 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

弱阻尼KdV方程的惯性分形集*

戴 正 德

(云南省应用数学研究所，云南大学数学系)

朱 智 伟

(西江大学数学系)

摘　　要

本文对非自共轭情形下弱阻尼非线性KdV方程，证明了惯性分形集存在且进行了分形维度的上界估计。

关键词　KdV方程　惯性分形　维度

一、引　　言

由于谱锁定条件，许多非线性耗散发展方程，惯性流形的存在至今仍是尚未解决的问题。近来，Eden[2,3]等研究了下面一类方程

$$\frac{du}{dt}+Au+R(u)=f(x) \tag{1.1}$$

其中 A是Banach空间H中线性无界自共轭算子且具有紧的逆算子，$R(u)$ 是 u 的非线性函数。如下结果已得到：

对于定义在有界区域$x\in\Omega$上带有初边值问题的方程(1.1)定义的非线性半群$S(t)$ 如果满足条件：

1° 存在紧正向不变集B，即$S(t)B\subseteq B$ $(\forall t\geqslant 0)$，

2° $S(t)$在B上Lipschitz连续且是收缩的(见定义2)，则存在$(S(t),B)$的惯性分形集M，其分形维$d_F(M)<+\infty$，且对$S(t)B$是指数吸引的。

文[4]证明了二维Navier-Stokes方程，Kuramoto-Sivashinsky方程等均存在惯性分形集。本文考虑当A是非自共轭算子且不具有逆紧算子时的情形。研究了水槽中弱阻尼小振幅长水波方程，利用空间分解技术和Galerkin逼近方法，构造了一类等价范数，构造出紧正向不变集并且导出Lipschitz连续性和收缩性，进而得到惯性分形集的存在性。

二、预　备　知　识

设$D(A)$和V是两个Hilbert空间，$D(A)$在V中稠且紧嵌入V。

考虑

* 张鸿庆推荐。国家自然科学基金资助的课题，1994年 4 月30日收到。

$$\frac{du}{dt}+u_{xxx}+uu_x+\gamma u=f(x) \tag{2.1}$$

其中 $\gamma>0$

$$u(0)=u_0(x) \tag{2.2}$$

$$u(x+l,t)=u(x,t) \qquad (\forall x\in R, t>0,\ l>0\text{常数}) \tag{2.3}$$

定义1[4] 紧集M称为$(S(t),B)$的惯性分形集，如果满足：

1. $S(t)M\subseteq M \qquad (\forall t\geqslant 0)$
2. $d_F(M)<+\infty$
3. 存在正常数c_0,c_1，使$\mathrm{dist}_V(S(t)B,M)\leqslant c_0\exp[-c_1 t] \quad (\forall t\in R_+)$

其中 $\mathrm{dist}_V(A,B)=\sup\limits_{x\in A}\inf\limits_{y\in B}|x-y|_V$.

定义2[4] 若对每个 $\delta\in\left(0,\frac{1}{8}\right)$，存在秩为$N_0(\delta)$的正交投影$P_{N_0}$，使得对$B$中任何$u$和$v$，

或者

$$|S(t)u-S(t)v|_V\leqslant\delta|u-v|_V \tag{2.4}$$

或者

$$|Q_{N_0}(S(t)u-S(t)v)|_V\leqslant|P_{N_0}(S(t)u-S(t)v)|_V \tag{2.5}$$

则说$S(t)$在B中是收缩的. 其中$Q_{N_0}=I-P_{N_0}$

定义3 若对紧集B中任何u和v，存在有界函数$l(t)$，使得

$$|S(t)u-S(t)v|_V\leqslant l(t)|u-v|_V \tag{2.6}$$

则说$S(t)$在B中是Lipsditz连续的，$l(t)$为$S(t)$的Lipschitz常数. 其中$l(t)$与u，v无关.

定理1 设(1.1),(2.2),(2.3)在空间V中满足下述条件：

1. 存在非线性半群$S(t)$和紧吸引子$\mathscr{A}$.
2. 关于$S(t)$存在紧的正向不变集B.
3. $S(t)$在B中Lipschitz连续且收缩.

