}^{\rho}) \nabla_n \rho \\ + (e_c D_{\nu n}^{\theta} - \delta_c C_{\nu n}^{\theta}) \nabla_n \theta \cdot \delta_c (D_{[\nu n] \rho}^{\rho} + D_{[\nu n] \theta}^{\theta}) (-e_c a_c - \delta_c a_c) \\ + (e_c \gamma_c - \delta_c b_c)\tau_c + (e_c \xi_c - \delta_c f_c)\mu_c]$$

$$J_c = \frac{1}{d_c \delta_c - \beta_c e_c} \{ (d_c D_{\nu n}^{\rho} - \beta_c C_{\nu n}^{\rho}) \nabla_n \rho + (d_c D_{\nu n}^{\theta} - \beta_c C_{\nu n}^{\theta}) \nabla_n \theta \\ + d_c (D_{\nu n}^{\rho} \nabla_n \rho + D_{\nu n}^{\theta} \nabla_n \theta) - \beta_c (D_{[\nu n] \rho}^{\rho} + D_{[\nu n] \theta}^{\theta}) + (-d_c a_c - \beta_c a_c) \\ + (d_c \gamma_c - \beta_c b_c)\tau_c + (d_c \xi_c - \beta_c f_c)\mu_c \}$$

当采用塑性变形不可压缩的条件, 得到:

$$e_c \gamma_a - \delta_c b_c = 0, \quad e_c \xi_c - \delta_c f_c = 0, \quad d_c \gamma_c - \beta_c b_c = 0, \quad d_c \xi_c - \beta_c f_c = 0 \quad (A1.2)$$

## 附录 II

从方程(3.11)给出的流矢量的定义, 得到:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} j = \nabla_v j + \nabla_n j_c = & -[A_{vv} \nabla_v^2 v + A_{nv} \nabla_n^2 v + A_{nn} \nabla_n^2 n + A_v \nabla_v + A_n \nabla_n] \rho \\ & - [B_{vv} \nabla_v^2 \vartheta + B_{nv} \nabla_n^2 \vartheta + B_{nn} \nabla_n^2 \vartheta + B_v \nabla_v + B_n \nabla_n] \vartheta \end{aligned} \quad (A2.1)$$

这里,

$$\begin{aligned} A_{vv} &= -\frac{e D_{vv}^{\rho} - \delta C_{vv}^{\rho}}{\beta e - d \delta}, \quad B_{vv} = -\frac{e D_{vv}^{\theta} - \delta C_{vv}^{\theta}}{\beta e - d \delta} \\ A_{nv} &= -\left\{ \frac{e D_{nv}^{\rho}}{\beta e - d \delta} + \frac{e_c D_{nv}^{\rho}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \right\}, \quad B_{nv} = -\left\{ \frac{e D_{nv}^{\theta}}{\beta e - d \delta} + \frac{e_c D_{nv}^{\theta}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \right\} \\ A_{nn} &= -\left\{ \frac{e_c D_{nn}^{\rho} - \delta_c C_{nn}^{\rho}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \right\}, \quad B_{nn} = -\left\{ \frac{e_c D_{nn}^{\theta} - \delta_c C_{nn}^{\theta}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \right\} \\ A_v &= \frac{\delta D_{[vn]}^{\rho}}{\beta e - d \delta}, \quad B_v = \frac{\delta D_{[vn]}^{\theta}}{\beta e - d \delta} \\ A_n &= \frac{\delta_c D_{[vn]}^{\rho}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c}, \quad B_n = \frac{\delta_c D_{[vn]}^{\theta}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \end{aligned}$$

同样, 我们可以求出

$$\begin{aligned} \operatorname{div} J = \nabla_v J + \nabla_n J_c = & -[C_{vv} \nabla_v^2 v + C_{nv} \nabla_n^2 v + C_{nn} \nabla_n^2 n + C_v \nabla_v + C_n \nabla_n] \rho \\ & - [D_{vv} \nabla_v^2 \vartheta + D_{nv} \nabla_n^2 \vartheta + D_{nn} \nabla_n^2 \vartheta + D_v \nabla_v + D_n \nabla_n] \vartheta \end{aligned} \quad (A2.2)$$

