

# 一类椭圆型变分不等式离散问题的迭代算法\*

郑铁生 李立 许庆余

(西安交通大学工程力学系 西安 710049)

(何友声推荐, 1994年7月29日收到)

## 摘 要

根据一类椭圆型变分不等式离散问题所具有的非线性特征, 提出了一种简明快速的迭代算法. 该方法在解决障碍问题及流体润滑油膜破裂自然边值问题等工程应用问题时具有较高的效率.

**关键词** 变分不等式 迭代方法 流体润滑

## 一、引 言

在工程应用中存在着相当一类非线性问题, 这些问题可以用关于椭圆算子及障碍容许函数的凸集变分不等方程来描述. 例如, 薄膜障碍、弹性接触、弹塑性杆自由扭转、流体润滑、多孔介质定常渗流等问题. 在这些问题中, 尽管控制方程是由线性椭圆算子所决定, 但由于解被限制在Banach空间的某一子凸集而非子空间上, 这就使得其相应的变分原理表现为一种非线性的变分不等方程. 有些情况, 例如具有Reynolds边界条件的流体润滑问题, 原始问题可描述为自由边值问题, 即控制方程仅在算子定义域 $\Omega$ 的某个子域 $\Omega \setminus I$ 内成立, 而在子域 $I$ 内解应满足一定的限制条件, 自由边界 $\partial I \cap \Omega$ 预先并不知道, 需要随问题的解一同求出. 有趣的是自由边值问题与变分不等方程有着本质上的联系, 它的变分原理正是由变分不等方程所描述.

对于连续变分不等方程, 一般需要用数值方法进行求解. 首先把连续问题离散化, 形成有限维代数不等方程组, 差分法和有限元法是常用的离散化方法. 由于有限元方法可根据场函数的需要而疏密有致地、自如地布置节点, 并可处理复杂区域形状及便于编制通用程序等优点, 使其在结构变分不等式问题中获得了广泛的应用.

有限维代数不等方程与约束二次规划问题有着相似的数学特性, 因此采用最优化问题的数值方法来求解离散化的变分代数不等方程应是一条自然途径. 然而源于椭圆型变分不等方程的有限元数值解问题, 由于其自身的特点使得相应的有限维代数不等方程组, 与一般规划问题相比, 系数矩阵具有正定、高阶、稀疏、带状等特点. 正因为如此, 对于离散变分不等

\* 国家自然科学基金8.5重点课题资助项目

方程, 往往不采用数学规化方法, 而是把普通变分有限元方程的解法加以改造使之适应于有限维代数不等方程. 投影点松弛法和块松弛法是经典的且至今仍广泛应用的重要方法, 此外修正的共轭梯度法<sup>[1]</sup>, 多重网格法<sup>[2,3]</sup>等也在离散变分方程的求解中得到了应用. 本文针对离散变分不等方程所具有的互补特性, 提出了一种约束迭代方法. 实际计算表明, 这种方法收敛较快, 在工程应用中不失为一种实用有效的算法.

## 二、变分不等方程的有限元离散

设  $V$  是自反 Hilbert 空间,  $K$  是  $V$  中非空闭凸集,  $a(u, v)$  是  $V \times V$  上的强制对称椭圆双线性型,  $f \in V^*$ . 求  $u \in K$ , 使

$$a(u, v-u) \geq f(v-u), \quad \forall v \in K \quad (2.1)$$

上述变分不等方程等价于极小化问题: 求  $u \in K$ , 使

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) = \min_{v \in K} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) - f(v) \right] \quad (2.2)$$

这一问题与普通变分原理的差别在于  $K$  是  $V$  中的子集而非子空间, 事实上, 当  $K$  为  $V$  的子空间时有<sup>[4]</sup>

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in K$$

这就是普通的变分方程.

