应用数学和力学，第16卷 第2期（1995年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

弹性力学中的哈密顿系统及其变分原理*

王治国　　唐立民

（南京航空航天大学振动工程所）（大连理工大学工程力学所）

（1994年4月5日收到）

摘　　要

作为哈密顿力学逆问题，从弹性力学基本方程推导出弹性力学中一个新的哈密顿系统及其变分原理.

关键词　弹性力学　哈密顿系统　逆问题　变分原理

一、引　　言

在哈密顿体系中解决弹性力学问题的理论方法受到越来越多的重视，它可以解决那些原来不容易求解的问题，如可以在没有任何假设的条件下求解厚壁结构复合材料叠层及夹层结构问题[1,3,9].

文[4]利用结构力学与最优控制相模拟的理论，将弹性力学势能变分原理导向部分一般变分原理，从而将哈密顿体系理论引入弹性力学. 文[1，2]从两类变量的Hellinger-Reissner变分原理出发，给出修正的Hellinger-Reissner变分原理，从而给出弹性力学中哈密顿体系. 文[1，2，4]解决的问题实际上是属于哈密顿力学的正问题.本文则考虑弹性力学中哈密顿系统的逆问题. 这样做的好处是不仅可以推导出与文[1，2，4]相同的哈密顿体系（不妨称之为第一种形式），而且可以推导出另外一种在数值计算上更为方便有效的形式即第二种形式. 按照文[5]的定义第一种形式是不可分的，第二种形式是可分的. 不可分哈密顿系统的算法多是隐式的[5]，这给数值计算带来了不便，然而可分哈密顿系统有许多简单快速的显式算法[5,6].

本文首先讨论弹性力学中哈密顿系统的第二种形式即可分型及其变分原理，然后讨论两种形式的相互关系.

二、弹性力学中哈密顿系统的可分型

文[1,2,4]研究了弹性力学中的哈密顿系统，但是他们是由势能变分原理或Hellinger-Reissner 变分原理的泛函，推导出哈密顿泛函，进而得到哈密顿正则方程，因此是哈密顿

* 国家自然科学基金资助项目
1993年9月27日第一次收到

力学正问题，而且得到的哈密顿系统是不可分的。

哈密顿系统分为可分的和不可分的。可分的与不可分的相比，在数值计算上更具优势。因此，我们希望能够推导出弹性力学中可分的哈密顿系统。如果仍然从修正已有的变分原理做起，即做正问题，已不容易达到目的。如文[2]从势能形式的 Hellinger-Reissner 变分原理给出了不可分的哈密顿系统，其中“广义坐标”是$\{u, v, w\}^T$，“广义动量”是$\{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}^T$；同时又从余能形式的Hellinger-Reissner变分原理给出了哈密顿系统，也是不可分的，然而其中“广义坐标”是$\{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z\}^T$，“广义动量”是$\{u, v, w\}^T$。所以我们便试着做逆问题。

所谓哈密顿力学逆问题是指对给定的一个方程组

$$F_s(p, q, \dot{p}, \dot{q}, t)=0 \qquad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{2.1}$$

构造一个函数H使方程组(2.1)写成哈密顿正则方程的形式

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{2.2}$$

那么方程组(2.1)满足什么样的条件才可以构造出函数H？我们这里仅讨论线性可分的哈密顿系统，其哈密顿函数是

$$H=\frac{1}{2}p^T Ap+\frac{1}{2}q^T Bq \tag{2.3}$$

其中

$$A^T=A, \quad B^T=B \tag{2.4}$$

由式(2.3)代入(2.2)

$$\dot{q}=Ap, \quad \dot{p}=-Bq \tag{2.5}$$

所以如果方程组(2.1)能化成(2.5)的形式就可以构造一个形如(2.3)的H，得到一个可分的哈密顿系统。

为了获得弹性力学中可分的哈密顿系统，首先设

$$\bar{\tau}_{xz}=-\tau_{xz}, \quad \bar{\tau}_{yz}=-\tau_{yz} \tag{2.6}$$

则可以由弹性力学基本方程[7]（这里不妨略去体力）推导得

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{yz} \\ w \\ u \\ v \\ \sigma_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & B^* \\ & \\ A^* & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{yz} \\ w \\ u \\ v \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

其中

$$A^*=\begin{bmatrix} -\dfrac{2(1+\mu)}{E} & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\dfrac{2(1+\mu)}{E} & -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^*=\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{E}{2(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{E}{2(1-\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

