应用数学和力学，第16卷 第2期（1995年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

拓扑型截口定理及应用*

张石生　　吴　鲜

（四川大学数学系）（云南昭通师专数学系）

（1994年4月4日收到）

摘　要

本文给出一个新型的KKM定理，并用它得到拓扑型截口定理．在第四节至第五节应用此截口定理给出了Browder-Hartman-Stampacchia变分不等式[3]，隐变分不等式[8]，抽象形式变分不等式[19]的解的存在性定理，和一个集值映射的不动点定理．其结果不仅包含了Browder[3]中的主要结果为特例，而且，改进和发展了引文[1～19]中的相应结果．

关键词　截口定理　KKM定理　变分不等式

一、引言及预备知识

自1988年Bardaro[1]引入H-空间概念，对KKM定理作进一步推广以来，许多数学工作者在H-空间框架下对KKM定理和截口定理作了多种推广和应用．（见[2,6,7]）

本文目的是引入W-空间概念，建立新型的KKM定理和截口定理，并应用于变分不等式和不动点问题，得出三类变分不等式解的存在性定理和一个集值映射的不动点定理．其结果不仅将Browder[5]中的主要结果作为特例包含其中，而且改进和发展了[1～19]中的相应结果．

为叙述方便，我们先引入下面的记号和概念．以下所涉及到的拓扑空间X，Y均设为Hausdorff的．

定义1.1　设X为一拓扑空间，$\{C_A\}$为X的一个连通子集族，用X中一切有限子集编号．且满足：对X的每一有限子集A，有$A\subset C_A$．则称$(X,\{C_A\})$为W-空间．

注　Hausdorff拓扑线性空间、凸空间、可缩空间、连通空间均为W-空间的特例．对于H-空间$(X,\{\Gamma_A\})$，当$A\subset\Gamma_A$对每个有限子集$A\subset X$成立时，H-空间$(X,\{\Gamma_A\})$也是W-空间．

定义1.2　设$F:X\to 2^Y$；$(X,\{C_A\})$为W-空间．称F为W-KKM映象，如果$\forall\ x_1,x_2\in X$，恒有$F(C_{\{x_1,x_2\}})\subset\bigcup_{i=1}^{2}F(x_i)$．称$X$的子集$D$关于$C$是W-凸的，如果对任一有限子集$A\subset C$，恒有$C_A\subset D$．特别，当$C=D$时，称$D$是W-凸的．称$F$是广义W-KKM映象（GW-KKM映象），如果存在$s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，使$s^{-1}F:X\to 2^X$为W-KKM映象．其中

$$\mathscr{C}(X,Y)=\{s:X\to Y:s\text{连续}\}$$

* 国家自然科学基金资助课题
1993年9月1日第一次收到

$\mathscr{C}^*(X,Y)=\{s\in\mathscr{C}(X,Y): s^{-1}$将连通集$Y$变为连通集$X\}$

二、拓扑型KKM定理

定理2.1　设$(X,\{C_A\})$是一W-空间，$F: X\to 2^Y$为W-KKM映射。如果

(i)　$\forall x\in X$，$F(x)$是非空开（闭）的；

(ii)　对任一有限子集$A\subset X$，$\bigcap\limits_{x\in A} F(x)$是连通的；

(iii)　$F^{-1}(y)$为开集，$\forall y\in Y$，则

(1) 集族$\{F(x): x\in X\}$具有限交性质；

(2) 若$\forall x\in X$，$F(x)$闭，且$\exists x_0\in X$使$F(x_0)$紧，则$\bigcap\limits_{x\in X} F(x)\neq\phi$。

证　先证结论(1)。用归纳法证明。

由条件(i)知，$\forall x\in X$，$F(x)\neq\phi$。现设集族$\{F(x): x\in X\}$中任意$n\geqslant 1$个元之交非空，下证$\{F(x): x\in X\}$中任意$n+1$个元之交也非空。