则M是惯性分形集.

$$M=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_*}S(t)M_* \tag{2.7}$$

$$M_*=\mathscr{A}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}S^j(t_*)(E^k)\right) \tag{2.8}$$

且有

$$d_F(M)\leqslant 1+cN_0 \tag{2.9}$$

$$\mathrm{dist}_V(S(t)B,M)\leqslant c_0\exp[-c_1 t] \tag{2.10}$$

其中 E^k为[4]中所定义(X以B代替)，N_0由(2.5)确定，c,c_0,c_1与B 中元素无关；方程(1.1)中A是线性算子，t_*是某一正常数.

证明 由(2.7),(2.8)立得M的正向不变性. 事实上，如果$t\in(0,t_*)$，因为$S(t_*)\ M_*\subseteq M_*$(从(2.8)即可证明)，我们得到：

$$S(t)M=\bigcup_{t\leqslant s\leqslant t_*+t}S(s)M_*=\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant t_*}S(s)M_*\Big)\cup\Big(\bigcup_{t_*\leqslant s\leqslant t_*+t}S(s)M_*\Big)$$

$$\subseteq M\cup\Big(\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t}S(s)M_*\Big)\quad\subseteq M$$

当$t>t_*$时，记$t=kt_*+s$，$k>0$，$s\in(0,t_*)$，则

$$S(t)M=S^k(t_*)S(s)M\leqslant S^k(t_*)M\subseteq\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t_*}S(s)S^k(t_*)M_*\subseteq\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t_*}S(s)M_*=M.$$

至于分形维有限和指数吸引性，利用(2.7),(2.8)，仿[4]中定理2.1的证明证之。

三、主 要 结 果

记$A=u_{xxx}+\gamma u$，则在$L^2(0,l)$中A是正算子。

记 $\|v\|_m^2=\sum_{k=0}^m l^{2k}|v|_k^2$，$\forall v\in H_l^m$（$v\in H^m$且是以$l$为周期的函数）。

$$|v|_k^2=\int_0^l\left|\frac{\partial^k v}{\partial x^k}\right|^2dx \tag{3.1}$$

又记$D(A)=H_l^2(0,l)$，$V=H_l^1(0,l)$，则$D(A)$在V中稠且紧。$D(A)$和V中范数分别定义为$\|\cdot\|_2$和$\|\cdot\|_1$。若记$A_0=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$，则$A_0$在$H_l^0(0,l)$中有逆紧算子，于是存在离散谱$\lambda_j$和$H_l^2(0,l)$中一组可数基$\{w_j\}$，使得当$j=1,2,\cdots$,时有

$$A_0w_j=\lambda_jw_j\qquad \text{且当}j\to+\infty\text{时有}\ \lambda_j\to+\infty \tag{3.2}$$

由稠密性，$\bigcup_{j=1}^{\infty}\overline{\{w_j\}}$ 张成空间V。

命题1[1]，设$f\in H_l^1$，对于问题(2.1)～(2.3)，成立如下结论：1.若 $u_0\in H_l^1$，则存在唯一解u，

$u\in C(R_+,H_l^1)\cap L^\infty(R_+,H_l^1)$，且当$\|u_0\|_1\leqslant R$时，存在$T(R)>0$，当 $t\geqslant T(R)$有

$$\|u\|_1\leqslant\rho_{\infty,1}$$

2. 若$f\in H_l^2$，成立如下结论：若$u_0\in H_l^2$，则存在唯一解u，

$u\in C(R_+,H_l^2)\cap L^\infty(R_+,H_l^2)$，且当$\|u_0\|_2\leqslant R$时，存在$T_1(R)>0$，当$t\geqslant T_1(R)$时有

$$\|u(t)\|_2\leqslant\rho_{\infty,2} \tag{3.3}$$

其中 $\rho_{\infty,1}$，$\rho_{\infty,2}$是仅与l,γ,f有关的常数。

命题2[1] 若$f\in H_l^2$，则(2.1)～(2.3)定义了非线性半群$S(t)$，且在$D(A)$中存在弱紧吸引子$\mathscr{A}$。

命题3 若$f\in H_l^2$，$u_0\in H_l^2$，则$S(t)$存在V中紧吸引子$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$吸引$D(A)$ 中一切有界集。

