应用数学和力学，第16卷 第2期（1995年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

概率度量空间中若干新的不动点定理*

朱 传 喜

（南昌大学（南区）数学教研室，1993年7月25日收到）

摘 要

本文提出了Z-M-PN空间的概念，在概率度量空间中我们得到了若干新的不动点定理。同时，一些著名的不动点定理在概率度量空间中得到了推广，诸如：Schauder 不动点定理、郭大钧不动点定理和 Petryshyn 不动点定理被推广到 M-PN 空间；Altman 不动点定理被推广到 Z-M-PN空间。

关键词 拓扑度 概率度量空间 算子 紧连续算子 Z-M-PN空间

设R表示一切实数之集合，R^+表示一切非负实数的集合。映象$f:R\to R^+$称为分布函数，如果它是非减的，左连续的，又满足：

$$\inf_{t\in R} f(t)=0,\quad \sup_{t\in R} f(t)=1$$

用$\mathscr{D}$表示一切分布函数的集合。

本文假定t-模Δ是连续的。

定义1[1] Menger 概率线性赋范空间 $(E,\ F,\ \Delta)$（简称为M-PN空间），其中E是一实线性空间，映象$F:E\to\mathscr{D}$（我们记分布函数$F(x)$为f_x，又$f_x(t)$表示f_x在$t\in R$的值）并且f_x，$x\in E$满足下面的条件：

(PN-1) $f_x(0)=0$；

(PN-2) $f_x(t)=H(t)$，$\forall t\in R$，当且仅当$x=0$；

(PN-3) 对任一实数$\alpha\neq 0$，$f_{\alpha x}(t)=f_x(t/|\alpha|)$；

(PN-4) 对任意的x，$y\in E$，t_1，$t_2\in R$，若$f_x(t_1)=1$，$f_y(t_2)=1$，则有：$f_{x+y}(t_1+t_2)=1$。

(PN-5) 对任意的x，$y\in E$及一切的t_1，$t_2\in R^+$有$f_{x+y}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(f_x(t_1),\ f_y(t_2))$。

下面证明M-PN空间中新的不动点定理。

引理1[2] 设D是一个M-PN空间(E,F,Δ)的开子集，且$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$，假设E是无限维的，$T:\bar{D}\to E$是一个紧连续算子，同时满足如下条件：

(i) $\theta\notin\overline{T(\partial D)}$；

(ii) $Tx\neq\alpha^2 x$，$\forall\alpha\in(0,1]$，$x\in\partial D$。

* 张石生推荐，1993年5月31日第一次收到。
江西省自然科学基金资助项目

那么 $\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=0$。

定理1 设D是一个M-PN空间(E,F,Δ)的一个开子集，且$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$，又设E是无限维的，$T:\bar{D}\to E$是一个紧连续算子，$\theta\in D$同时$\forall x\in\partial D$，$x\neq Tx, f_{Tx}(t)\leqslant f_{\alpha x}(t)$，$\forall t>0$，$\alpha\in(0,1]$。那么 $\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=0$。

证明 由已知条件$\forall x\in\partial D$，$f_{Tx}(t)\leqslant f_{\alpha x}(t)$，$\forall t>0$可知$\theta\notin T(\partial D)$和$Tx\neq\alpha^2x$，$\forall\alpha\in(0,1]$。事实上，

1° 假设$\theta\in\bar{T}(\partial D)$，则存在$x_n\in\partial D$，使得$T(x_n)\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$，即$\forall\varepsilon>0$，$\lambda>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，$f_{Tx_n}(\varepsilon)>1-\lambda$。

又因为$f_{\alpha x_n}(\varepsilon)\geqslant f_{Tx_n}(\varepsilon)>1-\lambda$。所以$\alpha x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$，从而$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}\theta$，因为$\partial D$闭（关于$\mathscr{T}$闭），所以$\theta\in\partial D$，矛盾于$\theta\in D$。因此$\theta\notin\overline{T}(\partial D)$。