问题 1 源于许多工程应用问题. 例如在区域  $\Omega$  上障碍物表面的弹性膜, 障碍物表面方程为  $z = \psi(x, y)$ ,  $\psi(x, y) \leq 0$  于边界  $\partial\Omega$  上. 对此问题

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \psi \text{ 于 } \Omega \text{ 内}\}$$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy, \quad f(v) = \iint_{\Omega} f v dx dy$$

这里  $V = H_0^1(\Omega)$  是 Sobolev 空间<sup>[5]</sup>,  $v \geq \psi$  表示薄膜必须处于障碍物之上. 又如具有雷诺边界条件的流体润滑问题, 我们有

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq 0 \text{ 于 } \Omega \text{ 内}\}$$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

这里  $v \geq 0$  表示油膜表压不得小于零, 当出现负压时油膜破裂, 这就形成了自由边界问题.

对问题 (2.1) 作有限元逼近, 单元剖分为  $\omega_h; \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ , 要求  $i \neq j$  时, 单元  $\Omega_i$  与  $\Omega_j$  或不相交或有公共节点或有整条公共边. 命  $\Sigma_h$  为所有节点之集合,  $P_n$  为  $n$  次多项式之集合. 定义有限维空间  $V_h$  及其子集  $K_h$  如下

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h = 0 \text{ 于 } \partial\Omega, v_h \in P_n \text{ 于 } \Omega_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$K_h = \{v_h \in V_h; v_h \geq \psi \text{ 于 } \Sigma_h\}$$

于是可提出问题 1 的有限元问题: 求  $u_h \in K_h$ , 使

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq f(v_h - u_h), \quad \forall v_h \in K_h \quad (2.3)$$

应该指出,  $K_h$  未必是  $K$  的子集, 因为  $K_h$  仅要求在节点上满足  $v_h \geq \psi$ , 显然这并不能保证在单元内部  $v_h \geq \psi$  也能成立. 例如当  $\psi = 0$  时, 对线性元  $K_h \subset K$  总能成立, 但对二次元, 基函数并非总是非负, 因而  $K_h \subset K$  不再成立. 相应的二次元的误差阶为<sup>[6]</sup>

$$\|u - u_h\| = O(h^{1.6-\epsilon})$$

其中 $c > 0$ 。这与普通的变分有限元方法不同，当采用高次元时逼近阶的提高也很有限，因此在变分不等式有限元法中广泛使用的是线性元。

设 $\{\phi\} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$  是有限元基函数向量， $\{v\} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T \in R^n$ ，易知 $V_h$ 是 $n$ 维的， $v_h \in V_h$ 可表为

$$v_h = \sum_{i=1}^n v_i \phi_i = \{\phi\}^T \{v\} \quad (2.4)$$

由此易推知 $V_h$ 与 $R^n$ 同构，与 $K_h$ 对应的是 $R^n$ 中的闭凸集

$$K_n = \{\{v\} \in R^n; v_i \geq \psi_i, i=1, 2, \dots, n\}$$

其中 $\psi_i$ 为 $\psi$ 在节点 $i$ 上的值( $i=1, 2, \dots, n$ )。

把(2.4)式代入(2.3)式，可得如下 $n$ 阶离散不等方程：

求 $\{u\} \in K_n$ ，使

$$\{\{v\} - \{u\}\}^T [A] \{u\} \geq \{\{v\} - \{u\}\}^T \{f\}, \quad \forall \{v\} \in K_n \quad (2.5)$$

其中 $[A] \in R^{n \times n}$ ， $\{f\} \in R^n$ ，它们的元素分别为

$$a_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad f_i = f(\phi_i) \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

### 三、离散变分不等方程的约束迭代法

为叙述简便起见设 $\psi=0$ ，此时有

$$K_n = \{\{v\} \in R^n; \{v\} \geq 0\} \quad (3.1)$$

它是 $n$ 维非负向量之集合。 $\{v\} \geq 0$ 是指 $v_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n$ ，这样的向量称为非负向量。为了给出迭代过程，首先需要给出解的形式上的表达。为此引入离散变分不等方程(2.5)的互补性质：