设相反，则存在$\{x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\}\subset X$，使

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} F(x_i)=\phi$$

令$H=\bigcap\limits_{i=3}^{n+1} F(x_i)$。则由归纳假设和条件(ii)知$H\cap F(x_i)$ $i=1,2$为非空连通集，而且

$$(H\cap F(x_1))\cap(H\cap F(x_2))=\phi \tag{2.1}$$

又F为W-KKM映射知

$$F(C_{\{x_1,x_2\}})\subset F(x_1)\cup F(x_2)$$

于是有

$$(H\cap F(C_{\{x_1,x_2\}})\subset(H\cap F(x_1))\cup(H\cap F(x_2))$$

令

$$E_1=\{x\in C_{\{x_1,x_2\}}: H\cap F(x)\subset H\cap F(x_1)\}$$

$$E_2=\{x\in C_{\{x_1,x_2\}}: H\cap F(x)\subset H\cap F(x_2)\}$$

因$x_1\in E_1$，$x_2\in E_2$故，E_1,E_2非空。由(2.1)和条件(i)可得

$$C_{\{x_1,x_2\}}=E_1\cup E_2$$

因$C_{\{x_1,x_2\}}$连通且$E_1\cap E_2=\phi$知，E_1,E_2中必有一不是$C_{\{x_1,x_2\}}$中闭集，不妨设E_2不闭，取$x_0\in(\bar{E}_2\setminus E_2)\cap E_1$存在网$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset E_2$，使$x_\alpha\to x_0$。因$x_0\in E_1$，故

$$H\cap F(x_0)\subset H\cap F(x_1)$$

又因$x_\alpha\in E_2$，故

$$H\cap F(x_\alpha)\subset H\cap F(x_2),\qquad \forall\alpha\in I \tag{2.2}$$

注意到归纳假设知$H\cap F(x_0)\neq\phi$，取$y_0\in H\cap F(x_0)$有$y_0\in H\cap F(x_1)$。由(2.1)知$y_0\notin H\cap F(x_2)$，故$y_0\notin F(x_2)$由(2.2)知，对一切$\alpha\in I$，$y_0\notin F(x_\alpha)$，即

$$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset X\setminus F^{-1}(y_0)$$

而$x_\alpha\to x_0$，$F^{-1}(y_0)$开知，$x_0\in X\setminus F^{-1}(y_0)$，即$y_0\notin F(x_0)$。这与$y_0\in H\cap F(x_0)$相矛盾。由此矛盾知$\{F(x): x\in X\}$具有有限交性质。

现证结论(2)：若$\forall x\in X$，$F(x)$闭，且$\exists x_0\in X$使$F(x_0)$紧，则$\{F(x)\cap F(x_0): x\in X\}$是

$F(x_0)$中的闭集族且具有限交性质，故$\{F(x)\cap F(x_0): x\in X\}$有非空交，从而

$$\bigcap_{x\in X}F(x)=\bigcap_{x\in X}(F(x)\cap F(x_0))\neq\phi$$

定理证毕.

推论2.1 设$(X,\{C_A\})$是一W-空间，Y是一拓扑空间，$F:X\to 2^Y$是具有非空开值的GW-KKM映射，且满足

(i) $F^{-1}(y)$为开集，$\forall y\in Y$；

(ii) $\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$\bigcap_{i=1}^{n}F(x_i)$连通.

则$\{F(x): x\in X\}$具有限交性质.

证 因$F:X\to 2^Y$是GW-KKM映象，所以，$\exists s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，使$s^{-1}F:X\to 2^X$为W-KKM映射，又$F$具有开值知$s^{-1}F$具有开值.再由$F^{-1}(y)$开,$\forall y\in Y$知，$\forall z\in X$,$(s^{-1}F)^{-1}(z)=F^{-1}(s(z))$开. 又由条件(ii)和$s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$知，$s^{-1}F$满足定理2.1的条件(ii). 于是由定理2.1知$\{s^{-1}F(x): x\in X\}$具有限交性质，从而$\{F(x): x\in X\}$具有限交性质.