2° 假设存在$x_0\in\partial D$，使得$Tx_0=\alpha^2x_0$，则$\alpha\neq1$，（否则$\alpha=1$，即有$Tx_0=x_0$，$x_0\in\partial D$与已知的条件$Tx\neq x$，$\forall x\in\partial D$相矛盾）.所以$\alpha\in(0,1)$，于是：

$$
\begin{aligned}
f_{Tx_0}(t)&=f_{\alpha^2x_0}(t)=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\geqslant f_{Tx_0}\left(\frac{t}{\alpha}\right)=f_{\alpha^2x_0}\left(\frac{t}{\alpha}\right)\\
&=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)\geqslant f_{Tx_0}\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)=f_{\alpha^2x_0}\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha^3}\right)\\
&\geqslant f_{Tx_0}\left(\frac{t}{\alpha^3}\right)=f_{\alpha^2x_0}\left(\frac{t}{\alpha^3}\right)=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha^4}\right)\geqslant f_{Tx_0}\left(\frac{t}{\alpha^4}\right)\\
&=f_{\alpha^2x_0}\left(\frac{t}{\alpha^4}\right)=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha^5}\right)\geqslant\cdots=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha^{n-1}}\right)\\
&\geqslant f_{Tx_0}\left(\frac{t}{\alpha^{n-1}}\right)=f_{\alpha^2x_0}\left(\frac{t}{\alpha^{n-1}}\right)=f_{\alpha x_0}\left(\frac{t}{\alpha^n}\right)\geqslant f_{Tx_0}\left(\frac{t}{\alpha^n}\right)
\end{aligned}
$$

因为$1/\alpha>1$,在$f_{Tx_0}(t)\geqslant f_{Tx_0}(t/\alpha^n)$两边(让$n\to\infty$)取极限可得$f_{Tx_0}(t)=H(t)$.由(PN-2)知：$Tx_0=\theta$，即$\theta\in T(\partial D)\subset T\overline{(\partial D)}$与已证的1°$\theta\notin T\overline{(\partial D)}$相矛盾.故$Tx\neq\alpha^2x,\alpha\in(0,1]$，$\forall x\in\partial D$。因1°，2°及已知条件满足引理1[2]的全部条件，故由引理1[2]可知：

$\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=0$。

定理2 设T是一个紧连续算子，D是一个M-PN空间(E,F,Δ) 的开子集，$T:\bar{D}\to E$，$\theta\in D$，且$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$。如果满足：$\theta\notin T(\partial D)$及$f_{Tx}(t)\geqslant f_{Tx-x}(t)$，$\forall t>0,x\in\partial D$。那么：$\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=1$，亦即$T$在$D$内必具有不动点。

证明 令$h_\lambda(x)=x-(1-\lambda)Tx$，$\lambda\in[0,1],\forall x\in\bar{D}$。下证$\theta\notin h_\lambda(\partial D),\forall\lambda\in[0,1]$。事实上，假设$\theta\in h_\lambda(\partial D)$，即存在$\lambda_0\in[0,1]$和$x_0\in\partial D$，使得：$\theta=h_{\lambda_0}(x_0)$，

即：
$$x_0-(1-\lambda_0)Tx_0=\theta \tag{1}$$

易证$x_0\neq Tx_0$，$x_0\in\partial D$，（事实上，假设$x_0\in\partial D$，$x_0=Tx_0$，则有$Tx_0-x_0=0$，由$f_{Tx_0}(t)\geqslant f_{Tx_0-x_0}(t)$ $\forall t>0$，得：$f_{Tx_0}(t)\geqslant f_{Tx_0-x_0}(t)=H(t)$。即：$f_{Tx_0}(t)=H(t)$，$\forall t>0$，即有$Tx_0=\theta$，即：$\theta\in T(\partial D)$矛盾于$\theta\notin T(\partial D)$）。因此，在(1)式中$\lambda_0\neq0,\lambda_0\neq1$(否则$x_0=\theta\in\partial D$，与$\theta\in D$相矛盾)，故$\lambda_0\in(0,1)$。由(1)式可得$Tx_0-x_0=\lambda_0Tx_0$，因而我们有：