证明 由于$D(A)$在V中致密，故$\mathscr{A}$在V中紧，由于$\mathscr{A}$在$D(A)$弱拓扑下吸引 $D(A)$中一切有界集，故$\mathscr{A}$在V强拓扑下吸引$D(A)$中一切有界集。

记 $$B_0=\{u\in V,\ \|u\|_2\leqslant\rho_{\infty,2}\text{且}\|u\|_1\leqslant\rho_{\infty,1}\} \tag{3.4}$$

$$B=\overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T_1(\rho_{\infty,2})}S(t)B_0} \tag{3.5}$$

则可以证明B是$S(t)$在V中正向紧不变集，事实上我们有：

命题4 由(3.5)式定义的B是$S(t)$在V中紧正向不变集，且吸收$D(A)$中任何有界集。

证明 B在V中紧性和吸收$D(A)$中有界集从命题1和$D(A)$在V中致密性得到。事实上，

由于B_0是$D(A)$中吸收集，本身也是有界的，故对于B_0，存在$T_1(\rho_{\infty,2})$，当$t\geqslant T_1(\rho_{\infty,2})$时，有$S(t)B_0\subseteq B_0$，$B_0$有界且吸收$D(A)$中有界集，故$B$在$V$中紧且吸收$D(A)$中有界集。又若$t\in[0,T_1(\rho_{\infty,2})]$，则

$$S(t)B=\bigcup_{t\leqslant s\leqslant t+T_1(\rho_{\infty,2})}S(s)B_0\subseteq\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T_1(\rho_{\infty,2})}S(s)B_0\quad\bigcup\quad\overline{\bigcup_{T_1(\rho_{\infty,2})\leqslant s\leqslant t+T_1(\rho_{\infty,2})}S(s)B_0}$$

$$\subseteq\overline{\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T_1(\rho_{\infty,2})}S(s)B_0}\quad\bigcup\quad\overline{\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t}S(s)S(T_1(\rho_{\infty,2}))B_0}$$

$$\subseteq\overline{\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T_1(\rho_{\infty,2})}S(s)B_0}\quad\bigcup\quad\overline{\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t}S(s)B_0}=B$$

而当$t>T_1(\rho_{\infty,2})$时，记$t=kT_1+t_1$，$t_1\in[0,T_1)$，$k>0$，于是

$$S(t)B=S(t_1)S^k(T_1)B=\overline{\bigcup_{t_1\leqslant s\leqslant t_1+T_1}S(s)S^k(T_1)B_0}\subseteq\overline{\bigcup_{t_1\leqslant s\leqslant t_1+T_1}S(s)B_0}\subseteq B$$

从而B是$S(t)$的紧正向不变集。最后证明$S(t)$在B中Lipschitz连续且是收缩的。我们有。

命题5 $S(t)$在B中是Lipschitz连续且是收缩的。

证明 由命题4知，若$u(0)\in B$，则$S(t)u_0\in B$,对一切$t\geqslant 0$成立。设$u_1(t),u_2(t)$是(2.1)～(2.3)的两个解，$u_1(0)$，$u_2(0)\in B$，记$w(t)=u_1(t)-u_2(t)$，于是$w(t)$满足如下方程。

$$w_t+(\xi(t)w)_x+w_{xxx}+\gamma w=0 \tag{3.6}$$

其中 $\xi(t)=(u_1(t)+u_2(t))/2\in B$。

在(3.6)两边同乘以$w-l^2w_{xx}$，并在$[0,l]$上积分得到。

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_1^2+\gamma\|w\|_1^2=-\frac{1}{2}\int_0^l\{\xi_x(w^2+3l^2w_x^2)-2l^2\xi_{xx}ww_x\}dx \tag{3.7}$$