这里,

$$\begin{aligned} C_{vv} &= -\frac{d D_{vv}^{\rho} - \beta C_{vv}^{\rho}}{\beta e - d \delta}, \quad D_{vv} = -\frac{d D_{vv}^{\theta} - \beta C_{vv}^{\theta}}{\beta e - d \delta} \\ C_{nv} &= -\left\{ \frac{d D_{nv}^{\rho}}{\beta e - d \delta} + \frac{d_c D_{nv}^{\rho}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \right\}, \quad D_{nv} = -\left\{ \frac{d D_{nv}^{\theta}}{\beta e - d \delta} + \frac{d_c D_{nv}^{\theta}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \right\} \\ C_{nn} &= -\frac{d_c D_{nn}^{\rho} - \beta_c C_{nn}^{\rho}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c}, \quad D_{nn} = -\frac{d_c D_{nn}^{\theta} - \beta_c C_{nn}^{\theta}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \\ C_v &= \frac{\beta D_{[vn]}^{\rho}}{\beta e - d \delta}, \quad D_v = \frac{\beta D_{[vn]}^{\theta}}{\beta e - d \delta} \\ C_n &= \frac{\beta_c D_{[vn]}^{\rho}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c}, \quad D_n = \frac{\beta_c D_{[vn]}^{\theta}}{\beta_c e_c - d_c \delta_c} \end{aligned}$$

## 参 考 文 献

- [1] Aifantis, E. C., Physics of plastic deformation, *Int. J. Plasticity*, 3 (1987), 211—247.
- [2] Aifantis, E. C., On the dynamical origin of dislocation patterns, *Mater. Sci. Eng.*, 81(1986), 563—575.
- [3] Dewit, R., A view of the relation between the continuum theory of lattice defects and non-euclidean geometry in the linear approximation, *Int. J. Engng. Sci.*, 19(1981), 1475—1506.
- [4] Nowacki, J. P., Theory of disclination in elastic cosserat media, *Arch. Mech.*, 129(1977), 531—545.
- [5] Kleman, M., The General theory of disclinations, *Dislocations in Solids*, ed. by Nabarro, F. R. N., North-Holland Publishing Company, 5(1980), 243—297.
- [6] Shun-ichi Amari, Dualistic theory of non-riemannian material manifolds,

- Int. J. Engng. Sci.*, 19(1981), 1581—1584.
- [7] Marcinkowski, M. J. Dislocations and disclinations in a new light, *Arch. Mech.*, 42 (1977), 279—289.
- [8] Marcinkowski, M. J., The differential geometry of disclinations: Wedge dislocations, *Arch. Mech.*, 29(1977), 313—324.
- [9] Vladimirov, V. I. and A.A. Kusov, et al., Rotational model in slip channels without dislocations, *Phys. Met. Metall.*, 68(1989), 26—31.
- [10] Aifantis, E. C., and A. Ye. Romanov, Reaction-diffusion scheme for dislocation-disclination ensembles (to be published).
- [11] Lippmann, H., Eine cosserat-theorie des plastischen fließens, *Acta Mechanica*, 8(1969), 255—267.
- [12] Olesiak, Z. and M. Wagrowska, On shear and rotational yield conditions, *Arch. Mech.*, 37(1985), 147—155.
- [13] Vardoulakis, I., Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a cosserat continuum theory, *Ingenieur-archiv*, 59(1989), 106—113.
- [14] Muhlhaus, H. B. and I. Vardoulakis, The thickness of shear bands in granular materials, *Geotechnique*, 37(1987), 271—283.
- [15] Besdo, D., Ein Beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mechanica*, 20(1974), 105—116.

## A Physical Theory of Asymmetric Plasticity

Gao Jian Lin Xiao-ling

(Shandong University of Technology, Ji'nan 250000)

### Abstract

Experiments have shown the strong rotation in plastic deformation, which is caused by the disclination, specific arrangement of dislocation and inhomogeneity of the gliding motion of the defects in the microscopic scale. Based on the microscopic mechanism of the rotational plastic deformation, the conservation equation satisfied by the defects motion (dislocation and disclination) has been developed in this paper. Then, the diffusion motion of the defects is reduced based on the asymmetric theory of continuum mechanics. By utilizing the maximization procedure for the micro plastic work and a scale-invariance argument, various models of Cosserat-type plasticity are obtained in this manner.

**Key words** rotational plastic deformation, microscopic scale, disclination, dislocation.