$$
\begin{aligned}
f_{Tx_0}(t)&\geqslant f_{Tx_0-x_0}(t)=f_{\lambda_0x_0}(t)=f_{Tx_0}(t/\lambda_0)\geqslant f_{Tx_0-x_0}(t/\lambda_0)\\
&=f_{\lambda_0Tx_0}(t/\lambda_0)=f_{Tx_0}(1/\lambda_0^2)\geqslant\cdots\geqslant\cdots
\end{aligned}
$$

$$=f_{Tx_0}(t/\lambda_0^n),\qquad n=1,2,\cdots,\ \forall t>0$$

即： $f_{Tx_0}(t)\geqslant f_{Tx_0}(t/\lambda_0^n)$， $\forall t>0$，$0<\lambda_0<1$，$n=1,2,\cdots$ (2)

在(2)式两边（让$n\to\infty$）取极限，由分布函数的定义可知：$f_{Tx_0}(t)=H(t)$，$\forall t>0$，由(PN-2)知：$Tx_0=\theta$，即：$\theta\in T(\partial D)$，此与$\theta\notin T(\partial D)$相矛盾。故$\theta\notin h_\lambda(\partial D)$，$\forall\lambda\in[0,1]$。

据[2]中拓扑度的同伦不变性可得：

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=\mathrm{Deg}(I,\ D,\ \theta)=1\neq 0$$

又据[2]中拓扑度的可解性知T在D内必具有一个不动点。

定理3 设D_1，D_2是无限维M-PN空间(E,F,Δ)的两个开子集，$\theta\in D_1$，$\bar D_1\subset D_2$，其中Δ是t-模且$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$。

$T:\bar D_2\to E$是紧连续算子，同时下列式子成立：

(H_1) $f_{Tx-x}(t)\leqslant f_{Tx}(t)$，$\forall x\in\partial D_1$，$t>0$。$\theta\notin T(\partial D_1)$

(H_2) $f_{\alpha x}(t)\geqslant f_{Tx}(t)$，$\forall x\in\partial D_2$，$t>0$，$\alpha\in(0,1]$，$x\neq Tx$，那么$T$在$D_2\backslash\bar D_1$中至少有一个不动点。

证明 由条件(H_1)，据定理2可得：

$\mathrm{Deg}(I-T,\ D_1,\ \theta)=1$；由条件$(H_2)$，据定理1可得$\mathrm{Deg}(I-T,\ D_2,\ \theta)=0$。由[2]中拓扑度的可加性得：

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ D_2\backslash\bar D_1,\ \theta)=\mathrm{Deg}(I-T,\ D_2,\ \theta)-\mathrm{Deg}(I-T,\ D_1,\ \theta)$$
$$=0-1\neq 0$$

由[2]中拓扑度的可解性知：T在$D_2\backslash\bar D_1$中必具有一个不动点。

定理4 设D_1，D_2是M-PN空间(E,F,Δ)的两个开子集，$\theta\in D_1$，$\bar D_1\subset D_2$，其中Δ是t-模且$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$。又设$T:\bar D_2\to E$是紧连续算子。E是无限维的。同时下列条件之一成立：

(H_3) $f_{Tx}(t)\leqslant f_{(1-\varepsilon)x}(t)$，$\forall t>0$，$0\leqslant\varepsilon<1$，$x\in\partial D_1$，$x\neq Tx$ (3)

$f_{Tx}(t)\geqslant f_x(t)$， $\forall t>0$，$x\in\partial D_2$ (4)

(H_4) $f_{Tx}(t)\geqslant f_x(t)$， $\forall t>0$，$x\in\partial D_1$ (5)

