应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

微分方程$\dot{x}=Q(x,y),\dot{y}=P(x)$的极限环的存在性*

徐荣良 周国才 孙 昭

（太原工业大学，1994年7月25日收到）

摘 要

Филиппов 在文[1]中，利用变换 Liénard 方程

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\quad \frac{dy}{dt}=-g(x) \tag{1}$$

在左右两半平面上的轨线为新方程在右半平面内的积分线的方法，得到了在一定条件下，方程(1)存在极限环的结论．本文应用文[1]的方法，对类型更为广泛的方程

$$\frac{dx}{dt}=Q(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=P(x) \tag{2}$$

进行了探讨，得到了(2)存在稳定极限环的充分条件．

关键词 极限环 轨线 环域 内(外)境界．

在以下的讨论中，总假设 $P(x)\in C^0(-\infty<x<+\infty)$，$Q(x,y),Q'_y(x,y)\in C^0$，$Q'_y(x,y)\neq 0(-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty)$，并满足解的存在与唯一性定理的条件；又 $xP(x)>0$，当$x\neq 0$时；$yQ(0,y)<0$，当$y\neq 0$时；且$\int_0^{\pm\infty}P(x)dx=+\infty$．

令 $z(x)=\int_0^x P(\xi)d\xi$，记$z(x)$的反函数为

$x=h_1(z)\ \ (x>0)$，$x=h_2(z)\ \ (x<0)$，

在$xP(x)>0\,(x\neq 0)$的条件下，上述反函数必存在．于是，方程(2)成为

$$\frac{dz}{dy}=Q_1(z,y) \tag{3}$$

$$\frac{dz}{dy}=Q_2(z,y) \tag{4}$$

其中 $Q_i(z,y)=Q(h_i(z),y)$，$(i=1,2;\ \ z>0)$．

* 杨桂通推荐．1992年 5 月4日收到初稿

定理 设

1) $\exists\delta>0$，当$0<z<\delta$时，$Q_1(z,y)\geqslant Q_2(z,y)$，但$Q_1(z,y)\not\equiv Q_2(z,y)$，并且$Q_1(\delta,0)\geqslant 0\geqslant Q_2(\delta,0)$；

2) $\exists p(y),q(y)\in C^0(-\infty<y<+\infty)$，满足$p(y)>0$，$yq(y)>0(y\neq 0)$，并且

$$\left|\int_0^{\pm\infty}p(y)dy\right|<+\infty,\quad \int_0^{\pm\infty}q(y)dy=+\infty;$$

3) $\exists z_0>\delta$，当$z>z_0$时，$Q_1(z,y)\leqslant Q_2(z,y)$，并且$-p(y)z-q(y)\leqslant Q_2(z,y)$，$Q_1(z,y)\leqslant p(y)z-q(y)$；

4) $\exists M>0$及$K>0(K-M>0)$，当$0\leqslant z\leqslant z_0$，$|y|\geqslant K$时，$|Q_i(z,y)+y|\leqslant M(i=1,2)$，并且当$|y|\geqslant K$时，存在$\alpha>0$，有

$$\int_0^{z_0}[Q_1(z,y)-Q_2(z,y)]dz<-\alpha.$$

则方程组(2)在x-y平面上存在稳定的极限环.

在证明定理之前，先证几个引理.

引理1 若在$0<z<\delta$上$Q_1(z,y)\geqslant Q_2(z,y)$，则在$0<z<\delta$上曲线$Q_1(z,y)=0$位于曲线$Q_2(z,y)=0$的上方；又若在$z_0<z<+\infty(z_0>\delta)$上，$Q_1(z,y)\leqslant Q_2(z,y)$，则在$z_0<z<+\infty$上，曲线$Q_1(z,y)=0$位于曲线$Q_2(z,y)=0$的下方.