注 定理2.1和推论2.1是两个新型的拓扑型KKM定理，它不涉及任何线性结构，巧妙地用连通性代替凸性和可缩性，将不同形式的KKM定理[1,2,6,7]，推广到W-空间.

三、拓扑型截口定理

本节利用定理2.1给出拓扑型的截口定理和它的等价形式. 它们是Ky Fan[8], Shih-Tan[14],[15],Fan[9],Bardaro-Ceppitelli[3], Park[13], Lassonde[12],Takahashi[16], Ko-Tan[11], Browder[5], K Fan[10], Tan[17], Yen[18]工作的相应结果的改进和发展.

定理3.1 设$(X,\{C_A\})$是一W-空间，Y为一拓扑空间，D, $E\subset X\times Y$是二非空集合. 若

(i) $F:X\to 2^Y$, $F(x)=\{y\in Y:(x,y)\notin D\}$不是GW-KKM映象；

(ii) $\forall y\in Y$，集合$\{x\in X:(x,y)\in E\}$关于集合$\{x\in X:(x,y)\in D\}$是W-凸的. 则 $\forall s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，$\exists x_0\in X$，$z_0\in s^{-1}F(x_0)$，使得$(x_0,s(z_0))\in E$.

证 由条件(i)知，$\forall s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，$s^{-1}F:X\to 2^X$不是W-KKM映象. 因此，$\exists\{x_1,x_2\}\subset X$，使$s^{-1}F(\{x_1,x_2\})\not\subset\bigcap_{i=1}^{2}s^{-1}F(x_i)$，从而，$\exists z_0\in s^{-1}F(C_{\{x_1,x_2\}})$使$z_0\notin s^{-1}F(x_i)$，$i=1,2$，于是$s(z_0)\in F(C_{\{x_1,x_2\}})$. $s(z_0)\notin F(x_i)$，$i=1,2$,故$\exists x_0\in C_{\{x_1,x_2\}}$，使$s(z_0)\in F(x_0)$即$z_0\in s^{-1}F(x_0)$且$(x_i,s(z_0))\in D$，$i=1,2$，即$z_0\in s^{-1}F(x_0)$,$\{x_1,x_2\}\subset\{x\in X:(x,s(z_0))\in D\}$. 又由条件(ii)知，$C_{\{x_1,x_2\}}\subset\{x\in X:(x,s(z_0))\in E\}$，于是，$(x_0,s(z_0))\in E$.

定理3.2 设$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，Y是一个拓扑空间，$D\subset X\times Y$. $F:X\to 2^Y$, $F(x)=\{y\in Y:(x,y)\notin D\}$是一具有非空值的GW-KKM映象. 如果

(i) $\{y\in Y:(x,y)\in D\}$紧开，$\forall x\in X$；

(ii) 对任意有限子集$A\subset X$，$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:(x,y)\notin D\}$连通；

(iii) $F^{-1}(y)$为开集，$\forall y\in Y$.

则存在$y_0\in Y$，使集合$\{x\in X:(x,y_0)\in D\}=\phi$.

证 由F是GW-KKM映象和具非空值知，$\exists s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，使$s^{-1}F:X\to 2^X$为具非空值的W-KKM映象. 又由条件(i)知$s^{-1}F(x)$为闭集，$\forall x\in X$. 又由条件(ii)知，对任一有

限子集$A\subset X$，$\bigcap_{x\in A} s^{-1}F(x)=s^{-1}\bigcap_{x\in A}F(x)$连通．由条件(iii)知，$\forall z\in X$，$(s^{-1}F)^{-1}(z)=F^{-1}(s(z))$为$X$中开集．从而，由定理2.1知，

$$\bigcap_{x\in X} s^{-1}F(x)\neq\phi$$

即$\exists x_0\in X$，使$x_0\in s^{-1}F(x)$，$\forall x\in X$，从而，$y_0=s(x_0)\in F(x)$，$\forall x\in X$．故$(x,y_0)\notin D$，$\forall x\in X$．即$\{x\in X:(x,y_0)\in D\}=\phi$．