$f_{Tx}(t)\leqslant f_{(1-\varepsilon)x}(t)$， $\forall t>0$，$0\leqslant\varepsilon<1$，$x\in\partial D_2$，$x\neq Tx$ (6)

那么T在$D_2\backslash\bar D_1$中至少有一个不动点。

证明 由条件(H_3)中(3)式，$0\leqslant\varepsilon<1$，令$\alpha=1-\varepsilon$，据定理1可得：$\mathrm{Deg}(I-T,D_1,\theta)=0$；又由条件$(H_3)$中(4)式，据[2]中定理3.3可得：$\mathrm{Deg}(I-T,\ D_2,\ \theta)=1$。

又由[2]中拓扑度的可加性得：

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ D_2\backslash\bar D_1,\ \theta)=\mathrm{Deg}(I-T,\ D_2,\ \theta)-\mathrm{Deg}(I-T,\ D_1,\ \theta)$$
$$=1-0\neq 0$$

由[2]中拓扑度的可解性知T在$D_2\backslash\bar D_1$中至少有一个不动点。

在条件(H_4)满足的情况下，同法可证其结论成立。

引理2[3] 设$(E_i,\ F_i,\ \Delta_i)$为M-PN空间，$\Delta_i=\min$，$i=1,2$，$D\subset E_1$为概率有界的闭集，$A:D\to E_2$紧连续，则存在$\tilde A:E_1\to E_2$紧连续，使$x\in D$，$\tilde Ax=Ax$，且$\tilde A(E_1)\subset\overline{\mathrm{co}}A(D)$，其中$\overline{\mathrm{co}}A(D)$表$A(D)\subset E_2$的凸概率闭包。

定义2[1] 集$D\subset(E,F,\Delta)$称为E的概率有界子集，如果$\sup\limits_{t>0}\inf\limits_{x\in D}f_x(t)=1$。

引理3[2] 在概率度量空间M-PN空间中，t-模Δ满足条件：$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$。设

D是E中开凸子集，$T:\bar{D}\to E$是一个紧连续算子，$T(\partial D)\subset\bar{D}$，那么$T$在$\bar{D}$内必有一个不动点.

定理5 设(E,F,Δ)为M-PN空间，$\Delta=\min$，D是E中概率有界的闭集. $T:D\to D$是紧连续算子，同时存在E中（有边界的）开凸子集M，使得$M\supset D$. 又设$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$. 那么T在D中必具有一个不动点.

证明 因为$M\supset D$，由引理2[8]知T能被延拓，即$T:\bar{M}\to\overline{\mathrm{co}}T(D)\subset D$是紧连续算子，于是我们有：$T(\partial M)\subset D\subset\bar{M}$，从而根据引理3[2]可知$T$在$\bar{M}$中具有不动点$x^*$，由于$T(\bar{M})\subset D$，故必有$x^*\in D$（事实上，因$T$在$\bar{M}$中具有不动点$x^*$，故$x^*\in\bar{M}$即：$Tx^*=x^*\in T(\bar{M})\subset D$，故$x^*\in D$）.

定义3 如果（概率线性赋范空间）M-PN空间(E,F,Δ)满足下列条件：

E是实数域R上的代数[7]，且有

(1°) E对乘法封闭，即$\forall x$，$y\in E$，则$x\cdot y\in E$.

(2°) $\forall\alpha\in R$，$\forall x,y\in E$，$(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y)=\alpha(x\cdot y)$.

则称(E,F,Δ)为Z-M-PN空间.

在M-PN空间中，由PN空间的定义可知：E是实线性空间. 又M-PN空间是PN空间的子空间，因此在Z-M-PN空间中，由E是实线性空间，同时E又是实数域R上的代数可得：

(3°) $\forall\alpha$，$\lambda\in R$，$\forall x,y\in E$，$\alpha x\cdot\lambda y=(\alpha\lambda)(x\cdot y)$.

在Z-M-PN空间中记$x\cdot x\cdot x\cdots\cdots x=x^n$，其中$n$为自然数.

