应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

二阶向量椭圆型方程边值问题的内层现象*

许玉兴　张　祥

（安徽师范大学数学系，芜湖　241000）
（林宗池推荐，1994年7月4日收到）

摘　要

本文利用偏微分不等式理论，我们将研究奇摄动二阶向量椭圆型方程边值问题，并获得所述问题的内层现象的解的存在性及其渐近估计式．

关键词　奇摄动　向量椭圆方程　边值问题　上、下解　内部层

一、椭圆型方程边值问题解的存在性

利用偏微分不等式理论，很多作者研究了奇摄动标量椭圆型方程边值问题[1~7]．然而，对向量椭圆型边值问题的研究却很少．本文将借助文献[8～10]的方法，把标量问题的结果推广到如下向量椭圆边值问题(BVPS)：

$$\varepsilon\Delta y_i=f_i(x,y,\nabla y_i,\varepsilon),\ x\in\Omega\subset R^m \tag{1.1}$$

$$y_i(x,\varepsilon)=g_i(x),\ x\in\Gamma=\partial\Omega,\ i\in I=\{1,2,\cdots,n\} \tag{1.2}$$

其中　$\varepsilon>0$是小参数，Ω是R^m中的有界开区域，$\partial\Omega$是充分光滑的边界．

为了方便起见，假设存在光滑函数 $F(x)$ 使得$\Omega=\{x\in R^m;\ F(x)<0\}$，$\partial\Omega=\{x\in R^m;\ F(x)=0\}$，$\nabla F(x)\neq 0$，$x\in\Gamma$，$\nabla F(x)$ 是 Γ的外法向量．令J是包含在Ω中的光滑闭曲线，设$J=\{x\in\Omega;\ \Phi(x)=0\}$，$\nabla\Phi(x)\neq 0$，$x\in J$．曲线$J$分$\Omega$为两个非空不连通的开子集$\Omega_1$，$\Omega_2$．$\Omega_1=\{x\in\Omega,\ \Phi(x)<0\}$，$\Omega_2=\{x\in\Omega,\ \Phi(x)>0\}$，$\Omega=\Omega_1\cup J\cup\Omega_2$，$\Omega_1$远离 Γ．对给定的实数a，令$J^a=\{x\in\Omega:\ |x-J|\leqslant a\}$，$J^a$是围绕$J$的宽度为$2a$的带域．

为简单起见，令Ω是R^2的子集，在 J^a 中，我们引入局部坐标系统 (r,z)，其中 $r(x)=\pm|x-J|$，$r<0$，$x\in\Omega_1$，$r>0$，$x\in\Omega_2$，$z(x)$ 是从某个参考点沿着J 到J上最靠近x的点的弧长．由于$\Delta\Phi$沿着J不等于零，因此，根据连续性，对某个$d>0$，变换$x\to(r,z)$的 Jacobian 行列式在J^d中不等于零、故坐标变换在J^d中是双射．

为了研究BVP(1.1)，(1.2)，我们首先考虑如下边值问题的解的存在性．考虑

$$\Delta y_i=f_i(x)y,\nabla y_i),\ x\in\Omega\subset R^m \tag{1.3}$$

$$y_i(x)=g_i(x),\ x\in\Gamma,\ i\in I \tag{1.4}$$

定义　设Ω是R^m中的有界开子集，函数$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$分别称为 BVP (1.3)，(1.4)的下解和上解．若$\alpha(x)\leqslant\beta(x)$，$x\in\Omega$，且

* 国家自然科学基金资助项目．

(Ⅰ)　$\alpha,\beta\in C^2[\Omega_1\cup\Omega_2,R^n]$，$D_l\alpha(x)\leqslant D_r\alpha(x),D_l\beta(x)\geqslant D_r\beta(x),x\in J$，其中$D_l$和$D_r$分别表示从$J$的负$r(\Omega_1)$边和$J$的正$r(\Omega_2)$边关于$r$的导数.