利用$|v|_{L^\infty}\leqslant|v|_0^{1/2}(2|v|_1+l^{-1}|v|_0)^{1/2}$ (3.8)

有

$$\left|\int_0^l\xi_x(w^2+3l^2w_x^2)dx\right|\leqslant 3\|w\|_1^2|\xi_x|_{L^\infty}\leqslant 3\sqrt{3}\,l^{-3/2}\|w\|_1^2\|\xi\|_2$$
$$\leqslant c\rho_{\infty,2}\|w\|_1^2 \tag{3.9}$$

$$\left|\int_0^l l^2\xi_{xx}ww_xdx\right|\leqslant c|w|_{L^\infty}|\xi_{xx}|_0|w_x|_0\leqslant c|\xi_{xx}|_0|w_x|_0|w|_0^{1/2}(2|w|_1+l^{-1}|w|_0)^{1/2}$$
$$\leqslant c|\xi_{xx}|_0|w|_1(2|w|_0|w|_1+l^{-1}|w|_0^2)^{1/2}$$
$$\leqslant c\|\xi\|_2\|w\|_1^2\leqslant c\rho_{\infty,2}\|w\|_1^2 \tag{3.9$'$}$$

由(3.9)，(3.9)$'$得到：

$$\frac{d}{dt}\|w\|_1^2+2\gamma\|w\|_1^2\leqslant c_1\rho_{\infty,2}\|w\|_1^2 \tag{3.10}$$

这推出 $\|w(t)\|_1^2\leqslant\|w(0)\|_1^2\exp[c_1\rho_{\infty,2}t]$ (3.11)

由定义3知，(3.11)表明$S(t)$在B上是Lipsditz连续的。

将空间V进行A_0谱分解，记$P=P_NV$，$Q=(I-P_N)V=Q_wV$，在Q空间对解u的“小结构”引入等价范：

$$\varphi(Q_Nw)=\int_0^l\{(Q_Nw)^2+l^2(Q_Nw_x)^2-l^2\xi(t)(Q_Nw)^2\}dx \tag{3.12}$$

注意到$|\xi(t)|_{L^\infty}\leqslant|\xi|_0^{1/2}(2|\xi|_1+l^{-1}|\xi|_0)^{1/2}\leqslant(2|\xi|_1|\xi|_0+l^{-1}|\xi|_0^2)^{1/2}$
$$\leqslant(l|\xi|_1^2+2l^{-1}|\xi|_0^2)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\,l^{-1/2}\|\xi\|_1\leqslant\sqrt{2}\,l^{-1/2}\rho_{\infty,2}$$

于是：$\varphi(Q_N w) \leqslant \int_0^l \{(Q_N w)^2 + l^2(Q_N w_x)^2 + \sqrt{2}\, l^{3/2}\rho_{\infty,2}(Q_N w)^2\} dx$

$$\leqslant (1+\sqrt{2}\,\rho_{\infty,2} l^{3/2}) \|Q_N w\|_1^2 \tag{3.12}$$

另一方面，

$$\varphi(Q_N w) \geqslant \int_0^l \{(Q_N w)^2 + l^2(Q_N w_x)^2 - l^2|\xi(t)|(Q_N w)^2\} dx$$

$$\geqslant \int_0^l \{(Q_N w)^2 + l^2(Q_N w_x)^2 - \sqrt{2}\,\rho_{\infty,2} l^{3/2} \lambda_{N+1}^{-1} (Q_N w_x)^2\} dx$$

$$\geqslant \int_0^l \{(Q_N w)^2 + l^2(1 - \sqrt{2}\,\rho_{\infty,2}\, \lambda_{N+1}^{-1} l^{-1/2})(Q_N w_x)^2\} dx$$