从定义3可知Z-M-PN空间是M-PN空间(E,F,Δ)中E为R上的代数时的一个空间. 在Z-M-PN空间中，因为$\forall\lambda\in R$，$x\in E$，$\lambda^n x^n\in E$，$n\in N$，故$f_{\lambda^n x^n}$有意义，且$f_{\lambda^n x^n}\in\mathscr{D}$.

例1 设C表示复数域，R表示实数域，在空间(C,F,Δ)中，t-模Δ为Δ_3，即：$\forall a$，$b\in[0,1]$有：$\Delta_3(a,b)=\min\{a,b\}$，$F:C\to\mathscr{D}$，$\forall x\in C$，记$F(x)$为$f_x$，又$f_x(t)$表$f_x$在$t\in R$的值又设$f_x(t)=H(t-|x|)$，$\forall t\in R$，$x\in C$. 按照通常运算符号. 那么$(C,F,\Delta)$是Z-M-PN空间.

证明 由C是复数域可知：对于通常的加法和乘法运算，C是R上的代数[7]，C又是实线性（复）空间.

同时，$\forall\lambda\in R$，$x\in C$有$\lambda^n x^n\in C$，于是$f_{\lambda^n x^n}$有意义.

又由题设条件$f_x(t)=H(t-|x|)$，$\forall t\in R$，$x\in C$，即：

$$f_x(t)=\begin{cases}0 & \text{当}t\leqslant|x|\text{时}\\ 1 & \text{当}t>|x|\text{时}\end{cases}$$

可知：$f_x(t)$满足定义1[1]中(PN-1)至(PN-5)的所有条件.（这是容易验证的，注意在验证$f_x(t)$满足(PN-5)时要用到t-模Δ为Δ_3）.

因此，根据定义1[1]和定义3可知(C,F,Δ)是Z-M-PN空间.

在例1中把C换成R，其结论同样成立.

定理6 设D是Z-M-PN空间(E,F,Δ)的开子集，$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$，又设$T:\bar{D}\to E$紧连续，$\theta\in D$，$Tx\neq x$，$\forall x\in\partial D$. 如果T满足条件：

$$f_{(Tx-x)^2}(t)\leqslant f_{(Tx)^2-x^2}(t),\qquad\forall x\in\partial D,\ t>0\tag{7}$$

且至少存在一点$t_1>0$，使得(7)式的小于号($<$)成立，即：

$$f_{(Tx-x)^2}(t_1)<f_{(Tx)^2-x^2}(t_1),\qquad\forall x\in\partial D\tag{8}$$

那么 $\mathrm{Deg}(I-T,D,\theta)=1$，即$T$在$D$中必有不动点.

证明 令$h_\lambda(x)=x-\lambda Tx$，$\forall\lambda\in[0,1]$，$x\in\bar{D}$.下证：$\theta\notin h_\lambda(\partial D)$，$\forall\lambda\in[0,1]$.事实上，假设$\theta\in h_\lambda(\partial D)$即存在$\lambda_0\in[0,1]$，$x_0\in\partial D$，$\theta=x_0-\lambda_0Tx_0$,即：$x_0=\lambda_0Tx_0$则$\lambda_0\neq0$(否则$\lambda_0=0$，$x_0=\theta\in\partial D$，矛盾于$\theta\in D$)，又$\lambda_0\neq1$（否则$\lambda_0=1$，即有$x_0=Tx_0$，其中$x_0\in\partial D$矛盾于 $Tx\neq x$，$\forall x\in\partial D$）.