另外

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\mu}{1-\mu}\\ \frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\mu}{1-\mu}\\ \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{E}{2(1+\mu)}\frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\\ \sigma_z\end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

如果使方程(2.7)中变量z，向量$\{\bar{\tau}_{xz},\ \bar{\tau}_{yz},\ w\}^T$和$\{u,\ v,\ \sigma_z\}^T$分别模拟方程(2.1)中时间变量$t$，广义动量$p$，广义坐标$q$，又由于矩阵$A^*$和$B^*$满足条件(2.4)即它们是自伴算子，则方程(2.7)具有(2.5)的形式．因此可以构造出一个函数H，

$$\begin{aligned}H=\frac{1}{2}\Big[&-\frac{2(1+\mu)}{E}\bar{\tau}_{xz}^2-\frac{2(1+\mu)}{E}\bar{\tau}_{yz}^2-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\sigma_z^2\\ &+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{2\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\\ &+\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2w\frac{\partial\bar{\tau}_{xz}}{\partial x}+2w\frac{\partial\bar{\tau}_{yz}}{\partial y}\\ &+\frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_z\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_z\frac{\partial v}{\partial y}\Big]\end{aligned} \tag{2.9}$$

使弹性力学基本方程表达成哈密顿正则方程的形式

$$\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial H}{\partial q} \tag{2.10}$$

其中

$$p=\{\bar{\tau}_{xz},\ \bar{\tau}_{yz},\ w\}^T,\quad q=\{u,\ v,\ \sigma_z\}^T$$

由于哈密顿函数H式(2.9)具有式(2.3)的形式，所以哈密顿系统(2.10)是可分的．

在上面的讨论中我们假定弹性力学问题的边界条件都得到满足．

在哈密顿力学中哈密顿正则方程可以由修正的哈密顿原理[8]得到，为此下面给出方程(2.10)相应的变分原理．

首先给出与方程(2.10)对应的边界条件，将通常的弹性力学问题边界条件[7]利用式(2.6)和(2.8)修正为

位移边界条件

$$u=\bar{u},\quad v=\bar{v},\quad w=\bar{w} \tag{2.11}$$

应力边界条件

$$\left.\begin{aligned}
p_x&=n_x\left(\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z\right)+n_y\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&\quad -n_z\bar{\tau}_{zx}=\bar{p}_x\\
p_y&=n_x\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+n_y\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z\right)\\
&\quad -n_z\bar{\tau}_{zy}=\bar{p}_y\\
p_z&=-n_x\bar{\tau}_{xz}-n_y\bar{\tau}_{yz}+n_z\sigma_z=\bar{p}_z
\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

可分哈密顿系统(2.10)对应的变分原理为

$$d\Pi=0 \tag{2.13}$$

其中

$$\Pi=\iiint_V\left(\bar{\tau}_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}+\bar{\tau}_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}+w\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}-H\right)dxdydz+\mathrm{b.t.} \tag{2.14}$$

$$\mathrm{b.t.}=\iint_{S_u}[p_x(u-\bar{u})+p_y(v-\bar{v})-p_z\bar{w}]ds$$

$$+\iint_{S_\sigma}[\bar{p}_xu+\bar{p}_yv+(\bar{p}_z-p_z)w]ds$$

其中b.t.为边界项.

从泛函(2.14)可以看出，变分原理(2.13)不同于通常的混合变分原理的势能形式或余能形式，可以认为是一类新型的混合变分原理.

三、弹性力学中哈密顿系统的可分型与不可分型的关系

在前一节作为哈密顿力学逆问题讨论了弹性力学中可分的哈密顿系统，同样可以从弹性力学基本方程得到不可分的哈密顿系统. 由于文[2]已经作为正问题对后者进行了详细讨论，为了便于讨论两者的关系，这里仅对不可分哈密顿系统作简单叙述，其正则方程为

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial z}=\frac{\partial H^*}{\partial\bar{p}},\quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial z}=-\frac{\partial H^*}{\partial\bar{q}} \tag{3.1}$$

其中

$$\bar{p}=\{\tau_{xz},\ \tau_{yz},\ \sigma_z\}^T,\quad \bar{q}=\{u,\ v,\ w\}^T$$

$$\begin{aligned}
H^*=\frac{1}{2}\Big[&\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xz}^2+\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}^2+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\sigma_z^2-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\\
&-\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-\frac{2\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&-\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2-2\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}-2\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$-\frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_z\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2\mu}{1-\mu}\sigma_z\frac{\partial v}{\partial y}\Big] \tag{3.2}$$