设 $\{u\} \in K_n$ 是不等方程(2.5)的解，则存在 $\{q\} \in K_n$ ，使得

$$[A] \{u\} - \{f\} = \{q\}, \quad \{u\}^T \{q\} = 0 \quad (3.2)$$

证明 由 $K_n$ 的凸性，不难得出 $\{u\}, \{v\} \in K_n$ ，则 $\{u\} + \{v\} \in K_n$ 。于是在(2.5)式中以 $\{u\} + \{v\}$ 代替 $\{v\}$ 则有

$$\{\{v\} + \{u\}\}^T ([A] \{u\} - \{f\}) \geq 0, \quad \forall \{v\} \in K_n$$

因 $\{u\} \in K_n$ ，由上式当然有

$$\{u\}^T ([A] \{u\} - \{f\}) \geq 0 \quad (3.3)$$

另一方面，以 $\{v\} = 0 \in K_n$ 代入(2.5)式，又成立着

$$-\{u\}^T [A] \{u\} \geq -\{u\}^T \{f\}$$

即

$$\{u\}^T ([A] \{u\} - \{f\}) \leq 0 \quad (3.4)$$

综合(3.3)、(3.4)二式即可得(3.2)式。为了证明 $\{q\} \in K_n$ ，只需注意到 $\{e_i\} \in K_n$ ，因此

$$\{e_i\}^T \{q\} = q_i \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

即 $0 \leq \{q\} \in K_n$ 。

从 $\{u\} \geq 0, \{q\} \geq 0$ 及 $\{u\}^T \{q\} = 0$ 可以看出，对 $i=1, 2, \dots, n$ ， $u_i > 0$ 和 $q_i > 0$ 不能同时成立，因此可以把下标集合

$$I = \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.5)$$

分解为

$$I = I_a \cup I_b \quad (3.6)$$

其中  $I_a = \{i \in I; u_i > 0\}$ ,  $I_b = \{i \in I; u_i = 0\}$ . 显然按此指标集分解必有

$$\left. \begin{array}{l} u_i > 0, q_i = 0 \quad \forall i \in I_a \\ u_i = 0, q_i \geq 0 \quad \forall i \in I_b \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

于是存在初等变换矩阵  $[P]$  使得

$$\left. \begin{array}{l} [P][\{u\}, \{q\}, \{f\}] = \left[ \begin{array}{c} \{u_a\} \\ 0 \\ \{q_b\} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \{f_b\} \end{array} \right] \\ [P][A][P]^T = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

在此初等变换下(3.2)式成为

$$\begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_a \\ f_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_b \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

由上式可解得

$$\{u_a\} = [A_{aa}]^{-1}\{f_a\}, \{q_b\} = [A_{ba}]\{u_a\} - \{f_b\} \quad (3.10)$$

(3.10)式形式上给出了离散变分不等方程的解. 从推导过程可以看出, 对指标集根据(3.6)式的任何一种分解, 所求得的结果都能自动满足(3.2)式的必要条件. 因此求解的关键在于找出一个正确的指标集分解, 以确保  $\{u_a\} > 0$  和  $\{q_b\} \geq 0$  同时成立, 这一点可以通过迭代加以实现. 迭代的基本原则是, 对于  $I$  的某一分解式(3.6), 当求得的解不能满足  $\{u_a\} > 0$  和  $\{q_b\} \geq 0$  时, 则对  $I$  的这一分解进行修正. 修正的原则是,  $\{u_a\}$  中非正元素的下标应从  $I_a$  中剔除划归  $I_b$ , 同样  $\{q_b\}$  中负元素的下标应从  $I_b$  中剔除划归  $I_a$ .