取N充分大，使得

$$\lambda_{N+1} \geqslant 2\sqrt{2}\,\rho_{\infty,2} l^{-1/2} \tag{3.13}$$

有 $$\varphi(Q_N w) \geqslant \frac{1}{2}\|Q_N w\|_1^2 \tag{3.14}$$

结合(3.12)′和(3.14)，当(3.13)成立时有

$$\frac{1}{2}\|Q_N w\|_1^2 \leqslant \varphi(Q_N w) \leqslant (1+\sqrt{2}\,\rho_{\infty,2} l^{3/2}) \|Q_N w\|_1^2 \tag{3.15}$$

将(3.6)的解w在P,Q空间分解，得到

$$P_N w_t + (\xi(t) P_N w)_x + (P_N w)_{xxx} + \gamma P_N w = 0 \tag{3.16}$$

$$Q_N w_t + (\xi(t) Q_N w)_x + (Q_N w)_{xxx} + \gamma Q_N w = 0 \tag{3.17}$$

用$2(Q_N w)_{xx} + 2\xi Q_N w$乘以(3.17)两边并在$(0, l)$上积分，整理得到（记$w_1 = Q_N w$）

$$\int_0^l (2w_{1t} + w_{1xx} + 2\xi w_1 w_{1t})\, dx + \int_0^l (2\gamma w_1 w_{1xx} + 2\gamma \xi w_1^2) dx = 0 \tag{3.18}$$

分部积分左边第一、三两项，有

$$2\int_0^l w_{1x} w_{1tx} dx - \int_0^l (2\xi w_1 w_{1t} + \xi_t w_1^2) dx$$

$$+\int_0^l \xi_t w_1^2 dx + 2\gamma\int_0^l w_{1x}^2 dx - 2\gamma\int_0^l \xi w_1^2 dx = 0$$

故有

$$\frac{d}{dt}\int_0^l \{w_{1x}^2 - \xi w_1^2\} dx = -\int_0^l \xi_t w_1^2 dx - 2\gamma\int_0^l w_{1x}^2 dx + 2\gamma\int_0^l \xi w_1^2 dx \tag{3.19}$$

用$2w_1$乘以(3.17)两边且在$(0,l)$上积分，得到：

$$\frac{d}{dt}\int_0^l w_1^2 dx = \int_0^l 2\xi w_1 w_{1x} dx - 2\gamma\int_0^l w_1^2 dx \tag{3.20}$$

用l^2乘以(3.19)且与(3.10)相加得：

$$\frac{d}{dt}\varphi(w_1) + 2\gamma\varphi(w_1) = r(t) \tag{3.21}$$

其中 $$r(t) = -l^2\int_0^l \xi_t w_1^2 dx + 2\int_0^l \xi w_1 w_{1x} dx \tag{3.22}$$

注意 $\xi = (u_1 + u_2)/2$，从而

$$\xi_t = -\xi_{xxx} - \xi u_{1x} - u_2 \xi_x + f - \gamma\xi$$

于是

$$r(t)=\int_0^l l^2w_1^2(\xi_{xxx}+\xi u_{1x}+u_2\xi_x+\gamma\xi-f)dx+2\int_0^l \xi w_1w_{1x}dx \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}l^2\int_0^l w_1^2\xi_{xxx}dx&=-l^2\int_0^l 2w_1w_{1x}\xi_{xx}dx\leqslant 2l^2|\xi_{xx}|_0|w_1|_{L^\infty}|w_{1x}|_0\\&\leqslant 2l^2\rho_{\infty,2}|w_1|_{L^\infty}|w_1|_1\leqslant 2l^2\rho_{\infty,2}|w_1|_0^{1/2}(2|w_1|_1+l^{-1}|w_1|_0)^{1/2}|w_1|_1\\&\leqslant 2l^2\rho_{\infty,2}(2|w_1|_0|w_1|_1+l^{-1}|w_1|_1^2)^{1/2}|w_1|_1\\&\leqslant 2l^{3/2}\rho_{\infty,2}|w_1|_0|w_1|_1+2\sqrt{2}l^2\rho_{\infty,2}|w_1|_0^{1/2}|w_1|_1^{3/2}\\&\leqslant\frac{\gamma}{2}|w_1|_1^2+c|w_1|_1^2\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}\left|l^2\int_0^l w_1^2\xi u_{1x}dx\right|&\leqslant l^2|\xi|_{L^\infty}|u_{1x}|_{L^\infty}|w_1|_1^2\\&\leqslant c_1|w_1|_0^2 \qquad (\text{利用}\xi,u,\in B)\end{aligned} \tag{3.25}$$