证 设$(\xi,\eta)(0<\xi<\delta)$是曲线$Q_2(z,y)=0$上的任一点，按条件，有

$$Q_1(\xi,\eta)\geqslant Q_2(\xi,\eta)=0,$$

从而由函数$Q_i(z,y)(i=1,2)$的连续性及$yQ_i(0,y)<0(y\neq 0)(i=1,2)$知，在$0<z<\delta$内，曲线$Q_1(z,y)=0$应位于曲线$Q_2(z,y)=0$的上方. 同理可证后一情形.

引理2 设有$\delta>0$及η_1和η_2，能使$Q_1(\delta,0)\geqslant 0\geqslant Q_2(\delta,0)$，且满足$Q_1(\delta,\eta_1)=0,Q_2(\delta,\eta_2)=0$，则必有$\eta_1\geqslant 0\geqslant\eta_2$.

证 如果$\eta_1<0$，则由$Q_1(z,y)$的连续性以及$yQ_1(0,y)<0(y\neq 0)$可知，此时有$Q_1(\delta,0)<0$，与假设矛盾，故有$\eta_1\geqslant 0$.

同理可证另一情形.

引理3 设$y_1(z)$和$y_2(z)$分别是方程

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{Q_1(z,y)} \tag{5}$$

和

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{Q_2(z,y)} \tag{6}$$

的满足同一初始条件$y_1(0)=y_2(0)=y_0$的解，如果存在$M>0,K>0(K-M>0)$及$z_0>0$，使得当$0\leqslant z\leqslant z_0$，$|y|\geqslant K$时，$|Q_i(z,y)+y|\leqslant M(i=1,2)$，则对任一$\varepsilon>0$，总可以取$|y_0|$足够的大，使得$y_1(z)$和$y_2(z)$都在$[0,z_0]$上存在，且满足

$$|y_i(z)-y_0|<\varepsilon\qquad(i=1,2;\ z\in[0,z_0]),$$

证 设$F_1(z)$和$F_2(z)$分别是由方程$Q_1(z,y)=0$和$Q_2(z,y)=0$所确定的隐函数. 记

$$m=\max_{[0,z_0]}\{|F_1(z)|,|F_2(z)|\},\quad K_0=\max(K,m,M+1),$$

于是，据假设，在条形域$0\leqslant z\leqslant z_0$，$|y|\geqslant K_0$内，必有$\left|\frac{dy}{dz}\right|\leqslant 1$，故而，只要$|y_0|\geqslant K_0+z_0$，就能使$y_i(z)(i=1,2)$在$[0,z_0]$上存在.

进而证明不等式成立．由于

$$y_i(z)-y_0=\int_0^z \frac{dz}{Q_i(z,y_i(z_1))} \qquad (i=1,2),$$

并注意到$|y_i(z)|\geqslant|y_0|-z_0 \quad (0\leqslant z\leqslant z_0)$，可知

$$|y_i(z)-y_0|\leqslant\frac{z_0}{|y_0|-z_0-M}(i=1,2;\ z\in[0,z_0]),$$

由此可见，对任一$\varepsilon>0$，只要取$|y_0|>K_0+\frac{z_0}{\varepsilon}+z_0$，就有

$$|y_i(z)-y_0|<\varepsilon \qquad (i=1,2;\ z\in[0,z_0]).$$

引理4 设

1) $\exists\,\delta>0$，使$Q_1(\delta,0)\geqslant 0\geqslant Q_2(\delta,0)$，

2) $\exists\,M>0$，$K>0(K-M>0)$，当$0<z<\delta$，$|y|\geqslant K$时，$|Q_i(z,y)+y|\leqslant M\ (i=1,2)$.

则由曲线$Q_1(z,y)=0(Q_2(z,y)=0)$上点$R(\delta,y_R)$起始的方程(3)（方程(4)）的积分线，在它向上（y增加方向）和向下（y减小方向）延伸时，必交y轴于两点$A(0,y_A)$和$B(0,y_B)$，并且有$y_A>0$，$y_B\leqslant 0(y_A\geqslant 0$，$y_B<0)$.

