

正交异性简支矩形底双曲扁壳 大挠度问题的解析解

董文堂

(黄石大学建工系, 黄石 435000)

(1994年2月25日收到)

摘 要

本文在文献[1,2]的基础上,进一步研究了富里叶级数在求解板壳大挠度问题中的应用。文中导出了简支边界条件下正交异性矩底双曲扁壳大挠度微分方程组的解析解。这个解可通用于板与壳、大挠度与小挠度、各向同性与正交异性在直角坐标下的多种情况。其数值结果与实验数据和其它解法结果相吻合。

关键词 扁壳 大挠度微分方程组 解析解 数值结果

一、引 言

众所周知,欲求板壳大挠度微分方程组的解析解是很困难的,其原因是方程组中非线性项难于处理。由于板壳结构在工程上有着广泛的应用,人们通常只得用近似方法去解决这类问题。虽然常采用的近似逼近方法各异,但它们绝大多数最终都要利用伽辽金法去确定所设挠曲函数和应力函数中的待定系数。因用逼近方法所设级数只能取有限项,显然近似性在所难免。实践表明,即使只取几项,在求解迭代过程中确定待定系数的推算量仍是很大且须用手工。并且,每迭代一个循环,就要用到伽辽金法一次,既累积了近似,又要逐轮解多维代数方程组,还要求所设函数严格满足全部边界条件,其结果,必然是解的精度不高,求解效率低下。更有,近似解法难以精确地反映物理量之间的关系,影响了板壳理论自身的发展和完善。因此,探索板壳大挠度问题的解析解无论从理论上还是从工程应用上都 有着重要的意义。

二、微分方程组解析解的导出

2.1 方程组及边界条件的无量纲化

文献[3]给出了正交异性矩底双曲扁壳大挠度微分方程组,为了求解方便,先对其实施无量纲化。取无量纲量

* 刘人怀推荐。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{\bar{w}}{h} \\ K_\zeta &= \frac{K_1 a^2}{h}, \quad K_\eta = \frac{K_2 b^2}{h} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中 x, y 为沿材料主轴方向的直角坐标;
 ζ, η 为沿 x, y 方向无量纲直角坐标;
 K_1, K_2 为主曲率;
 a, b 为在 x, y 坐标上投影边长(m);
 h 为壳厚(m);
 \bar{w} 为法向挠度(m)。

方程组实施无量纲化后, 成为

$$\begin{aligned} D_1^* \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + D_2^* \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - K_\zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - K_\eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} \\ = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \eta} + Q \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\begin{aligned} D_1^* \frac{\partial^4 \phi}{\partial \zeta^4} + 2D_3^* \frac{\partial^4 \phi}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + D_2^* \frac{\partial^4 \phi}{\partial \eta^4} + D_1 \left(K_\zeta \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + K_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right) \\ = D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \eta} \right)^2 - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (2.2b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中 } D_1 &= \frac{\nu_1}{12\nu_2} m, \quad D_2 = \frac{1}{12} m, \quad D_3 = \frac{G_{12}}{6E_2} + \nu_1 D_2 \\ D_1^* &= D_1 \lambda^2, \quad D_2^* = D_2 \lambda^{-2}, \quad D_3^* = \frac{E_1 D_2}{2G_{12}} - \nu_1 D_2 \\ \phi &= \frac{\varphi}{E_2 h^3}, \quad Q = \frac{Z a^2 b^2}{E_2 h^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

上式中 $\lambda = \frac{b}{a}, m = (1 - \nu_1 \nu_2)^{-1},$

ν_1, ν_2 为材料主轴方向的泊松比;
 E_1, E_2 为材料主轴方向的弹性模量;
 G_{12} 为面内剪切弹性模量;
 φ 为内力函数(N·m);
 Z 为法向均布载荷(Pa)。

无量纲筒支边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \zeta=0, \zeta=1, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = 0 \\ \text{当 } \eta=0, \eta=1, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

2.2 求解函数的设定与方程组线性项的计算

对四边筒支块扁壳, 设挠曲函数 w 和内力函数 ϕ 为

$$w = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (2.5a)$$

$$\phi = \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (2.5b)$$

式中 A_{mn} , ϕ_{mn} 为待定系数。可以看出, 所设函数 w 和 ϕ 满足边界条件(2.4)式。

将 w 和 ϕ 的各阶偏导数代入到方程组(2.2)中的各线性项, 有

$$D_1^* \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2^* \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} D \pi^4 \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (2.6)$$