故$\lambda_0\in(0,1)$．因而$Tx_0=x_0/\lambda_0$，代入(8)式可得：

$$f_{(1/\lambda_0-1)^2x_0}(t_1)<f_{(1/\lambda_0^2-1)x_0}(t_1),\quad (t_1>0\text{且为常数}) \tag{9}$$

由(9)式可得：

$$f_{x_0^2}\left(\frac{\lambda_0^2}{(1-\lambda_0)^2}t_1\right)<f_{x_0^2}\left(\frac{\lambda_0^2t_1}{1-\lambda_0^2}\right) \tag{10}$$

由$f_{x_0^2}\in\mathscr{D}$的非减性可知：

$$[\lambda_0^2/(1-\lambda_0)^2]t_1<\lambda_0^2t_1/(1-\lambda_0^2)$$

即：$1/(1-\lambda_0)^2<1/(1-\lambda_0^2)$

即：$1-\lambda_0^2<(1-\lambda_0)^2$

即：$1-\lambda_0^2<1-2\lambda_0+\lambda_0^2$

即：$2\lambda_0^2-2\lambda_0>0$，$2\lambda_0(\lambda_0-1)>0$

因为 $\lambda_0>0$,所以$\lambda_0>1$ 矛盾于 $0<\lambda_0<1$．因此，$\theta\notin h_\lambda(\partial D)$．

根据[2]中拓扑度的同伦不变性知：

$$\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1\neq0$$

又据[2]中拓扑度的可解性知：T在D中必具有不动点.

定理7 设D是Z-M-PN空间(E,F,Δ)的开子集，$\Delta(t,t)\geqslant t$，$\forall t\in[0,1]$，又设$T:\bar{D}\to E$紧连续，$\theta\in D$，$Tx\neq x$，$\forall x\in\partial D$，如果T满足：

$$f_{(Tx+x)^n}(t)\geqslant f_{(Tx)^n+x^n}(t),\quad \forall x\in\partial D,\ t>0$$

$n>1$且$n\in N$，同时至少存在一点 $t_1>0$ 使得下式成立：

$$f_{(Tx+x)^n}(t_1)>f_{(Tx)^n+x^n}(t_1),\quad \forall x\in\partial D$$

$n>1$且$n\in N$.那么必有$\mathrm{Deg}(I-T,\ D,\ \theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1$即$T$在$D$中必具有一个不动点.

证明 令$h_\lambda(x)=x-\lambda Tx$，$\lambda\in[0,1]$，$\forall x\in\bar{D}$，下证$\theta\notin h_\lambda(\partial D)$，$\lambda\in[0,1]$．事实上，假设$\theta\in h_\lambda(\partial D)$即存在$\lambda_0\in[0,1]$，$x_0\in\partial D$，使得：$\theta=x_0-\lambda_0Tx_0$，则$\lambda_0\neq0$（否则$x_0=\theta\in\partial D$，矛盾于$\theta\in D$)，又$\lambda_0\neq1$（否则$x_0=Tx_0$，$x_0\in\partial D$与$x\neq Tx$，$\forall x\in\partial D$相矛盾）故$\lambda_0\in(0,1)$．由$\theta=x_0-\lambda_0Tx_0$可得：$Tx_0=x_0/\lambda_0$.

又由已知条件可得：

$$f_{(Tx_0+x_0)^n}(t)\geqslant f_{(Tx_0)^n+x_0^n}(t),\quad \forall t>0,\ n>1,\ n\in N \tag{11}$$

在(11)式中t取已知条件中的常数$t_1>0$可得：

$$f_{(Tx_0+x_0)^n}(t_1)>f_{(Tx_0)^n+x_0^n}(t_1) \tag{12}$$

把$Tx_0=x_0/\lambda_0$代入(12)式可得：

$$f_{(x_0/\lambda_0+x_0)^n}(t_1)>f_{(1/\lambda_0^n+1)x_0^n}(t_1)$$

即：$f_{(1/\lambda_0+1)^nx_0^n}(t_1)>f_{(1/\lambda_0^n+1)x_0^n}(t_1)$

即：

$$f_{x_0^n}[\lambda_0^nt_1/(1+\lambda_0)^n]>f_{x_0^n}[\lambda_0^nt_1/(1+\lambda_0^n)],\quad x_0\in\partial D,\lambda_0\in(0,1),t_1>0 \tag{13}$$