(Ⅱ)　对每个$i\in I$，$\alpha_j\leqslant y_j\leqslant\beta_j,j\neq i$，成立下列等式：

$$\Delta\alpha_i\geqslant f_i(x,y_1,\cdots,y_{i-1},\alpha_i,y_{i+1},\cdots,y_n,\nabla\alpha_i),\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2$$

$$\Delta\beta_i\leqslant f_i(x,y_1,\cdots,y_{i-1},\beta_i,y_{i+1},\cdots,y_n,\nabla\beta_i),x\in\Omega_1\cup\Omega_2$$

在研究边值问题(1.1)，(1.2)的解的渐近性质时，我们所使用的主要工具是如下关于偏微分不等式的定理.

定理1　假设Ω满足前述条件，同时下列条件成立：

(A_1)　$f\in C^\mu[\bar{\Omega}\times R^n\times R^m,R^n]$，$g\in C^{1,\mu}[\partial\Omega,R^n],0<\mu<1,f_i(x,y,\nabla y_i)(i\in I)$关于$y_i$单调非减；

(A_2)　f满足 Nagumo 条件. 即，存在单调增函数ψ_i：$R^+\to R^+$ 使得 $|f_i(x,y,z)|\leqslant\psi_i(\|y\|)(1+\|z\|^2)$，$(x,y,z)\in\bar{\Omega}\times R^n\times R^m$；

(A_3)　存在(.13)的下解和上解函数$(\alpha(x),\beta(x))$满足$\alpha_i(x)\leqslant g_i(x)\leqslant\beta_i(x),x\in\partial\Omega,i\in I$. 则存在边值问题(1.3)，(1.4)的一个解$y=y(x)\in C^2[\bar{\Omega},R^n]$，且

$$\alpha_i(x)\leqslant y_i(x)\leqslant\beta_i(x),\ \alpha\in\bar{\Omega},\ i\in I \tag{1.5}$$

证　考虑如下修改的非线性边值问题：

$$\Delta y_i=F_i(x,y_i,\nabla y_i),\ x\in\Omega \tag{1.6}$$

$$y_i(x)=g_i(x),\ x\in\Gamma,\ i\in I \tag{1.7}$$

其中

$$F_i(x,y_i,\nabla y_i)=f_i(x,\chi_1,\cdots,\chi_{i-1},y_i,\chi_{i+1},\cdots,\chi_n,h(\nabla y_i)),i\in I, \tag{1.8}$$

$\chi_j(j\neq i)\in C^{1,\mu}[\bar{\Omega},R],\alpha_j(x)\leqslant\chi_j\leqslant\beta_j(x),x\in\bar{\Omega},h\in C^1[R^m,R^m],h(y)=y,\|y\|\leqslant N$；$\|h(y)\|\leqslant\lambda\|y\|,y\in R^m,h(R^m)$和$h_y(R^m)$有界，$h_y$表示$h$的Jacobian矩阵函数，$\lambda>1$，$N>\max\{\bar{N},\max\limits_{\bar{\Omega}}\|\alpha_x(x)\|,\ \max\limits_{\bar{\Omega}}\|\beta_x(x)\|\}$，$\bar{N}$是关于$\alpha$，$\beta$和$\Psi_i(i\in I)$的Nagumo常数.类似于文献[1]、[12]中相应定理的证明，我们可以证得问题(1.6)，(1.7)存在解 $y=y(x)\in C^{2,\mu}[\bar{\Omega},R^n]$，且满足$\alpha(x)\leqslant y(x)\leqslant\beta(x)$，$\|y_x(x)\|\leqslant N$，$x\in\Omega$. 在假设($A_1$)～($A_3$)下，利用 [11] 中的单调迭代方法可以类似地证得边值问题(1.3)，(1.4)存在解$y=y(x)\in C^2[\bar{\Omega},R^n]$，且 $\alpha(x)\leqslant y(x)\leqslant\beta(x)$，$x\in\bar{\Omega}$. 详细证明从略.