同理，

$$\left|\int_0^l l^2w_1^2\xi_xu_2dx\right|\leqslant l^2|\xi_x|_{L^\infty}|u_2|_{L^\infty}|w_1|_1^2\leqslant c_2|w_1|_0^2 \tag{3.26}$$

又，$\left|\int_0^l l^2fw_1^2dx\right|\leqslant c_3|w_1|_0^2 \qquad (f\in H_l^2)$ (3.27)

$$\left|\int_0^l \gamma l^2w_1^2\xi dx\right|\leqslant c_4|w_1|_0^2 \tag{3.28}$$

$$\left|2\int_0^l \xi w_1w_{1x}dx\right|=\left|\int_0^l w_1^2\xi_xdx\right|\leqslant c_5|w_1|_0^2 \tag{3.29}$$

已利用$|\xi_x|_{L^\infty}\leqslant|\xi_x|_0^{1/2}(2|\xi_x|_1+l^{-1}|\xi_x|_0)^{1/2}\leqslant\sqrt{2}l^{-1/2}\rho_{\infty,2}$

综合(3.23)～(3.29)，我们有

$$\frac{d}{dt}\varphi(w_1)+2\gamma\varphi(w_1)\leqslant c_6|w_1|_0^2+\frac{\gamma}{2}|w_1|_1^2 \tag{3.30}$$

其中　c_6仅与$l,\gamma,f,\rho_{\infty,2}$有关的常数。

当N满足(3.13)时，利用(3.14)有

$$\frac{d}{dt}\varphi(w_1)+\gamma\varphi(w_1)\leqslant c_6|w_1|_0^2 \tag{3.31}$$

但是，$|w_1|_0^2\leqslant\lambda_{N+1}^{-1}|w_1|_1^2\leqslant\lambda_{N+1}^{-1}\|w_1\|_1^2$，于是

$$\frac{d}{dt}\varphi(w_1)+\gamma\varphi(w_1)\leqslant c_6\lambda_{N+1}^{-1}\|w_1\|_1^2 \tag{3.31$'$}$$

从而

$$\begin{aligned}\varphi(w_1)&\leqslant\varphi(w_1(0))\exp[-\gamma t]+c_6\lambda_{N+1}^{-1}\int_0^t\|w_1(\tau)\|_1^2\exp[-\gamma(t-\tau)]d\tau\\&\leqslant\varphi(w_1(0))\exp[-\gamma t]+c_6\lambda_{N+1}^{-1}\|w_1(0)\|_1^2\\&\quad\cdot\exp[-\gamma t]\int_0^t\exp[(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)\tau]d\tau\end{aligned}$$

$$\leqslant\varphi(w_1(0))\exp[-\gamma t]+c_6\lambda_{N+1}^{-1}\|w_1(0)\|_1^2(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\exp[c_1\rho_{\infty,2}t]$$

$$\leqslant(1+\sqrt{2}\rho_{\infty,2}l^{3/2})\|w_1(0)\|_1^2\exp[-\gamma t]$$

$$+c_6\lambda_{N+1}^{-1}(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\|w_1(0)\|_1^2\exp[c_1\rho_{\infty,2}t]$$

$$=\|w_1(0)\|_1^2\ [(1+\sqrt{2}\rho_{\infty,2}l^{3/2})\exp[-\gamma t]+c_6\lambda_{N+1}^{-1}(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\exp[c_1\rho_{\infty,2}t]$$

$$=\|w_1(0)\|_1^2[\ (1+\sqrt{2}\rho_{\infty,2}l^{3/2})\exp[-\gamma t]+c_6\lambda_{N+1}^{-1}(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\exp[c_1\rho_{\infty,2}t] \tag{3.32}$$