和定理3.2类似可证

定理3.3　设$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，Y是一个拓扑空间，$D\subset X\times Y$．$F:X\to 2^Y$，

$$F(x)=\{y\in Y:(x,y)\notin D\}$$

是一具非空值的GW-KKM映象．如果

(i)　$\{y\in Y:(x,y)\in D\}$紧闭，$\forall x\in X$；

(ii)　对X的任一有限子集$A\subset X$，$\bigcap_{x\in A}\{y\in Y:(x,y)\notin D\}$连通；

(iii)　$F^{-1}(y)$为开集，$\forall y\in Y$．

则$\exists y_0\in Y$，使

$$y_0\in\bigcap_{x\in X}\overline{\{y\in Y:(x,y)\notin D\}}$$

定理3.4　设$(X,\{C_A\})$是一W-空间，Y是一拓扑空间，$G,H:X\to 2^Y$是两集值映射．如果

(i)　$F:X\to 2^Y$，$F(x)=Y\backslash G(x)$，不是GW-KKM映射；

(ii)　$\forall y\in Y$，$H^{-1}(y)$关于$G^{-1}(y)$是W-凸的．则$\forall s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，$\exists x_0\in X$，$z_0\in s^{-1}\cdot F(x_0)$，使$s(z_0)\in H(x_0)$．即$s(z_0)\in F(x_0)\cap H(x_0)$．

证　令$D=\{(x,y)\in X\times Y:y\in G(x)\}$，$E=\{(x,y)\in X\times Y:y\in H(x)\}$则$F(x)=Y\backslash G(x)=\{y\in Y:y\notin G(x)\}=\{y\in Y:(x,y)\notin D\}$，从而可知，$F$恰为定理3.1中的$F$．又容易验证定理3.1中的条件全部满足，于是，由定理3.1知，$\forall s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，$\exists x_0\in X$，$z_0\in s^{-1}F(x_0)$使得$(x_0,s(z_0))\in E$即$s(z_0)\in H(x_0)$．

注　定理3.1和定理3.4实际上是等价的．

定理3.5　设$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，Y是一拓扑空间，$G:X\to 2^Y$为集值映射，使$G(x)\neq Y$，$\forall x\in X$．若还满足：

(i)　$F(x)=Y\backslash G(x)$是一GW-KKM映射；

(ii)　$G(x)$紧开，$\forall x\in X$；

(iii)　$\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$\bigcap_{i=1}^{n}F(x_i)$连通；

(iv)　$G^{-1}(y)$闭，$\forall y\in Y$．

则$\exists y_0\in Y$，使$G^{-1}(y_0)=\phi$．

证　令$D=\{(x,y)\in X\times Y:y\in G(x)\}$，则易验证$F:X\to 2^Y$满足定理3.2的全部条件．于是，结论由定理3.2推出．

注　定理3.2和定理3.5是等价的．

四、截口定理对变分不等式的应用

定理4.1　设$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，Y是一拓扑空间，$r\in R$，$\psi:X\times Y\to R$，使

$\{y\in Y:\psi(x,y)<r\}\neq\phi$，$\forall x\in X$．若还满足

(i) $\psi(x,\cdot)$连续，$\forall x\in X$；

(ii) $\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{y\in Y:\psi(x_i,y)<r\}$连通；