二、奇摄动问题内层现象解的估计

以下我们将应用定理1和[8～10]的技巧研究边值问题(1.1)，(1.2)具有不连续退化解的解的存在性及其渐近估计. 为简单起见，我们只讨论$n=m=2$的情况. 令(u,v)是如下退化问题(2.1)的解偶.

$$f_1(x,u,v,\nabla u,0)=0,\ f_2(x,u,v,\nabla v,0)=0,\ x\in\Omega \tag{2.1}$$

定理2　设Ω满足上述假设条件，且成立下列条件：

(B_1)　存在退化问题(2.1)的解偶(u_1,v_1)，(u_2,v_2) 满足 $(u_1,v_1)\in C^2[\bar{\Omega}_1,R^2]$，$(u_2,u_2)\in C^2[\bar{\Omega}_2,R^2]$，$u_2(x)=g_1(x),v_2(x)=g_2(x)$　$x\in\Gamma$；$u_1(x)>u_2(x)$，$v_1(x)>v_2(x),x\in J$；

(B_2)　$f_i(x,y_1,y_2,p_1,p_2,\varepsilon)$关于$x,\varepsilon$连续，关于$p_1,p_2$连续可微，$(x,y_1,y_2,p_1,p_2,\varepsilon)\in\Theta$，

$$\Theta=\{(x,y_1,y_2,p_1,p_2,\varepsilon):x\in\bar{\Omega},|y_1-u(x)|\leqslant d_1(x),$$

$|y_2-v(x)|\leqslant d_2(x),|p_i|<\infty,i=1,2,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$,

$\varepsilon_0>0$是小常数,$d_i(x)\,(i=1,2)$是光滑正函数，且$d_1(x)=u_1(x)-u_2(x)+\delta$, $x\in J$, $d_1(x)=\delta$, $x\in\bar{\Omega}-J^\delta$; $d_2(x)=v_2(x)-v_1(x)+\delta$, $x\in J$, $d_2(x)=\delta$, $x\in\bar{\Omega}-J^\delta$, $J^\delta=\{x\in\Omega;\ |x-J|\leqslant\delta\}$;

(B_3) 存在正常数$k_i,m_i(i=1,2)$使得在Θ中，

$$f_{iy_i}\geqslant k_i,\ i=1,2,\ |f_{1y_2}|\leqslant m_1,\ |f_{2y_1}|\leqslant m_2$$

(B_4)
$$(f_{1p_1},f_{1p_2})(x,u_1,v_1,\nabla u_1,\varepsilon)\cdot\nabla\Phi>0,\ x\in J^\delta\cap\bar{\Omega}_1$$
$$(f_{1p_1},f_{1p_2})(x,u_2,v_2,\nabla u_2,\varepsilon)\cdot\nabla\Phi<0,\ x\in J^\delta\cap\bar{\Omega}_2$$
$$(f_{2p_1},f_{2p_2})(x,u_1,v_1,\nabla v_1,\varepsilon)\cdot\nabla\Phi>0,\ x\in J^\delta\cap\bar{\Omega}_1$$
$$(f_{2p_1},f_{2p_2})(x,u_2,v_2,\nabla v_2,\varepsilon)\cdot\nabla\Phi<0,\ x\in J^\delta\cap\bar{\Omega}_2,$$

(B_5) 向量场$(f_{1p_1},f_{1p_2})(x,u_1,v_1,\nabla u_1,\varepsilon)$,$(f_{2p_1},f_{2p_2})(x,u_1,v_1,\nabla v_1,\varepsilon)$ 在Ω_1中不等于零且不改变符号，$(f_{1p_1},f_{1p_2})(x,u_2,v_2,\nabla u_2,\varepsilon)$和$(f_{2p_1},f_{2p_2})(x,u_2,v_2,\nabla v_2,\varepsilon)$在$\Omega_2$中不等于零且不改变符号;

(B_6) $f_i(i=1,2)$满足Nagumo条件;

(B_7)
$$f_1(x,u_i,v_i,\nabla u_i,\varepsilon)=O(\varepsilon),x\in\Omega_i,\ i=1,2$$
$$f_2(x,u_i,v_i,\nabla u_i,\varepsilon)=O(\varepsilon),\ x\in\Omega_i,\ i=1,2$$

