

# 差分格式的余项效应分析及其应用\*

刘儒勋 周朝晖

(中国科学技术大学数学系, 1992年5月28日收到)

## 摘 要

本文对已有的差分格式的色散关系和群速度效应的Fourier分析提出了置疑, 指出症结所在, 并予以纠正; 并且利用差分格式的 Modified PDE 思想, 提出了一种新的构造性差分格式分析方法——差分格式余项效应分析。这种方法基于差分格式的耗散关系和色散关系的综合分析。方法具有明显的构造性和现实意义。

**关键词** 差分格式 余项效应 群速度

## 一、引 言

针对同一个微分方程, 可以设计各种形式的差分格式, 但用来进行数值解时, 却呈现各不相同的效果: 有的稳定, 有的则不稳定; 有的使数值解光滑化了, 呈数值耗散性; 有的出现某些虚假的振荡, 呈数值色散性; 也有的解, 其波形尽管锐利, 但却有滞后或超前的错位, 表现出数值群速度效应; 如此种种…。这都是差分格式的内在机理所致。因此, 差分法的理论分析和研究就显得极为重要。

最初提出差分法理论分析的是 Courant 等人<sup>[1]</sup>。而后, 才形成沿用至今的 Fourier 分析方法<sup>[2]</sup>。Kreiss<sup>[3]</sup>等人还利用这种方法进行了差分格式耗散性与色散性的讨论。自从 Hirt<sup>[4]</sup>、Warming 等<sup>[5]</sup>提出差分格式的余项分析, 并引入了 Modified PDE 概念后, 才使差分格式理论分析走上了差分格式余项分析的途径。在综合前面的两种分析方法的基础上, 刘儒勋等<sup>[6,7]</sup>明确提出差分格式余项效应分析方法。使差分方法的精度、相容性、稳定性、耗散性和色散性, 以及群速度效应分析统一起来。尤其重要的是这种分析方法更具有构造性, 即既进行了定性分析、研究, 又给改造不稳定格式, 控制数值耗散性, 抑制数值色散性和群速度效应, 设计或优化格式指出了方向。

80年代初, Vichnevetsky<sup>[8]</sup>等和 Trefethen<sup>[9]</sup>利用 Fourier 分析方法, 首次较系统、全面地讨论了差分格式的群速度效应。而后大量有关文献<sup>[10-12]</sup>就群速度对解的波前、波包和能量传播的效果, 对网格变化引起的干扰, 在边界上的影响, 以及对人工吸收边界问题的研究上的意义等等, 做了分析、和应用研究。在国外尤其引起广泛的兴趣。但是, 严格地说来, 这些 Fourier 分析过程不甚严密。尽管结论或许是对的, 但仍应予以澄清。本文将在文献[6, 7]的基础上进一步指出问题的症结, 同时完善差分格式余项效应分析方法。最后, 就其构造性特点, 以众所周知的例子和数值试验给以说明。

\* 戴世强荐推。

## 二、Fourier 分析方法的简单讨论

这里只就差分格式的群速度效应的Fourier分析再作简单的讨论。考虑模型方程

$$u_t + au_x = 0, \quad a = \text{const} > 0 \quad (2.1)$$

Trefethen<sup>[6]</sup>等假定它取解的形式为

$$u(x, t) = \exp[i(\omega t - \xi x)] \quad (2.2)$$

其中  $\xi$  为波数,  $\omega$  为频率。于是方程有色散关系

$$\omega = \omega(\xi) = a\xi \quad (2.3)$$

方程(2.1)的相容差分格式Leapfrog和Crank-Nicolson为

$$\text{LF: } u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - c(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (2.4)$$

$$\text{CN: } u_j^{n+1} - \frac{c}{4}u_{j-1}^{n+1} + \frac{c}{4}u_{j+1}^{n+1} = u_j^n + \frac{c}{4}u_{j-1}^n - \frac{c}{4}u_{j+1}^n \quad (2.5)$$

其中  $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$  为Courant数,  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  分别为时间与空间的步长。注意, Trefethen等人对差分格式一概取(2.2)无耗散形式的解! 从而可导出(2.4)、(2.5)的差分格式色散关系和群速度<sup>[9, 10]</sup>

$$\text{LF: } \omega_{\text{Lf}}(\xi) = \frac{1}{\Delta t} \sin^{-1}(c \sin \xi \Delta x) \quad (2.6)$$

$$\text{CN: } \omega_{\text{Cn}}(\xi) = \frac{2}{\Delta t} \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}c \sin \xi \Delta x\right) \quad (2.7)$$

$$\text{LF: } v_g^{\text{Lf}} = \frac{d\omega_{\text{Lf}}(\xi)}{d\xi} = \frac{a \cos \xi \Delta x}{(1 - c^2 \sin^2 \xi \Delta x)^{1/2}} \approx a \left[ 1 - \frac{1 - c^2}{2} (\xi \Delta x)^2 \right] \quad (2.8)$$

$$\text{CN: } v_g^{\text{Cn}} = \frac{d\omega_{\text{Cn}}(\xi)}{d\xi} = \frac{a \cos \xi \Delta x}{\left(1 + c^2 \sin^2 \frac{\xi \Delta x}{4}\right)} \approx a \left[ 1 - \frac{2 + c^2}{4} (\xi \Delta x)^2 \right] \quad (2.9)$$