其中 $m, n=1, 3, 5, \dots$, $D = D_1^* m^4 + 2D_3 m^2 n^2 + D_2^* n^4$,

$$D_1^* \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4} + 2D_3^* \frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + D_2^* \frac{\partial^4 \phi}{\partial \eta^4} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{mn} D^* \pi^4 \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (2.7)$$

其中 $m, n=1, 3, 5, \dots$, $D^* = D_1^* m^4 + 2D_3^* m^2 n^2 + D_2^* n^4$,

$$\text{和} \quad K_\xi \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + K_\eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \phi_{mn} \pi^2 (K_\xi n^2 + K_\eta m^2) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (2.8)$$

$$K_\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + K_\eta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 (K_\xi n^2 + K_\eta m^2) \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (2.9)$$

载荷 Q 展开为

$$Q = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{16Q}{mn\pi^2} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (2.10)$$

2.3 方程组中非线性项的数学处理

在文献[2,4]的基础上进一步推究, 处理方程组非线性项的步骤归纳为: 先将 w 和 ϕ 的偏导数的自乘或互乘的积定义为一个双重富里叶正弦级数, 然后根据富里叶级数的乘法性质推导所设级数的待定系数, 即设

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \quad (2.11)$$

其中

$$\alpha_{mn} = 64\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{sr} A_{ij} \cdot \frac{j^2}{r^2} \cdot \frac{s i^2}{4i^2 - s^2} \cdot \frac{r j^2}{4j^2 - r^2} \quad (s, r=1, 3, 5, \dots) \quad (2.12)$$

式中 i 和 j 为使 $2i \pm s$ 及 $2j \pm r$ 为奇数的整数, 求和时, 遍历 $2i \pm s$, $2j \pm r$ 为奇的 i, j . 以下有关诸式定义相同.

$$\text{若令 } C = \frac{si^2}{4i^2 - s^2} \cdot \frac{rj^2}{4j^2 - r^2},$$

(2.12) 式则成为

$$\alpha_{mn1} = 64\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{sr} A_{ij} C \cdot \frac{j^2}{r^2} \quad (2.13)$$

同理, 设

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn2} \sin m\pi \zeta \sin n\pi \eta \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.14)$$

其中

$$\alpha_{mn2} = 16\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{sr} A_{ij} C \quad (s, r = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.15)$$

再设

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_{mn} \sin m\pi \zeta \sin n\pi \eta \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_{mn2} \sin m\pi \zeta \sin n\pi \eta \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \beta_{mn1 \cdot 2} \sin m\pi \zeta \sin n\pi \eta \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.18)$$

其中

$$\beta_{mn1} = 64\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{sr} \phi_{ij} C \cdot \frac{i^2}{s^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots; s, r = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.19)$$

$$\beta_{mn2} = 64\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{sr} \phi_{ij} C \cdot \frac{j^2}{r^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots; s, r = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.20)$$

$$\beta_{mn1 \cdot 2} = 16\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{sr} \phi_{ij} C \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots; s, r = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.21)$$

2.4 解析解的导出

将(2.6)至(2.11)式、(2.14)式、(2.16)至(2.18)式代入到微分方程组(2.2)式中的各项, 类似板的纳维叶解法, 约去变量, 可得到待定系数 A_{mn} , ϕ_{mn} 的代数方程组:

$$A_{mn} \pi^4 D - \frac{16Q}{mn\pi^2} + \phi_{mn} \pi^2 (K_\zeta n^2 + K_\eta m^2) + 2\beta_{mn1 \cdot 2} - \beta_{mn1} - \beta_{mn2} = 0 \quad (2.22a)$$

$$\phi_{mn}\pi^4 D^* - A_{mn}\pi^2 D_1 (K_\zeta n^2 + K_\eta m^2) + D_1 (\alpha_{mn1} - \alpha_{mn2}) = 0 \quad (2.22b)$$

解上代数方程组, 得到

$$A_{mn} = \frac{D^*}{D_{NK}} \left[\frac{16Q}{mn\pi^2} + \beta_{mn} - \frac{D_1}{\pi^2 D^*} \alpha_{mn} (K_\zeta n^2 + K_\eta m^2) \right] \quad (2.23a)$$

$$\phi_{mn} = \frac{D_1}{D_{NK}} \left[\left(\frac{16Q}{mn\pi^2} + \beta_{mn} \right) \cdot (K_\zeta n^2 + K_\eta m^2) \cdot \pi^{-2} + D\alpha_{mn} \right] \quad (2.23b)$$