注意到有限元法所得到的系数矩阵所具有的稀疏、带状和对称的特点,  $[A]$  矩阵一般采用一维压缩存储形式. 为了不破坏  $[A]$  的上述特点, 具体求解时并不采用初等变换改变  $[A]$  的结构, 而是对方程(3.2)进行约束处理. 即对  $[A]$  和  $\{f\}$  进行约束形成  $[\tilde{A}]$  和  $\{\tilde{f}\}$ , 对应关系为

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{a}_{ij} = a_{ij} \quad \text{当 } i, j \in I_a \\ \tilde{a}_{ii} = 1 \quad \text{当 } i \in I_b \\ \tilde{a}_{ij} = 0 \quad \text{其它} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{f}_i = f_i \quad \text{当 } i \in I_a \\ \tilde{f}_i = 0 \quad \text{当 } i \in I_b \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

按此约束形式, 对应于(3.9)式的解可写作

$$\{u\} = [\tilde{A}]^{-1}\{\tilde{f}\}, \{q\} = [A]\{u\} - \{f\} \quad (3.13)$$

由(3.11)和(3.12)式, 不难得出

$$[P][\tilde{A}][P]^T = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, [P]\{\tilde{f}\} = \begin{Bmatrix} f_a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

因此(3.13)式表示的  $\{u\}$  和  $\{q\}$  满足

$$[P]\{u\} = \begin{Bmatrix} u_a \\ 0 \end{Bmatrix}, [P]\{q\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q_b \end{Bmatrix}$$

因为初等变换矩阵满足  $[P]^T[P] = [I]$ , 所以有  $\{u\}^T\{q\} = 0$ . 可见  $\{u\}$ ,  $\{q\}$  是 (3.2) 式的解, 从而可得出求  $\{u\} \geq 0$  和  $\{q\} \geq 0$  的迭代算法如下:

- 1) 对指标集  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  作初始分解:  
 $I = I_a^1 \cup I_b^1$ , 取  $I_a^1 = I, I_b^1 = \phi$  (空集)
- 2) 置  $k := 1$ , 进行迭代:
  - ① 按 (3.11) 和 (3.12) 式形成  $[\tilde{A}]$  和  $\{\tilde{f}\}$ ;
  - ② 解方程  $[\tilde{A}]\{u^k\} = \{\tilde{f}\}$  求得  $\{u^k\}$ ;
  - ③ 计算  $\{q^k\} = [A]\{u^k\} - \{f\}$ ;
  - ④ 若满足  $\{u^k\} \geq 0$  和  $\{q^k\} \geq 0$  转 3);
  - ⑤ 置  $k := k + 1$ , 对指标集  $I$  重新分解  $I = I_a^k \cup I_b^k$   
 $I_a^k = \{i \in I; u_i^{k-1} > 0 \text{ 或 } q_i^{k-1} < 0\}$   
 $I_b^k = \{i \in I; u_i^{k-1} \leq 0 \text{ 或 } q_i^{k-1} \geq 0\}$ . 转 ①
- 3) 结束迭代, 输出  $\{u\} = \{u^k\}$

对这一算法作以下三点说明:

1. 算法所需的存储量约为  $2nm_b + 3n$  ( $m_b$  为平均半带宽), 因  $[A]$  和  $[\tilde{A}]$  不是同时需要, 若内存不够可把  $[A]$  形成后先存入外存中, 这样可节约一半内存.
2. 每次迭代所花费的计算量主要消耗在解方程上, 所需计算量约为  $nm_b^2/2 + 11nm_b/2$  次乘除运算.
3. 若  $I_b$  正好为空集, 则  $\{q\} = 0$ , 算法不需迭代直接可解出  $\{u\} \geq 0$ . 这一点在实用中有很大的意义. 例如对滑动轴承, 它由几块轴瓦构成, 每块瓦可能有完整的油膜也可能产生油膜破裂; 采用本算法就可对所有的轴瓦统一处理, 提高了计算效率和通用性.