(iii) $\psi(\cdot,y)$上半连续，$\forall y\in Y$；

(iv) $\forall y\in Y$，集$\{x\in X:\psi(x,y)\geqslant r\}$是W-凸的．则变分不等式

$$\psi(x,y)\leqslant r,\qquad \forall x\in X \tag{4.1}$$

在Y中有解．

证 令 $M=\{(x,y)\in X\times Y:\psi(x,y)\geqslant r\}$

$F(x)=\{y\in Y:(x,y)\notin M\}$

则$F(x)=\{y\in Y:\psi(x,y)<r\}$，于是$F:X\to 2^Y$具有非空值．由条件(i)知$\{y\in Y:(x,y)\in M\}=\{y\in Y:\psi(x,y)\geqslant r\}$闭．由条件(ii)知，定理3.3的条件(ii)满足．又由条件(iii)知，$F^{-1}(y)=\{x\in X:y\in F(x)\}=\{x\in X:\psi(x,y)<r\}$为开集．

若$F:X\to 2^Y$不是GW-KKM映象．由条件(iv)知：集$\{x\in X:(x,y)\in M\}=\{x\in X:\psi(x,y)\geqslant r\}$是W-凸的，于是，由定理3.1知，$\forall s\in\mathscr{C}^*(X,Y)$，$\exists x_0\in X,z_0\in s^{-1}F(x_0)$，使$(x_0,s(z_0))\in M$，即$\psi(x_0,s(z_0))\geqslant r$；另外，由$z_0\in s^{-1}F(x_0)$，又有$s(z_0)\in F(x_0)$，即$\psi(x_0,s(z_0))<r$矛盾．由此矛盾知$F:X\to 2^Y$为GW-KKM映象．从而，由定理3.3知，$\exists y_0\in Y$，使

$$y_0\in\bigcap_{x\in X}\overline{\{y\in Y:(x,y)\notin M\}}=\bigcap_{x\in X}\overline{\{y\in Y:\psi(x,y)<r\}}$$

$$=\bigcap_{x\in X}\{y\in Y:\psi(x,y)\leqslant r\}$$

故$\psi(x,y_0)\leqslant r$，$\forall x\in X$．即变分不等式(4.1)在Y中有解y_0．

注 当$X=Y=K$为局部凸空间E中的紧凸集时，我们可以说明Browder[4]中主要结果——Browder-Hartman-Stampcchia变分不等式解的存在性定理为定理4.1的特例．

推论4.1(Browder[4]) 设E是一局部凸拓扑线性空间，$K\subset E$是一紧凸集，$T:K\to E^*$是一连续映象，则$\exists y_0\in K$，满足变分不等式

$$\langle Ty,x-y\rangle\geqslant 0,\qquad \forall x\in K \tag{4.2}$$

证 取$X=Y=K$，$\psi(x,y)=\langle Tx,y-x\rangle$．$\forall x,y\in K$．于是，对$r_n=1/n>0$．$\psi$满足定理4.1的全部条件，从而，由定理4.1知，$\exists y_n\in K$，使

$$\langle Tx,y_n-x\rangle\leqslant 1/n,\qquad \forall x\in K \tag{4.3}$$

又因K紧，可不妨设$y_n\to y_0$，于是，由(4.3)得

$$\langle Tx,y_0-x\rangle\leqslant 0,\qquad \forall x\in K \tag{4.4}$$

又$\forall x\in K$，由K凸知$tx+(1-t)y_0=y_0+t(x-y_0)\in K$，$\forall t\in(0,1]$．从而，由(4.4)得

$$\langle T(y_0+t(x-y_0)),x-y_0\rangle\geqslant 0\qquad \forall t\in(0,1]$$

于是，由T的连续性，在上式中令$t\to 0^+$得

$$\langle Ty_0,x-y_0\rangle\geqslant 0,\qquad \forall x\in K$$

即y_0为变分不等式(4.2)的解．

下面我们来说明，定理4.1还包含了一类隐变分不等式解的存在性定理．为此，我们先引入

定义4.1 设$(X,\{C_A\})$和$(Y,\{C_B\})$是二W-空间，对$X\times Y$的任一有限子集$D=\{(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$，有$A=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$B=\{y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$，令$C_D=C_A\times C_B$．它为$X\times$