其中

$$D_{NK} = DD^*\pi^4 + D_1 (K_\zeta n^2 + K_\eta m^2)^2,$$

$$\alpha_{mn} = \alpha_{mn2} - \alpha_{mn1}$$

$$= 64\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{s,r} A_{i,j} C \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{j^2}{r^2} \right) \quad (2.24a)$$

$$\beta_{mn} = \beta_{mn1} + \beta_{mn2} - 2\beta_{mn1.2}$$

$$= 64\pi^2 \sum_s^m \sum_r^n \sum_i^m \sum_j^n A_{s,r} \phi_{i,j} C \cdot \left(\frac{i^2}{s^2} + \frac{j^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (2.24b)$$

类似板的纳维叶解法, 利用(2.23)和(2.24)式, 我们容易求得其挠度和应力。很明显, 如果式中未含有待定系数 A_{mn} , ϕ_{mn} , 大挠度非线性微分方程组的解析解也就找到了。正是由于 A_{mn} , ϕ_{mn} 与 α_{mn} , β_{mn} 还相互耦合着, 离散它们还须用到数值方法, 所以我们只能认为上述结果是扁壳的类似纳维叶解。

诚然, 从(2.23)、(2.24)式中将 A_{mn} , ϕ_{mn} 离散成显式并非易事, 但只要注意到这两组参量之间具有理想的迭代结构, 解耦问题也就迎刃而解了。

三、解的分析与算例

在式(2.23)和(2.24)中, 主曲率 K_ζ , K_η 和非线性参量 α_{mn} , β_{mn} 限定了壳体的几何形状和挠曲特征。变动 K_ζ 和 K_η 的值, 可得到对应的正交异性矩形板或矩底壳包括柱壳、球壳的解。例如, 令 α_{mn} 和 β_{mn} 为零, 就是解小挠度问题; 若令 α_{mn} , β_{mn} , K_ζ 和 K_η 这四个量全为零, 所得结果就是正交异性板的纳维叶解。需要指出的是, 作为控制参量, α_{mn} , β_{mn} 必须双双存在或为零; K_ζ , K_η 可分别取舍。

鉴于 A_{mn} , ϕ_{mn} 与 α_{mn} , β_{mn} 之间具有理想的迭代结构, 应用相互迭代法求取它们的值将十分简便。比方, 可令(2.23)式中的 α_{mn} , β_{mn} 同时为零, 得出的 A_{mn} , ϕ_{mn} 就是小挠度问题的纳维叶形式解; 再把这对 A_{mn} , ϕ_{mn} 作为迭代初值代入到式(2.24), 得到大挠度问题的求解迭代初值 α_{mn}^1 , β_{mn}^1 ; 以此回代, 又可得到 A_{mn}^1 , ϕ_{mn}^1 如此循环下去, 直到 A_{mn} , ϕ_{mn} 前后两次迭代的结果足够接近为止。很明显, 这样处理既简便又易获得较高的计算精度。

作为文中方法的应用, 我们取一边长 $a=b=135\text{mm}$, 厚度 $h=2.2\text{mm}$ 、主曲率半径 $R_1=400\text{mm}$ 、 $R_2=250\text{mm}$ 、泊松比 $\nu_1=0.266$ 、 $\nu_2=0.198$ 、弹性模量 $E_2=1.2\text{GPa}$ 、 $G_{12}=0.5\text{GPa}$ 的正交异性材料矩形底双曲壳模型, 将其数据输入到由式(2.5)、(2.23)、(2.24)编成的程序进行电算, 当输入不同的载荷 Z 时, 可得到一组对应的法向位移。当 Z 加大到 44500Pa 时, 迭代不再收敛, 这说明位移出现跳跃, 壳已失稳。为了找出临界载荷, 可缩小最后一次载荷增量去试算, 结果, 在 $Z=40000\text{Pa}$ 时, 迭代重新收敛, 这时对应的位移值 $w=$

2.15mm, 可以确定这就是临界载荷。

对模型壳模拟与上计算相同的简支边界条件, 施加法向均布的气压载荷并逐步增大, 又可由实验测得一组对应的载荷挠度值。当载荷增加到 42000Pa 时, 壳的中部迅速凸起, 位移成倍增加, 模型壳失稳明显。当卸载 980Pa, 凸起的变形消失, 这时测得挠度值 $w = 2.30\text{mm}$ 。