#### 四、数值结果

考虑如下自由边值问题

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &\geq 0 \quad \text{于 } \Omega = (0, 1) \times (-1, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta^2 h^3 \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\varepsilon \sin(x - \theta), \quad \text{当 } u > 0 \\ u(x, y) &= 0, \quad \text{于 } \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

它源于具有油膜破裂区 (雷诺边界条件) 的流体润滑问题, 其中  $u$  为无量纲压力,  $\beta$  为轴承径宽比,  $\theta$  和  $\varepsilon$  分别为轴径中心的偏位角和偏心率 ( $0 < \varepsilon < 1$ ),  $h = 1 + \varepsilon \cos(x - \theta)$  是油膜厚度.

上述问题的等价变分不等方程为<sup>[7]</sup>: 求  $u \in K$ , 使

$$a(u, v - u) \geq \iint_{\Omega} \varepsilon \sin(x - \theta) (v - u) dx dy, \quad \forall v \in K$$

其中

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq 0 \text{ 于 } \Omega\}$$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} h^3 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy$$

取  $\beta = 2, \theta = 5\pi/6, \varepsilon = 0.5$ . 考虑到  $y$  向的对称性, 仅取  $\Omega$  的一半 ( $y = 0$  的自然边界条件  $\partial u / \partial y = 0$ ), 把  $[0, 1] \times [0, 1]$  划分为  $m = s \times t$  个 4 节点等参单元, 用有限元方法离散化后以本文

算法进行了计算,图1对采用不同单元数的结果作了比较.从图中可以看出,  $40 \times 8$ 个单元与  $20 \times 8$ 个单元的计算结果几乎没有差别;  $20 \times 4$ 个单元的计算结果也相当好,但采用  $10 \times 8$ 个单元的计算结果稍差.可见,沿  $y$ 向少划分一些单元仍可保证足够的精度;而沿  $x$ 向,为了保证足够精度,则需多划分一些单元.这一点为提高计算效率非常有利,因为沿  $y$ 向少布置节点可以降低系数矩阵的半带宽,从而减少解方程的计算量.

为了比较算法的效率,以投影点松弛法(松弛因子取为1.6)对同一问题作了计算.二种算法的迭代次数和计算时间比(以  $20 \times 4$ 个单元的本文算法为标准)列于表1.从表中可以看出,本文算法优于投影点松弛法.应该指出,对解方程而言,本文算法属直接方法,而投影点松弛法属近似方法,每次迭代二者所需的计算量不同,对于大带宽的方程组,本文算法效率将会有所降低.