由$f_{x_0^n}\in\mathscr{D}$的非减性可得：

$$\frac{\lambda_0^n t_1}{(1+\lambda_0)^n} > \frac{\lambda_0^n t_1}{1+\lambda_0^n}\text{，即：}\frac{1}{(1+\lambda_0)^n} > \frac{1}{1+\lambda_0^n}$$

即：$1+\lambda_0^n > (1+\lambda_0)^n$，即有：

$$1+\lambda_0^n > 1+n\lambda_0+C_n^2\lambda_0^2+\cdots+C_n^k\lambda_0^k+\cdots+C_n^{n-1}\lambda_0^{n-1}+\lambda_0^n$$

即：
$$n\lambda_0+C_n^2\lambda_0^2+\cdots+C_n^{n-1}\lambda_0^{n-1}<0$$

此式矛盾于下式$\lambda_0>0$且

$$n\lambda_0+C_n^2\lambda_0^2+\cdots+C_n^{n-1}\lambda_0^{n-1}>0$$

因此$\theta\notin h_\lambda(\partial D)$，$\forall\lambda\in[0,1]$，据[2]中拓扑度的同伦不变性可得：

$$\mathrm{Deg}(I-T,D,\theta)=\mathrm{Deg}(I,D,\theta)=1\neq 0$$

又据[2]中拓扑度的可解性知T在D内必具有一个不动点.

注1 限于篇幅，在Z-M-PN空间中的其它类型的不动点定理在这里不一一列出.

注2 定理2是 Petryshyn 不动点定理被推广到M-PN 空间，定理4是郭大钧不动点定理被推广到M-PN空间，定理5是 Schauder 不动点定理被推广到 M-PN空间. 定理6是 Altman 不动点定理被推广到Z-M-PN空间.

参 考 文 献

[1] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社（1984）.

[2] 张石生、陈玉清，概率度量空间中的拓扑度理论与不动点定理，应用数学和力学，10（6）（1989），477—486.

[3] 曹菊生、林颐锜，概率赋范线性空间中紧连续算子的延拓定理与拓扑度，南京师大学报，14(1)（1991），1—8.

[4] 龚怀云，我国在概率度量理论研究工作中的成果与展望，《全国第五届不动点、概率度量空间、变分不等式理论学术交流会文献》（1991，5）.

[5] 夏道行等四人，《实变函数论与泛涵分析》（下册），人民教育出版社，北京（1979）.

[6] 李国祯，关于郭大钧定理的推广，江西师大学报，（2）（1984），10—12.

[7] 定光桂，《巴拿赫空间引论》，科学出版社（1984）.

[8] Guo Da-jun, Some fixed point theorems and applications, *Nonlinear Anal.*, **10** (1986), 1293—1302.

[9] Sun Jing-xian, A generalization of Guo's theorem and application, *J. Math. Anal. Appl.*, **126** (1987).

[10] 朱传喜，几类新的扩张映象及其不动点定理，江西师大学报，(3)（1991），244—248.

[11] 李国祯、朱传喜，拟弱连续的算子方程迭代求解问题，《全国第五届不动点、概率度量空间与变分不等式理论学术交流会文献》（1991，5），8—14.

Some New Fixed Point Theorems in Probabilistic Metric Spaces

Zhu Chuan-xi

(Mathematics Division, Nanchang University, Nanchang)

Abstract

In this paper, we introduce the concept of the Z-M-PN space, and obtain some new fixed point theorems in probabilistic metric spaces. Meanwhile, some famous fixed point theoerms are generalized in probabilistic metric spaces, such as fixed point theorem of Schauder, Guo's theorem and fixed point theorem of Petryshyn are generalized in Menger PN-space. And fixed point theorem of Altman is also generalized in the Z-M-PN space.

Key words topological degree, probabilistic metric spaces, operator, compact continuous operator, Z-M-PN space