为了将本文的方法与其它方法加以比较, 我们用逐步逼近法复算了上例。令(2.2a)式中的 ϕ 为零, 解出, 再将 w_1 代入到式(2.2b), 解出 ϕ_1 , 然后回式, 如此循环下去, 直到达到一定的精度。这种方法推算过程繁冗且越后收敛越慢, 本例是经过9次循环迭代的结果。

三种方法的结果汇集于表1

表 1 挠度与临界载荷

载 荷 $Z(\text{Pa})$		9800	19600	29400	39200	临界载荷
挠 度 w (mm)	本文方法	0.50	1.00	1.55	2.10	40000(Pa)
	逼近方法	0.55	1.12	1.70	2.30	未能确定
	实验方法	0.45	0.95	1.50	2.05	41020(Pa)

三组数据的载荷挠度曲线如图1。

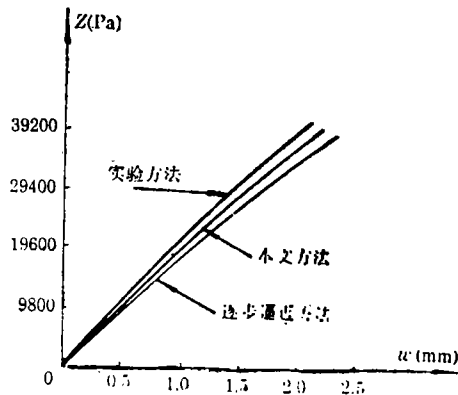


图 1

可以看出, 三组结果基本上是一致的。实验值小于本文方法理论值的主要原因是实验边界条件难以准确地模拟。为使加压能进行, 必须采用边界密封结构, 不让气压泄漏。这种密封结构对简支边界条件的实现多少是有影响的。逐步逼近法收敛较慢, 所取级数的计算项数和迭代轮数的多少对结果的精度有直接的影响。本例 m , n 和迭代轮数取得不够多是其结果大于本文方法结果的原因之一。用逐步逼近法确定临界载荷须经过足够的迭代, 一旦发现挠度的符号发生变化, 就可确定符号转变对应的载荷为临界载荷。因手工计算的效率低和该法推算量大, 收敛慢的缘故, 逼近法的临界载荷未能给出。

四、结 论

用本文提出的方法求解文献[4、5]中的有关算例, 可得到与其一致的结果。由于该方法在整个求解过程中没有用到伽辽金法和其它近似方法, 这无疑提高了了解的精确度。更为明显

的是, 本文方法将大挠度问题的解析解推导成明确的表达式, 简化了再求解的过程, 使求解和结果分析易于实现自动化。在四边简支的边界条件下, 无论计算对象是板还是壳, 是各向异性还是正交异性, 是大挠度还是小挠度, 均可通过变动有关参量, 用电算获得其相应的解, 不需再逐例从头推算。这种通用性显然为工程上板壳问题的求解提供了十分简便和有效的途径。

参 考 文 献

- [1] Yen Kai-yuan, Zheng Xiao-jing, An analytical formula of the exact solution to Von Karmar's equations of a circular plate under a concentrated load, *Int. J. Non-linear Mechanics*, 24, 6(1989), 551—560.
- [2] 严宗达, 《结构力学中的富里叶级数解法》, 天津大学出版社, 天津(1989).
- [3] 沃耳密尔A·C·著, 《柔韧板与柔韧壳》(庐文达等译), 科学出版社, 北京(1959).
- [4] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-krieger, *Theory of Plate and Shells*, second edition, McGraw-Hill Book company, Inc., (1959).
- [5] 孙镇泰, 《各向异性板壳理论》, 东南大学出版社, 南京(1993).

An Analytical Solution to Large Deflection Equations of Simply-Supported Rectangular Hyperboloidal Shallow Shells of Orthotropic Composites

Dong Wen-tang

(Department of Civil Engineering, Huangshi University, Huangshi 435000)

Abstract

Based on the product rule of the fourier series and some relevant results in references [1,2], a method on solving the large deflection equations of plates and shells by means of the fourier series is proposed in the present paper. Applying this method, we derive a type solution to the Navier's solution of the nonlinear differential equations of the rectangular hyperboloidal shallow shells of the orthotropic composites simply supported. This solution is suitable for plates and shells with large deflection or small deflection whether it is isotropic or orthotropic. Their data processing results are correlative with those found in the classical examples and from the experiments.

Key words shallow shell, large deflection equations, analytic solution, numerical result