证 据$Q_1(z,y)$的连续性及$yQ_1(0,y)<0(y\neq 0)$知，在曲线$Q_1(z,y)=0$的上方有$\frac{dy}{dz}<0$，而在下方则有$\frac{dy}{dz}>0$，因此，由点R起始的方程(3)的积分线Γ，在它向上和向下两头延伸时都朝向y轴．若向上延伸时不与y轴相交，则由单调性可知，当$y\to+\infty$时，$\frac{dy}{dz}\to-\infty$，这与$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{Q_1(z,y)}\geqslant-\frac{1}{K-M}$矛盾．故$\Gamma$在上延时必交$y$轴于一点$A(0,y_A)$．同理可知，$\Gamma$在下延时也必交$y$轴于一点$B(0,y_B)$，再据引理2及$\Gamma$的单调性，有$y_A>0$，$y_B\leqslant 0$．同理可证括号内的情形．

引理5 设

1) $\exists\,p(y),q(y)\in C^0(-\infty<y<+\infty)$，满足$p(y)>0$，$yq(y)>0(y\neq 0)$，并且

$$\int_0^{+\infty}p(y)dy<+\infty,\int_0^{+\infty}q(y)dy=+\infty$$

$$\left(\int_0^{-\infty}p(y)dy>-\infty,\int_0^{-\infty}q(y)dy=+\infty\right);$$

2) $\exists\,z_0>0$，当$z>z_0$时，

$$Q_1(z,y)\leqslant p(y)z-q(y) \qquad (Q_2(z,y)\geqslant-p(y)z-q(y));$$

3) $\exists\,M>0$，$K>0(K-M>0)$，当$0\leqslant z\leqslant z_0,y\geqslant K(y\leqslant -K)$时，

$$Q_1(z,y)\leqslant -y+M \qquad (Q_2(z,y)\geqslant -y-M).$$

则由负（正）y轴上任一点$F(0,y_F)$（$G(0,y_G)$）起始的方程(3)（(4)）的积分线Γ，在它向上（向下）延伸时，必交y轴于一点$E(0,y_E)$，且$y_E\geqslant 0(H(0,y_H)$，且$y_H\leqslant 0)$.

证 若从点$F(0,y_F)(y_F<0)$出发的方程(3)的积分线Γ与直线$z=z_0$相交于一点$R(z_0,y_R)$，此时它必落在曲线$Q_1(z,y)=0$的下侧，这是因为在该点处有$\frac{dy}{dz}>0$.

考虑方程

$$\frac{dw}{dy}=p(y)w-q(y) \tag{7}$$

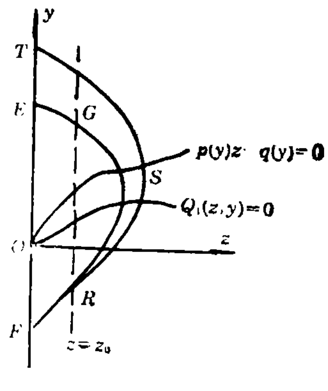

图 1

由点R起始的积分线Γ':

$$w=w(y)\quad(y>y_R).$$

它可表为

$$w=\exp\left[\int_{y_R}^{y}p(\xi)d\xi\right]\left[z_0-\int_{y_R}^{y}q(\xi)\exp\left[-\int_{y_R}^{\xi}p(\tau)d\tau\right]d\xi\right],$$

今证Γ'必与正y轴相交. 由条件1)知$\int_{y_R}^{+\infty}p(y)dy$收敛, 设$\beta=\int_{y_R}^{+\infty}p(y)dy(\beta>0)$, 于是有

$$\int_{y_R}^{y}q(\xi)\exp\left[-\int_{y_R}^{\xi}p(\tau)d\tau\right]d\xi>e^{-\beta}\int_{y_R}^{y}q(\xi)d\xi.$$

由于$\int_0^{+\infty}q(y)dy=+\infty$, 故当$y\to+\infty$时,

$$\int_{y_R}^{y}q(\xi)\exp\left[-\int_{y_R}^{\xi}p(\tau)d\tau\right]d\xi\to+\infty,$$

所以, 必存在$y_T>0$, 使$w(y_T)=0$, 即Γ'与y轴有交点$T(0,y_T)(y_T>0)$.