相应的位移边界条件仍为(2.11)式，应力边界条件则为

$$\left.\begin{aligned}
&p_x=n_x\left(\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z\right)+n_y\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&\quad+n_z\tau_{zx}=\bar{p}_x\\
&p_y=n_x\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+n_y\left(\frac{\mu E}{1-\mu^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_z\right)\\
&\quad+n_z\tau_{zy}=\bar{p}_y\\
&p_z=n_x\tau_{xz}+n_y\tau_{yz}+n_z\sigma_z=\bar{p}_z
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

相应的变分原理为

$$\delta\Pi^*=0 \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Pi^*=&\iiint_V\left(\tau_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}-H^*\right)dxdydz\\
&-\iint_{S_u}[p_x(u-\bar{u})+p_y(v-\bar{v})+p_z(w-\bar{w})]ds\\
&-\iint_{S_\sigma}[\bar{p}_xu+\bar{p}_yv+\bar{p}_zw]ds
\end{aligned} \tag{3.5}$$

下面证明变分原理(2.13)和(3.4)的相互关系．由式(2.14)和式(3.5)同时考虑式(2.6)有

$$\begin{aligned}
\Pi+\Pi^*=&\iiint_V\left(\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right.\\
&\left.+w\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)dxdydz-\iint_{S_u+S_\sigma}p_zwds
\end{aligned} \tag{3.6}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\iiint_V\left(w\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+w\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+w\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right)dxdydz\\
&=\iint_{S_u+S_\sigma}(n_x\tau_{xz}w+n_y\tau_{yz}w+n_z\sigma_zw)ds\\
&\quad-\iiint_V\left(\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdydz
\end{aligned} \tag{3.7}$$

同时考虑式(3.3)中第三式，则由式(3.6)

$$\Pi=-\Pi^* \tag{3.8}$$

这证明了弹性力学中哈密顿系统的两种形式对应的变分原理是等价的．

四、讨　论

作为哈密顿力学逆问题，由弹性力学基本方程推导出弹性力学中哈密顿系统，进一步给出其变分原理．

有了变分原理为有限元法的应用提供了理论基础．采用部分离散化即仅离散坐标和 y，

得到弹性力学中哈密顿系统的有限元公式，我们称这时的单元为哈密顿单元，单元节点变量$\{\bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}, w, u, v, \sigma_z\}^T$或$\{\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z, u, v, w\}^T$按照哈密顿体系理论都是完全独立的。求出这些量后可以由式(2.8)求出其余的三个应力量(σ_x, σ_y, τ_{xy})。这种哈密顿单元方法是一种基于完全的三维弹性理论的半解析半数值方法，可以用于求解厚壁结构复合材料结构力学问题[9]。

参 考 文 献

[1] Steele, C. R. and Y. Y. Kim, Modified mixed variational principle and the state-vector equation for elastic bodies and shells of revolution, *ASME J. Appl. Mech.*, 59(3) (1992), 587—595.

[2] 唐立民，弹性力学的混合方程和Hamilton 正则方程，计算结构力学及其应用，8(4) (1991), 343—350.

[3] 唐立民等，混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算，计算结构力学及其应用，9(4) (1992), 347—360.

[4] 钟万勰，条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系，大连理工大学学报，31(4)(1991), 373—384.

[5] 冯康、秦孟兆，Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法，自然科学进展——国家重点实验室通讯，试刊(2) (1990), 110—120.

[6] Qin Meng-zhao, et al., Explicit symplectic difference schemes for separable Hamiltonian systems, *J. Comput. Math.*, 9(3) (1991), 211—221.

[7] 徐芝纶，《弹性力学》（第二版），上册，高等教育出版社 (1982).

[8] H. 戈德斯坦，《经典力学》（第二版），陈为恂译，科学出版社 (1986).

[9] 王治国，弹性力学中哈密顿体系的研究及其应用，大连理工大学博士学位论文 (1993).

Hamiltonian Systems in Elasticity and Their Variational Principles

Wang Zhi-guo

(Research Institute of Vibration Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing)

Tang Li-min

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian)

Abstract

As an inverse problem of Hamiltonian mechanics, a new Hamiltonian system in elasticity and its variational principle are derived from the basic equations of elasticity.

Key words elasticity, Hamiltonian system, inverse problem, variational principle