Y中的含$D\in C_D$的连通子集，则$(X\times Y,\{C_D\})$为一W-空间，将它称为$(X,\{C_A\})$与$(Y,\{C_B\})$的乘积W-空间。

推论4.2 设$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，Y是一拓扑空间，$f:X\times X\times Y\to R$，$r\in R$，使$\{y\in Y:f(x,z,y)<r\}\neq\phi$，$\forall(x,z)\in X\times X$。若

(i) $f(x,z,\cdot)$连续，$\forall(x,z)\in X\times X$；

(ii) $\forall\{(x_1,z_1),\cdots,(x_n,z_n)\}\subset X\times X$，$\bigcap_{i=1}^{n}\{y\in Y:f(x_i,z_i,y)<r\}$连通；

(iii) $f(x,z,y)$关于$(x,z)\in X\times X$上半连续；

(iv) $\{(x,z)\in X\times X:f(x,z,y)\geqslant r\}$是W-凸的。

则变分不等式

$$f(x,z,y)\leqslant r,\qquad\forall x,z\in X\tag{4.5}$$

在Y中有解。

特别当$Y=X$时，隐变分不等式

$$f(x,y,y)\leqslant r,\qquad\forall x\in X\tag{4.6}$$

在X中有解。

证 设$(X\times X,\{C_D\})$为$(X,\{C_A\})$与$(X,\{C_A\})$的乘积W-空间，则结论由定理4.1得出。

注 推论4.2改进和发展了Fan[8]中的相应结果，给出了一类隐变分不等式解的存在性定理。

定理4.2 设$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，$f:X\to\bar{R}(\bar{R}=(-\infty,+\infty])$，$f\not\equiv+\infty$，$\varphi:X\times X\to R$使$\varphi(x,x)<0$，$\forall x\in X$。如果

(i) $f(y)+\varphi(x,y)$关于y连续，$\forall x\in X$；

(ii) $f(x)-\varphi(x,y)$关于x下半连续，$\forall y\in X$；

(iii) $\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$\bigcap_{i=1}^{n}\{y\in Y:f(y)+\varphi(x_i,y)<f(x_i)\}$连通；

(iv) $\forall y\in X$，$\{x\in X:f(y)+\varphi(x,y)\geqslant f(x)\}$是W-凸的。

则抽象变分不等式

$$f(y)+\varphi(x,y)\leqslant f(x),\qquad\forall x\in X\tag{4.7}$$

在X中有解。

证 若不然。$\forall y\in X$，$\exists x_0\in X$，使

$$f(y)+\varphi(x_0,y)>f(x_0)$$

则

$$\{x\in X:f(y)+\varphi(x,y)\leqslant f(x)\}\neq X,\qquad\forall y\in X\tag{4.8}$$

作$F:X\to 2^X$，使$F(x)=\{y\in X:f(y)+\varphi(x,y)<f(x)\}$，$M=\{(x,y)\in X\times X:f(y)+\varphi(x,y)\geqslant f(x)\}$，则由$\varphi(x,x)<0$，$\forall x\in X$，和条件(i)知$F$具有非空开值。又由条件(ii)知

$$F^{-1}(y)=\{x\in X:y\in F(x)\}=\{x\in X:f(y)+\varphi(x,y)<f(x)\}$$
$$=\{x\in X:f(x)-\varphi(x,y)>f(y)\}$$