则对ε充分小，存在边值问题(1.1)，(1.2)的解$y=y(x,\varepsilon)=(y_1(x,\varepsilon),y_2(x,\varepsilon))$，且满足

$$y_1(x,\varepsilon)=\begin{cases}u_1(x)+\bar{\xi}_1(x,\varepsilon)+O(\varepsilon) & (x\in\Omega_1)\\ u_2(x)+\bar{\xi}_2(x,\varepsilon)+O(\varepsilon) & (x\in\Omega_2)\end{cases}\tag{2.2}$$

$$y_2(x,\varepsilon)=\begin{cases}v_1(x)+\chi_1(x,\varepsilon)+O(\varepsilon) & (x\in\Omega_1)\\ v_2(x)+\chi_2(x,\varepsilon)+O(\varepsilon) & (x\in\Omega_2)\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $\bar{\xi}_i,\chi_i(i=1,2)$是待定的内部层校正函数.

证 证明的主要思想是构造满足定理1的上、下解函数．假设δ适当小，J^δ完全包含在Ω中．从假设(B_5)知，存在常向量$\nu=(\nu_1,\nu_2)$满足

$$\begin{aligned}&(f_{1p_1},f_{1p_2})(x,u,v,\nabla u,\varepsilon)\cdot\nu>1\,(<-1),\ x\in\Omega_1(\Omega_2)\\&(f_{2p_1},f_{2p_2})(x,u,v,\nabla v,\varepsilon)\cdot\nu>1\,(<-1),\ x\in\Omega_1(\Omega_2)\end{aligned}\tag{2.4}$$

为记号简单起见，令$h(x)=\nu_1x_1+\nu_2x_2$，则$\nu=\nabla h$.

对于y_1，我们定义α_1，β_1如下:

$$\alpha_1(x,\varepsilon)=\begin{cases}u_2(x)-\bar{\varphi}_1(x,\varepsilon)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)],\ x\in\Omega_2\\ u_1(x)-\bar{\xi}_1(x,\varepsilon)-\bar{\varphi}_2(x,\varepsilon)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)],\ x\in\bar{\Omega}_1\end{cases}$$

$$\beta_1(x,\varepsilon)=\begin{cases}u_2(x)+\bar{\xi}_2(x,\varepsilon)+\bar{\varphi}_1(x,\varepsilon)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)],\ x\in\Omega_2\\ u_1(x)+\bar{\varphi}_2(x,\varepsilon)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)],\ x\in\bar{\Omega}_1\end{cases}$$

其中 γ是待定正常数，$\lambda>\max\{m_1,m_2\}$，$\bar{\varphi}_1(x,\varepsilon)=\bar{\omega}(r)\psi_1(r,\varepsilon),x\in J^\delta,0\leqslant r\leqslant\delta,\bar{\varphi}_1(x,\varepsilon)=0$, $x\in\Omega_2-J^\delta$, $\bar{\varphi}_2(x,\varepsilon)=\bar{\omega}(r)\psi_2(x,\varepsilon)$, $x\in J^\delta,-\delta\leqslant r\leqslant0$, $\bar{\varphi}_2(x,\varepsilon)=0$, $x\in\Omega_1-J^\delta$, $\bar{\omega}(r)$是满足条件：$\bar{\omega}(r)=1$, $|r|\leqslant3\delta/4$, $\bar{\omega}(r)=0$, $|r|\geqslant4\delta/5$, $0\leqslant\bar{\omega}\leqslant1$, $|r|\leqslant\delta$的C^2截断函数，$\psi_i(i=1,2)$是满足$\psi_i=O(\varepsilon)$, $\psi_{ir}=O(1)>0$ 的待定正函数、$\bar{\xi}_1(x,\varepsilon)=\omega(r)\zeta_1(r,\varepsilon)$, $x\in J^\delta$, $0\leqslant r\leqslant\delta$, $\bar{\xi}_1(x,\varepsilon)=0$, $x\in\Omega_2-J^\delta$; $\bar{\xi}_2(x,\varepsilon)=\omega(r)\zeta_2(r,\varepsilon),x\in J^\delta,-\delta\leqslant r\leqslant0$, $\bar{\xi}_2(x,\varepsilon)=0$,