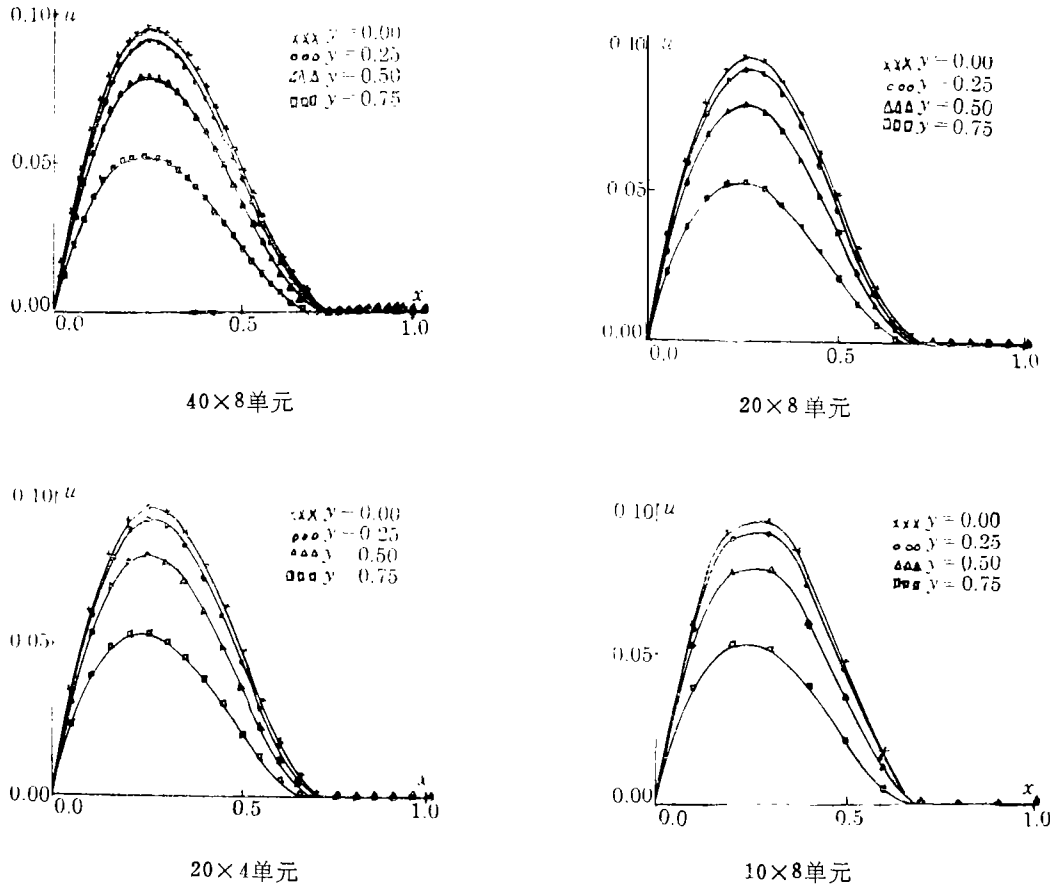


图1 不同单元数计算结果对比

表1 二种算法效率比较

方 法	本 文 方 法				投 影 松 弛 法			
	$40 \times 8$	$20 \times 8$	$20 \times 4$	$10 \times 8$	$40 \times 8$	$20 \times 8$	$20 \times 4$	$10 \times 8$
单元数 $s \times t$								
迭代次数	9	6	4	4	182	158	124	88
计算时间比	8.52	2.87	1.00	0.94	25.7	10.5	4.25	2.91

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Glowinski, R., *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer Verlag New York Inc. (1984).
- [ 2 ] Stuben, K., Algebraic multigrid (AMG): Experiences and comparisons, *Appl. Math. Comput.*, **13** (1983), 419--451.
- [ 3 ] 曾金平、李董辉, 对称双正线性互补问题的多重网格迭代解收敛性理论, *计算数学*, (1) (1994), 25—30.
- [ 4 ] Lions, J. L. and G. Stampacchia, Variational Inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 493—519.
- [ 5 ] Kinderlehrer, D. and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Acad. Press, New York (1980).
- [ 6 ] Zhou, S. Z., The error bound of finite element method for a two-dimensional singular boundary value problem, *J. Comput. Math.*, **1** (1983), 143—147.
- [ 7 ] Cimatti, G., On a problem of the theory of lubrication governed by a variational inequalities, *Appl. Math. Optim.*, **3** (1977), 227—242.
- [ 8 ] Zhou, S. Z., A direct method for the linear complimentary problem, *J. Comput. Math.*, **8** (1990), 178—182.

## An Iterative Method for the Discrete Problems of a Class of Elliptical Variational Inequalities

Zheng Tie-sheng    Li Li    Xu Qing-yu

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an  
Jiaotong University, Xi'an, 710049)

### Abstract

Based on the nonlinear characters of the discrete problems of some elliptical variational inequalities, this paper presents a numerical iterative method, the schemes of which are pithy and converge rapidly. The new method possesses a high efficiency in solving such applied engineering problems as obstacle problems and free boundary problems arising in fluid lubrications.

**Key words** variational inequalities, iterative method, fluid lubrications