选取$t_*>0$，使

$$(1+\sqrt{2}\rho_{\infty,2}l^{3/2})\exp[-\gamma t_*]\leqslant\frac{1}{8}\times\frac{1}{64} \tag{3.33}$$

然后选取N充分大，使

$$c_6\lambda_{N+1}^{-1}(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\exp[c_1\rho_{\infty,2}t_*]\leqslant\frac{1}{8}\times\frac{1}{64}\text{即}$$

$$\lambda_{N+1}\geqslant512c_6(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\exp[c_1\rho_{\infty,2}t_*] \tag{3.34}$$

则
$$\varphi(w_1)\leqslant\frac{1}{256}\|w_1(0)\|_1^2 \tag{3.35}$$

这表明，当t_*选定，$S(t_*)$在B上的Lipschitz常数为$\exp[c_1\rho_{\infty,2}t_*]$，且当$N$满足:

$$\lambda_{N+1}\geqslant\max\{512c_6(c_1\rho_{\infty,2}+\gamma)^{-1}\exp[c_1\rho_{\infty,2}t_*],\quad 2\sqrt{2}\rho_{\infty,2}l^{-1/2}\} \tag{3.36}$$

时有

$$\|Q_Nw(t)\|_1^2\leqslant\frac{1}{128}\|Q_Nw(0)\|_1^2 \tag{3.37}$$

而这又表明当$\|Q_Nw(t)\|_1^2>\|P_Nw(t)\|_1^2$时，有

$$\|w(t)\|_1^2=\|P_Nw(t)\|_1^2+\|Q_Nw(t)\|_1^2<2\|Q_Nw(t)\|_1^2\leqslant\frac{1}{64}\|Q_Nw(0)\|_1^2$$

$$\leqslant\frac{1}{64}\|w(0)\|_1^2$$

这就证明了$S(t_*)$在B上是收缩的。至此我们证明了命题5。利用定理 1，结合命题1～5，得到

定理2 若$f\in H_l^2$，$u_0\in H_l^2$，则问题(2.1)～(2.3)定义了非线性半群$S(t)$，且在H_l^1中关于$(S(t),B)$存在惯性分形集M，且

$$d_F(M)\leqslant1+cN_0 \tag{3.38}$$

$$\mathrm{dist}_{H_l^1}(S(t)B,M)\leqslant c_0\exp[-c_1t] \tag{3.39}$$

其中N_0由(3.36)确定，c,c_0,c_1为仅与$f,\gamma,l,\rho_{\infty,2}$有关的常数。

参 考 文 献

[1] Ghidaglia, J. M., Weakly damped forced Kortevig-de-vries equations behave as a finite dimensional dynamical systew in the long time, *J. Diff. Equ.*, 74 (2)(1988), 369—390.

[2] Constantin, P., C. Foias and R. Temam, Attractors representing turbulent flows, *Mem. Amer. Math. Soc.*, (314)(1985), 53.

[3] Constantin, P., C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations, Springer-Verlag(1989).

[4] Eden, A., C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Inertial sets for dissipative evolution equations, *IMA. Preprint. Series*, 812(1991).

The Inertial Fractal Set for Weakly Damped Forced Koreweg-de-Vries Equation

Dai Zheng-de

(*Institute of Applied Mathematics of Yunnan Province; Department of Math., Yunnan Univ., Kunming*)

Zhu Zhi-wei

(*Department of Math., Xijang University*)

Abstract

In this paper we consider weakly damped forced Kortewegde-Vries equation with non-self-adjoint operator. The existence of inertial fractal set M of this equation is proved, the estimates of the upper bounds of fractal dimension for M are also obtained.

Key words KdV equation, inertial fractal, dimension