现据条件2)应用微分不等式定理, 对方程(3)和(7)的过点R的积分线Γ和Γ'进行比较, 可知Γ在上延时必回头交直线$z=z_0$于曲线$Q_1(z,y)=0$上方一点$G(z_0,y_G)$. 再由条件3), 运用与引理4同样的论证, 可知当Γ继续上延时, 必交y轴于一点$E(0,y_E)$, 并且$y_E\geqslant0$ (图1).

若从点$F(0,y_F)(y_F<0)$出发的方程(3)的积分线Γ在上延时不与直线$z=z_0$相交, 则在$0<z<z_0$内, 它必与曲线$Q_1(z,y)=0$相交, 从而由条件3)知引理的结论为真.

同理可证括号内的情形.

定理的证明 应用 Poincaré环域定理.

一) 环域内境界的构成

取条件1)中之δ, 过曲线$Q_1(z,y)=0$上点$R(\delta,y_R)$引方程(3)的积分线Γ_1, 由引理4和引

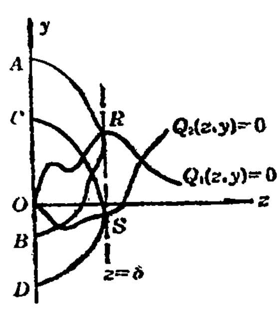

图 2

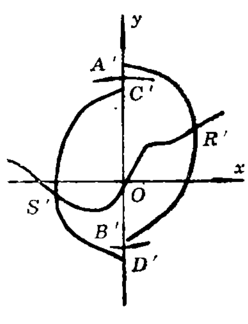

图 3

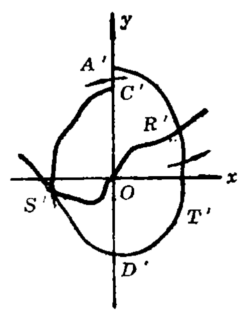

图 4

理2知，它交y轴于两点$A(0,y_A)$和$B(0,y_B)$，且有$y_A>0$，$y_B\leqslant 0$。同样，过曲线$Q_1(z,y)=0$上点$S(\delta,y_S)$引方程(4)的积分线Γ_2，它也交y轴于两点$C(0,y_C)$和$D(0,y_D)$，且有$y_C\geqslant 0$，$y_D<0$。据条件1)，对方程(3)和(4)应用微分不等式定理，可知$y_A>y_C$，$y_B>y_D$（图2）。

现将z-y右半平面映射回x-y平面。如果$y_B\neq 0$，$y_C\neq 0$，则由于在$\overline{A'C'}$上$\dfrac{dx}{dt}<0$，在$\overline{D'B'}$上$\dfrac{dx}{dt}>0$，故闭曲线$\overline{A'C'}\cup\widehat{C'S'D'}\cup\overline{D'B'}\cup\widehat{B'R'A'}$即构成所需环域的内境界（图3）。

如果$y_B=0$，$y_C\neq 0$，此时，可由点D出发引方程(3)的积分线Γ_1，由条件1)知，它必交直线$z=\delta$于S下方一点T，这样，在$x-y$平面上得一闭曲线$\overline{A'C'}\cup\widehat{C'S'D'}\cup\widehat{D'T'}\cup\overline{T'R'}\cup\widehat{R'A'}$，由于在$\overline{T'R'}$上$\dfrac{dx}{dt}>0$，故可以此作为环域的内境界（图4）类似地可以讨论$y_B\neq 0$，$y_C=0$及$y_B=y_C=0$的情形。