$x\in\Omega_1-J^\delta$，$\omega(r)$是满足$\omega(r)=1$，$|r|\leqslant\delta/2$，$\omega(r)=0$，$|r|\geqslant 3\delta/4$，$0\leqslant\omega\leqslant1$，$|r|\leqslant\delta$ 的C^2截断函数，$\zeta_i(i=1,2)$满足

$$\begin{cases}\varepsilon\zeta_{1rr}-l_1\zeta_{1r}=-\kappa_1\zeta_{1r},\\ \zeta_1(0,\varepsilon)=\max(u_1(0,z)-u_2(0,z)),\zeta_1>0\\ \zeta_{1r}(0,\varepsilon)>0,\lim\limits_{\varepsilon\to0}\zeta_{1r}(0,\varepsilon)=\infty\\ \zeta_1\to0\text{当}r<0,\varepsilon\to0,\text{以指数形式}\end{cases}\tag{2.5}$$

$$\begin{cases}\varepsilon\zeta_{2rr}+l_2\zeta_{2r}=\kappa_2\zeta_{2r}\\ \zeta_2(0,\varepsilon)=\max(u_1(0,z)-u_2(0,z)),\ \zeta_2>0\\ \zeta_{2r}<0,\ \lim\limits_{\varepsilon\to0}\zeta_{2r}(0,\varepsilon)=-\infty\\ \zeta_2\to0\text{当}r>0,\ \varepsilon\to0,\text{以指数形式.}\end{cases}\tag{2.6}$$

其中 $l_i(i=1,2)$是从(B_4)，(B_6) 选择的正常数，且满足$(f_{1p_1},f_{1p_2})(x,u,v,\nabla u,\varepsilon)\cdot(\partial t/\partial x_1,\partial t/\partial x_2)\geqslant l_1(\leqslant-l_2)$，$x\in J^\delta\cap\Omega_1(J^\delta\cap\Omega_2)$，$(f_{2p_1},f_{2p_2})(x,u,v,\nabla v,\varepsilon)\cdot(\partial t/\partial x_1,\partial t/\partial x_2)\geqslant l_1(\leqslant-l_2)$，$x\in J^\delta\cap\Omega_1(J^\delta\cap\Omega_2)$，$\kappa_i(i=1,2)$是小于$l_i$的小正常数。

从α_1，β_1的构造，显然有$\alpha_1(x,\varepsilon)\leqslant\beta_1(x,\varepsilon)$，$x\in\bar{\Omega}$，$\alpha_1(x)\leqslant g_1(x)\leqslant\beta_1(x,\varepsilon)$，$x\in\Gamma$。由于$\alpha_1,\beta_1$沿着$J$有不连续的梯度，故$\alpha_1,\beta_1$在$\Omega$中不是$C^2$的。然而，沿着$J$，我们有，对$\varepsilon$充分小

$$\begin{aligned}D_l\alpha_1(0,z,\varepsilon)&=D_lu_1(0,z)-\zeta_{1r}(0,\varepsilon)+O(\varepsilon)\\&<D_ru_2(0,z)+O(\varepsilon)=D_r\alpha_1(0,z,\varepsilon)\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}D_l\beta_1(0,z,\varepsilon)&=D_lu_1(0,z)+O(\varepsilon)\\&>D_ru_2(0,z)+\zeta_{2r}(0,\varepsilon)+O(\varepsilon)=D_r\beta_1(0,z,\varepsilon)\end{aligned}\tag{2.8}$$

因此，沿着J，α_1，β_1满足适当的微分不等式。

现在我们证明α_1,β_1是问题(1.1)在$\Omega_1\cup\Omega_2$中的下解和上解。类似于 Kelley[8] 的证明，假设y_2满足

$$\begin{aligned}&v_2(x)-\chi(x,\varepsilon)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]-O(\varepsilon)\leqslant y_2\\&\leqslant v_2(x)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon),\ x\in\Omega_2\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}&v_1(x)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]-O(\varepsilon)\leqslant y_2\\&\leqslant v_1(x)+\overline{\chi}_2(x,\varepsilon)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon),\ x\in\Omega_1\end{aligned}\tag{2.10}$$