为开集。

再由条件(iii)知，推论2.1的条件(ii)满足。

若F不是GW-KKM映象，则由条件(iv)知定理3.1的条件全满足。于是，由定理3.1知，$\forall s\in\mathscr{C}^*(X,X)$，$\exists x_0\in X$，$z_0\in s^{-1}F(x_0)$，使$(x_0,s(z_0))\in M$。即

$$f(s(z_0))+\varphi(x_0,s(z_0))\geqslant f(x_0)\tag{4.9}$$

另一方面，$s(z_0)\in F(x_0)$，又有

$$f(s(z_0))+\varphi(x_0,s(z_0))<f(x_0)$$

这和(4.9)矛盾．由此矛盾知，$F:X\to 2^X$是GW-KKM映象．从而，推论2.1的条件全满足．于是，由推论2.1知，$\{F(x):x\in X\}$具有有限交性质．而X紧知，$\bigcap\limits_{x\in X}\overline{F(x)}\neq\phi$，即

$$\bigcap_{x\in X}\{y\in X:f(y)+\varphi(x,y)\leqslant f(x)\}\neq\phi$$

从而，$\exists\, y_0\in X$，使$f(y_0)+\varphi(x,y_0)\leqslant f(x)$，$\forall x\in X$，即$\{x\in X:f(y_0)+\varphi(x,\ y_0)\leqslant f(x)\}=X$．这和(4.8)矛盾．由此矛盾知，结论得证．

注　只要令$\psi(y,x)=-\varphi(x,y)$即可知定理4.2实际上已将著名的Ky Fan极大极小原理从Hausdorff拓扑线性空间推广到了W-空间．给出了W-空间上一类抽象变分不等式解的存在性定理．

推论4.3　设E是一Hausdorff拓扑线性空间$X\subset E$为紧凸集，$f:X\to(-\infty,+\infty]$，$f\not\equiv+\infty$，$\psi:X\times X\to R$，$\psi(x,x)>0$，$\forall x\in X$．再设

(i) $f(y)-\psi(y,x)$关于y是连续拟凸的；

(ii) $f(x)+\psi(y,x)$关于x是下半连续拟凸的．

则抽象变分不等式

$$\psi(y,x)\geqslant f(y)-f(x),\qquad \forall x\in X \tag{4.10}$$

在X中有解．

证　对任一有限子集$A\subset X$，令$C_A=\mathrm{co}A$．则$(X,\{C_A\})$是一紧W-空间，再令$\varphi(x,y)=-\psi(y,x)$，则结论可用定理4.2得出．

证毕．

注　所谓$g(x,y):X\times X\to R$，$g(x,y)$关于变量y是拟凸的，指的是$\forall r\in R$，$\{y\in Y:g(x,y)\leqslant r\}$是凸集，$\forall x\in X$．$g(x,y)$关于$x$拟凸定义类似．

五、截口定理对不动点问题的应用

下面我们给出截口定理对不动点问题的应用．

定理5.1　设$(X,\{C_A\})$为一紧W-空间，$F:X\to 2^X$为具有非空闭值的集值映射，满足

(i) $\forall\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}F(x_i)$连通；

(ii) $F^{-1}(y)$开，$\forall y\in Y$；

(iii) $\forall y\in X$，$X\backslash F^{-1}(y)$是W-凸的．

则F在X中有不动点．

证　令$M=\{(x,y)\in X\times X:y\notin F(x)\}$，则$\forall x\in X$，$F(x)=\{y\in X:(x,y)\notin M\}$．

若F在X中没有不动点，则$\forall x\in X$，恒有$x\notin F(x)$．从而$F^{-1}(y)=\{x\in X:y\in F(x)\}\neq X$，$\forall y\in X$．(这是因$y\notin F^{-1}(y)$)

若F为GW-KKM映射．由$\{y\in X:(x,y)\in M\}=\{y\in X:y\notin F(x)\}=X\backslash F(x)$．而$F$具有闭值知，定理3.2的条件(i)满足．又由条件(i)知定理3.2的条件(ii)满足．由条件(ii)定理3.2的条件(iii)也满足．从而，由定理3.2知，$\exists\, y_0\in X$，使集

$$\{x\in X:(x,y_0)\in M\}=\phi$$

即$\{x\in X:y_0\notin F(x)\}=\phi$．于是，$\forall x\in X$，有$y_0\in F(x)$即$x\in F^{-1}(y_0)$，即有$F^{-1}(y_0)=X$，这和$F^{-1}(y)\neq X$，$\forall y\in X$相矛盾．由此矛盾知$F$不是GW-KKM映射．