二）环域外境界的构成

由引理5，从负y轴上任一点$F(0,y_F)(y_F<0)$出发的方程(3)的积分线Γ_1，在它上延时必交正y轴于一点$E(0,y_E)(y_E\geqslant 0)$.在一)中已看到，与Γ_1对应的方程(2)的轨线γ^+，不可能走向奇点O，因此必有$y_E>0$

另外，当y_F减小时，y_E要增加，设

$$\lim_{y_F\to-\infty} y_E=y_G.$$

则或者$0<y_G<+\infty$，或者$y_G=+\infty$。分别讨论如下。

1. $0<y_G<+\infty$

由引理5知，从点$G(0,y_G)(y_G>0)$出发的方程(4)的积分线Γ_2在下延时要交y轴于一点$H(0,y_H)$，且由一)的讨论知$y_H<0$；而从点H出发的方程(3)的积分线Γ_1在上延时交y轴于一点$L(0,y_L)$，且$y_L>0$，显然有$y_L<y_G$（图5）。

现将$z-y$右半平面映射为$x-y$平面，得闭曲线$\widehat{G'H'L'}\cup\overline{L'G'}$，由于在$\overline{L'G'}$上$\dfrac{dx}{dt}<0$，即构成环域的外境界（图6）。

2. $y_G=+\infty$

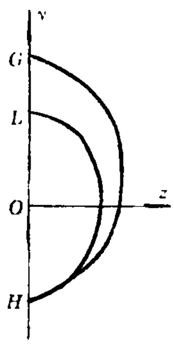

图 5

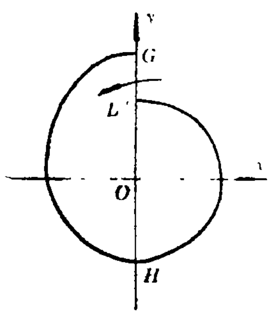

图 6（图中G应为G'）

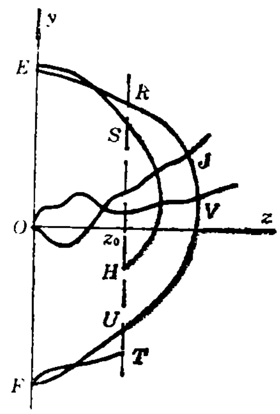

图 7

取方程(3)的一条“足够大”的积分线$\widehat{EVF}$，使y_E和y_F都满足引理3论证的要求。

过点E和F分别引方程(4)的积分线，设它们和直线$z=z_0$的交点为S和T（图7）。可以证

明必有

$$y_S<y_R \text{及} y_T<y_U.$$

首先证明$y_S<y_R$.

设$y_1(z)$和$y_2(z)$分别是方程(5)和(6)的满足同一初始条件$y_1(0)=y_2(0)=y_E$的解．对方程(5)和(6)由$z=0$到$z=z_0$积分，得

$$y_1(z_0)=y_E+\int_0^{z_0}\frac{dz}{Q_1(z,y_1(z))},$$

$$y_2(z_0)=y_E+\int_0^{z_0}\frac{dz}{Q_2(z,y_2(z))},$$

易见下列等式成立：

$$\begin{aligned}
&y_E^2(y_2(z_0)-y_1(z_0))\\
&=y_E^2\int_0^{z_0}\left(\frac{1}{Q_2(z,y_2(z))}-\frac{1}{Q_1(z,y_1(z))}\right)dz\\
&=\int_0^{z_0}\frac{y_E^2(Q_1(z,y_1(z))-Q_1(z,y_E))}{Q_1(z,y_1(z))Q_2(z,y_2(z))}dz\\
&\quad+\int_0^{z_0}\frac{y_E^2(Q_2(z,y_E)-Q_2(z,y_2(z)))}{Q_1(z,y_1(z))Q_2(z,y_2(z))}dz\\
&\quad+\int_0^{z_0}\left(\frac{y_E^2}{Q_1(z,y_1(z))Q_2(z,y_2(z))}-1\right)(Q_1(z,y_E)-Q_2(z,y_E))dz\\
&\quad+\int_0^{z_0}(Q_1(z,y_E)-Q_2(z,y_E))dz\\
&=I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