其中 $O(\varepsilon)(>0)$与λ，γ无关，χ_i满足ζ_i满足的条件和方程，其中用$\chi_1(0,\varepsilon)=\max(v_2(0,z)-v_1(0,z))$，$\chi_2(0,\varepsilon)=\max(v_2(0,z)-v_1(0,z))$分别代替(2.5)，(2.6) 中相应的式子。

我们首先证明α_1是$\Omega-J^{3\delta/4}$中的下解。此时，$\bar{\rho}_i=\bar{\zeta}_i=\bar{\chi}_i=0(i=1,2)$，即

$$\alpha_1(x,\varepsilon)=u(x)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]\qquad(x\in\Omega-J^{3\delta/4})\tag{2.11}$$

$$v(x)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]-O(\varepsilon)\leqslant y_2\leqslant v(x)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon),\quad x\in\Omega-J^{3\delta/4}\tag{2.12}$$

由于 $\Delta u=[r_{x_1}^2+r_{x_2}^2]u_{rr}+[z_{x_1}^2+z_{x_2}^2]u_{zz}+[r_{x_1x_2}+r_{x_2x_2}]u_r+[z_{x_1x_1}+z_{x_2x_2}]u_z$，$r_{x_1}+r_{x_2}=1$，$\nabla r\cdot\nabla z=0$。令$\Lambda=(r_{x_1x_1}+r_{x_2x_2})$，利用中值定理，我们有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Delta\alpha_1-f_1(x,\alpha_1,y_2,\nabla\alpha_1,\varepsilon)\\&\geqslant\varepsilon\Delta u-\varepsilon^2\gamma\Delta\exp[\lambda h(x)]-f_1(x,u,v,\nabla u,\varepsilon)+k_1\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]\\&\quad-m_1\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]+\varepsilon\gamma\lambda\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)\\&\geqslant\varepsilon\gamma(k_1+\lambda-m_1)\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{2.13}$$

其中 $O(\varepsilon)$与λ，γ无关．因此，当$\lambda>m_1k_1$，γ足够大和ε充分小，我们(2.13)式大于等于零．余下的是要证明α_1，β_1在$J^{3\delta/4}-J$中满足适当的微分不等式．

下面在$J^{\delta/2}\cap\Omega_2$中考虑函数α_1，我们有

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\Delta\alpha_1-f_1(x,\alpha_1,y_2,\nabla\alpha_1,\varepsilon)\\
&\quad=\varepsilon\Delta u_2-\varepsilon\psi_{1rr}-\varepsilon\Lambda\psi_{1r}-\varepsilon^2\gamma\Delta\exp[\lambda h(x)]-f_1(x,u_2,v_2,\nabla u_2,\varepsilon)\\
&\qquad+k_1(\psi_1+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)])-m_1(\chi_1+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)])\\
&\qquad+l_2\psi_{1r}+\varepsilon\gamma\lambda\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)\\
&\quad\geqslant-(\varepsilon\psi_{1rr}-l_2\psi_{1r}+m_1\chi_1)+\varepsilon\gamma(k_1+\lambda-m_1)\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}\tag{2.14}$$

我们定义ψ_1如下：

$$\psi_1(r,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^{r/\varepsilon}\exp[l_2\tau]\int_\tau^\infty\exp[-l_2s]m_1\chi_1(s,\varepsilon)dsd\tau\qquad(0\leqslant r\leqslant\delta)\tag{2.15}$$

从ψ_1的定义和 Fubini-Tonelli 定理可以证明 ψ_1 满足 $\varepsilon\psi_{1rr}-l_2\psi_{1r}+m_1\chi_1=0$，$\psi_1$，$\psi_{1r}>0$，$\psi_1=O(\varepsilon)$，$\psi_{1r}=O(1)>0$．因此，对$\gamma$足够大和$\varepsilon$充分小，我们有(2.14)式大于或等于零．