又$\forall y\in X$，集$\{x\in X:(x,y)\in M\}=\{x\in X:y\notin F(x)\}=\{x\in X:x\notin F^{-1}(y)\}=X\backslash F^{-1}(y)$. 于是由条件(iii)知，定理3.1的条件(ii)满足，从而，由定理3.1知，$\exists\, x_0\in X$，$z_0\in F(x_0)$ 使得$(x_0,z_0)\in M$，即$z_0\notin F(x_0)$，相矛盾，由此矛盾知F在X中有不动点。

注 定理4.2将Browder[5]的不动点定理推广到了W-空间。

参 考 文 献

[1] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Some further generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 484—490.

[2] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Applications of generalized Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem to variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **137** (1989), 46—58.

[3] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Fixed point theorems and vector-valued minimax theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **146** (1990), 363—373.

[4] Browder, F. E., A new generalization of the Schauder fixed point theorem, *Math. Ann.*, **174** (1967), 285—290.

[5] Browder, F., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, **177** (1968). 283—301.

[6] Chang Shih-sen and Ma Yi-hai, Generalized KKM theorem on H-space with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **163** (1992), 406—421.

[7] Chang Shih-sen and Zhang Ying, Generalized KKM theorem and variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **159** (1991), 208—223.

[8] Fan, Ky, A minimax inequality and applications, *Inequalities* **Ⅲ**, Ed. by O. Shisha, Academic Press, New York (1972), 103—113.

[9] Fan, Ky, Fixed point and related theorems for noncompact convex sets, *Game Theory and Related Topics*, Eds. by O. Moeschlin and D. Pallaschke, North-Holland (1979), 151—156.

[10] Fan, Ky, Some properties of convex set related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, **266** (1984), 519—537.

[11] Ko, H. M. and K. K. Tan, A coincidence theorem with application to minimax inequalities and fixed point theorems, *Tamkang J. Math.*, **17** (1986), 37—43.

[12] Lassonde, M., On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics, *J. Math. Anal. Appl.*, **97** (1983), 151—201.

[13] Park, S., Generalizations of Ky Fan's Matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 164—176.

[14] Shih, M. H. and K. K. Tan, A geometric property of convex sets with applications to minimax type inequalities and fixed point theorems, *J. Austral. Math. Soc. Series A*, **45** (1988), 169—183.

[15] Shih, M. H. and K. K. Tan, The Ky Fan minimax principle, sets with convex sections and variational inequalities, *Differential Geometry-Calculus of Variation and Their Applications*, Eds. by M. Rassias and T. Rassia, New York (1985), 471—481.

[16] Takahashi, W., Fixed point minimax and Hahn-Banach theorems *Proc*

Sympos. Pure Math., **45** (Part 2) (1986), 419—427.

[17] Tan, K. K., Comparison theorems on minimax inequalities, variational inequalities and fixed point theorems, *J. London Math. Soc.*, **23** (1983), 555—562.

[18] Yen, C. L., A minimax inequality and its applications to variational inequalities, *Paccific J. Math.*, **97** (1981), 477—481.

[19] Gwinner, J., On some fixed points and variational inequalities——A circular tour, *Nonlinear Anal.*, 5(5) (1981), 565—583.

Topological Version of Section Theorems with Applications

Zhang Shi-sheng

(Sichuan University, Chengdu)

Wu Xian

(Zhaotong Teacher's College, Zhaotong, Yun'nan)

Abstract

In this paper some new types of KKM theorem and section theorems are given. As applications, we shall use these results to study the existence problems of solutions for three kinds of variational inequalities and fixed point problem for set-valued mapping. The results presented in this paper improve and extend the main results in[1～19].

Key words section theorem, KKM theorem, variational inequality