下面分别考察每一个积分．

首先，据条件4)及引理3，当y_E充分大时，有

$$\left|\frac{Q_i(z,y_i(z))-Q_i(z,y_E)}{Q_1(z,y_1(z))Q_2(z,y_2(z))}\right|$$

$$\leqslant\frac{N_i|y_i(z)-y_E|}{(y_1(z)-M)(y_2(z)-M)}<\frac{\varepsilon N_i}{(y_E-\varepsilon-M)^2}\qquad(i=1,2;\ z\in[0,z_0]),$$

其中 $N_i=\max\limits_{[0,z_0]}\left|\frac{\partial}{\partial y}Q_i(z,y)\right|(i=1,2)$，所以，当$y_E\to+\infty$时，一致地有$I_1=I_2=o(1)$.

再考察I_3．同理有

$$\frac{y_E^2}{(y_E+\varepsilon+M)^2}<\frac{y_E^2}{Q_1(z,y_1(z))Q_2(z,y_2(z))}<\frac{y_E^2}{(y_E-\varepsilon-M)^2},$$

由此立即可知，当$y_E\to+\infty$时，在$[0,z_0]$上一致地成立

$$\frac{y_E^2}{Q_1(z,y_1(z))Q_2(z,y_2(z))}\to1.$$

又因

$$|Q_1(z,y_E)-Q_2(z,y_E)|\leqslant|Q_1(z,y_E)+y_E|+|Q_2(z,y_E)+y_E|\leqslant2M,$$

在$[0,z_0]$上为有界，所以，当$y_E\to+\infty$时，也一致地有$I_3=o(1)$.

此外，据条件4)，有$I_4<-a(a>0)$.

综合以上讨论，即知当y_E充分大时，必有$y_2(z_0)-y_1(z_0)<0$，这就证明了$y_S<y_R$.

同理可证$y_T<y_U$.

由此，再据条件3)，并运用微分不等式定理，可知，由点S起始的方程(4)的积分线，在它下延时，必交直线$z=z_0$于U的上方一点H.

这样，在$x-y$平面上就形成一闭曲线$\overline{H'T'}\cup\widehat{T'V'J'H'}$. 由于在线段$\overline{H'T'}$上$\dfrac{dx}{dt}>0$，从而构成所需环域的外境界（图8）.

定理证毕.

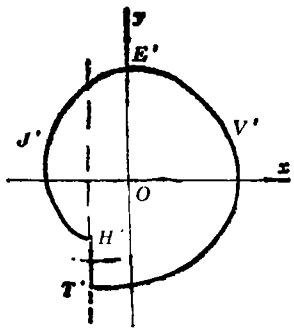

图 8

参考文献

[1] Филиппов А. Ф., Достаточное условие существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка, *Мат. Сб.*, 30(72)(1952),1, 171—180.

[2] 叶彦谦等，《极限环论》，上海科学技术出版社（1984）.

[3] 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜等，《微分方程定性理论》，科学出版社（1985）.

[4] 葛渭高，方程$\dot{x}=h(y)-F(x)$, $\dot{y}=-g(x)$的极限环存在定理，应用数学学报，11(2)(1988).

The Existence of Limit Cycles For The System $\dot{x}=Q(x,y)$, $\dot{y}=P(x)$

Xu Rong-liang Zhou Guo-cai Sun Zhao

(*Department of Applied Mathematics and Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan*)

Abstract

In this paper, we use A. F. Filippov's method on the more generalized system $\dot{x}=Q(x,y)$, $\dot{y}=P(x)$, a theorem of the existence of stable limit cycles is obtained.

Key words limit cycle, trajectory, annular region, inner (outer) boundary