在$J^{\delta/2}\cap\Omega_1$中，从条件(2.5)和中值定理，则得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\Delta\alpha_1-f_1(x,\alpha_1,y_2,\nabla\alpha_1,\varepsilon)\\
&\quad\geqslant-\varepsilon\zeta_{1rr}-\varepsilon\Lambda\zeta_{1r}-\varepsilon\psi_{2rr}+k_1(\zeta_1+\psi_2+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)])\\
&\qquad-m_1(\chi_2+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)])+l_1(\zeta_{1r}+\psi_{2r})\\
&\qquad+\varepsilon\lambda\gamma\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)+O(\varepsilon^2)\\
&\quad\geqslant\kappa_1\zeta_{1r}-\varepsilon\Lambda\zeta_{1r}-(\varepsilon\psi_{2rr}-l_1\psi_{2r}+m_1\chi_2)\\
&\qquad+\varepsilon\gamma k_1\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}\tag{2.16}$$

其中我们定义

$$\psi_2(r,\varepsilon)=\varepsilon\int_{-\infty}^{r/\varepsilon}\exp[l_1\tau]\int_\tau^0\exp[-l_1s]m_1\chi_2(s,\varepsilon)dsd\tau\quad(-\delta\leqslant r\leqslant0)$$

注意到ψ_2满足方程$\varepsilon\psi_{2rr}-l_1\psi_{2r}+m_1\chi_2=0$．由于$\chi_2\in L_1(0,\infty)$，利用Fubini-Tonelli定理可以证明 $\psi_{2r}\in L_1[0,\infty)$，$\psi_2=O(\varepsilon)$，$\psi_2$，$\psi_{2r}$非负．由于(2.16) 中正项$\kappa_1\zeta_{1r}$ 在内层是主要项，(2.16)中的$\varepsilon\gamma k_1\exp[\lambda h(x)]$在外部层是主要项．因此，通过选择充分大的 γ 和足够 α 的 ε，我们有(2.16)是非负的．

现在考虑内部中间区域$J^{3\delta/4}-J^{\delta/2}$．由于$\zeta_i$，$\chi_i$是当 $\varepsilon\to0$ 时的指数小项，类似于先前的计算，我们可以证明α_1满足需要的不等式．从略．

下面证明β_1是y_1在$\Omega_1\cup\Omega_2$中的上解，用类似于对α_1的证明，通过选择足够大的 γ 和充分小的ε，我们可以证明$\varepsilon\Delta\beta_1-f_1(x,\beta_1,y_2,\nabla\beta_1,\varepsilon)$在$\Omega_1u\Omega_2$中小于或等于零．

最后，对y_2在Ω中构造上、下解，假设

$$\begin{aligned}
&u_2(x)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]-O(\varepsilon)\leqslant y_1\\
&\quad\leqslant u_2(x)+\bar{\xi}_2(x)\varepsilon)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)\qquad(x\in\Omega_2)
\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
&u_1(x)-\xi_1(x,\varepsilon)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]-O(\varepsilon)\leqslant y_2\\
&\quad\leqslant u_1(x)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)]+O(\varepsilon)\qquad(x\in\Omega_1)
\end{aligned}\tag{2.18}$$

令

$$\alpha_2(x,\varepsilon)=\begin{cases}v_2(x)-\xi_1(x,\varepsilon)-\bar{\psi}_3(x,\varepsilon)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)] & (x\in\Omega_2)\\ v_1(x)-\bar{\psi}_4(x,\varepsilon)-\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)] & (x\in\bar{\Omega}_1)\end{cases}$$

$$\beta_2(x,\varepsilon)=\begin{cases} v_2(x)+\bar{\varphi}_3(x,\varepsilon)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)] & (x\in\Omega_2) \\ v_1(x)+\chi_2(x,\varepsilon)+\bar{\varphi}_4(x,\varepsilon)+\varepsilon\gamma\exp[\lambda h(x)], & x\in\bar{\Omega}_1 \end{cases}$$

其中 $O(\varepsilon)$与γ无关，$\bar{\varphi}_3$，$\bar{\varphi}_4$是满足下式的光滑正$O(\varepsilon)$函数：

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_3(x,\varepsilon)=\bar{\omega}\psi_3 \quad (x\in J^\delta\cap\Omega_2); \quad \bar{\varphi}_3=0 \quad (x\in\Omega_2-J^\delta) \\ \psi_3(r,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^{r/\varepsilon}\exp[l_2\tau]\int_\tau^\infty\exp[-l_2s]m_2\zeta_2(s,\varepsilon)dsd\tau \quad (0\leqslant r\leqslant\delta) \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_4(x,\varepsilon)=\bar{\omega}\psi_4 \quad (x\in J^\delta\cap\Omega_2); \quad \bar{\varphi}_4=0 \quad (x\in\Omega_1-J^\delta) \\ \psi_4(r,\varepsilon)=\varepsilon\int_{-\infty}^{r/\varepsilon}\exp[l_1\tau]\int_\tau^0\exp[-l_1s]m_1\zeta_1(s,\varepsilon)dsd\tau \quad (-\delta\leqslant r\leqslant 0) \end{cases} \tag{2.20}$$

对于充分小的ε，α_2，β_2满足定理1所需要的关系的证明类似于先前关于α_1，β_1的证明。详细证明从略。

综上所述，我们可以断定存在问题(1.1)，(1.2)的解$y=y(x,\varepsilon)$，使得(2.2)，(2.3)式成立，这就完成了定理的证明。

参 考 文 献

[1] DeSanti, A. J., Boundary and interior layer behavior of solutions of singularly perturbed sermilinear elliptic boundary value problems, *J. Math. Pures et Appl.*, 65(3)(1986), 227—262.

[2] Howes, F. A., Perturbed boundary value problems whose reduced solutions are nonsmooth, *Indiana Univ. Math. J.*, 30(2)(1981), 267—280.

[3] Howes, F. A., Some models of shock-boundary layer interactions, *J. Math. Anal. Appl.*, 138(1989), 199—208

[4] 江福汝、高汝熹，退化算子具有奇点的一类二阶椭圆型方程奇摄动问题，数学年刊，11(3/4)，(1980)，387—397.

[5] 林宗池，极限方程是退缩椭圆型方程的三阶偏微分方程边值问题的奇摄动，数学学报，35(2)(1992)，257—261.

[6] 莫嘉琪，一类半线性椭圆型方程 Dirichlet 问题的奇摄动，数学物理学报，7(4)(1987)，395—401.

[7] 张祥，一类拟线性椭圆型方程 Robin 问题的奇摄动，数学物理学报，11(2)(1991)，198—204.

[8] Kelley, W. G., Existence and uniqueness of solutions for vector problems containing small parameters, *J. Math. Anal. Appl.*, 131(1988), 295—312.

[9] 张祥，奇摄动向量问题的边界层和内层现象，应用数学和力学，11(11)(1990)，1067—1074.

[10] 张祥，具有转向点的非线性向量问题的奇摄动，应用数学，4(3)(1991)，56—62.

[11] Ladde, G. S., V. Lakshmikantham and A. S., Vatsala, Existence of coupled quasilinears of systems of nonlinear elliptic boumdary value problems, *Nonlinear Analysis*, 8(5) (1984), 501—515.

[12] Schmitt, K., Boundary value problems for quasilinear second order elliptic equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 21(1972), 979—1000.

Interior Layer Behavior of Boundary Value Problems for Second Order Vector Equation of Elliptic Type

Xu Yu-xing   Zhang Xiang

(Anhui Normal University, Wuhu 241000)

Abstract

In this paper, making use of the theory of partial differential inequalities, we will investigate the boundary value problems for a class of singularly perturbed second order vector elliptic equations, and obtain the existence and asymptotic estimation of solutions, involving the interion layer behavior, of the problems described above.

Key words singular perturbation, vector elliptic equation, boundary value problem, upper and lower solutions, interior layer