于是有结论: LF格式数值解波形将比实际精确解的传播速度  $a$  滞后  $\frac{1 - c^2}{2} (\xi \Delta x)^2 a$ , CN格

式则滞后  $\frac{2 + c^2}{4} (\xi \Delta x)^2 a$ ! 该作者的数值试验也确证了这一事实(参见[9, 7])。此外, 数值解的波包、能量也按  $v_g$  传播。解在边界上, 在网格变化时都导致虚假的干扰波的发展, 等等。

然而, 众所周知, 不管原方程如何, 其相容的差分格式却常常引入数值耗散性, 如Lax, Upwind, Lax-Wendroff...等格式都如此。并且, 正由于这种数值耗散性, 才使数值解可以适应激波等复杂波形的计算。从这一点上说, Trefethen等的前提(2.2)有失严密。但是群速度又这样重要, 因为不考虑数值解的波形错位, 尽管有锐利的、高分辨率的波形也没有什么意思。

正确的差分格式的解形, 不失一般性应取含耗散因子的形式, 即

$$u(x, t) = \exp[-bt] \cdot \exp[i(\omega t - \xi x)] \quad (2.10)$$

这样既可得到差分格式的色散关系  $\omega = \omega(\xi)$  和群速度  $v_g = \frac{d\omega}{d\xi}$ , 又得到耗散关系  $b = b(\xi)$ ,

如CN格式有

$$b(\xi) = -\frac{1}{\Delta t} \operatorname{Re} \left[ \ln \left( \frac{1 + \frac{c}{2} i \sin \xi \Delta x}{1 - \frac{c}{2} i \sin \xi \Delta x} \right) \right] \quad (2.11)$$

$$\omega(\xi) = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{Im} \left[ \ln \left( \frac{1 + \frac{c}{2} i \sin \xi \Delta x}{1 - \frac{c}{2} i \sin \xi \Delta x} \right) \right] \quad (2.12)$$

$$v_g = a \frac{\cos \xi \Delta x}{1 + \frac{c^2}{4} \sin^2 \xi \Delta x} \approx a \left( 1 - \frac{2+c^2}{4} (\xi \Delta x)^2 \right) \quad (2.13)$$

显然, 我们这个结果是正确的, 合理的. 与(2.9)相比, 虽然前两项一致, 但包含了格式的数值耗散与色散的一般性. 当然, 这样一来也给研究LF等一些多层格式带来困难, 导致隐式关系.

总之, Fourier分析法虽然沿用至今, 取得很大发展<sup>[3,13]</sup>, 但有其局限性. 特别是, 它不具备构造性. 格式的分析, 不能直接提供改造、优化、调节格式数值解效果, 和合理地构造高性能格式的途径.

### 三、差分格式的MPDE和余项

Warming等首次提出了差分格式的等价‘微分方程’的概念和推导方法<sup>[5,6,7,13]</sup>. 考虑一般线性常系数方程

$$u_t = Lu \quad L = L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (3.1)$$

$L$ 为空间偏微分算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 的常系数多项式. 不失一般性, 方程(3.1)的相容差分格式写作

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha} u_{j+\alpha}^{n+1} = \sum_{\beta} A_{\beta} u_{j+\beta}^n \quad (3.2)$$

其中  $B_{\alpha}$ ,  $A_{\beta}$ 为差分格式系数,  $\alpha, \beta$ 仅取某些整数. 对差分格式(3.2)在网格节点 $(x_j, t_n)$ 作Taylor展开, 采用Warming方法进行等价消去高阶时间导数项(也可编制计算机代数软件实现), 最终得其完全等价的‘微分方程’MPDE(省略上、下标):

$$u_t = Lu + R_s + R_p \quad (3.3)$$

$$R_s = \sum_{l=1}^{\infty} \nu_{2l} \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l}}, \quad R_p = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_{2m+1} \frac{\partial^{2m+1} u}{\partial x^{2m+1}} \quad (3.4)$$

其中  $R = R_s + R_p$ 为数值余项,  $R_s$ 为格式的耗散余项,  $R_p$ 为色散余项.  $\nu_{2l}$ 和 $\mu_{2m+1}$ 为相应余项系数, 它们常由 $B_{\alpha}$ ,  $A_{\beta}$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ 或常数组成, 分别呈 $(\Delta x)^{2l}$ 和 $(\Delta x)^{2m+1}$ 阶小量形式.

模型方程(2.1)的各格式, 如

$$\text{Lax: } u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{c}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (3.5)$$

$$\text{Upwind: } u_j^{n+1} = u_j^n - c(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (3.6)$$

$$\text{FTCS: } u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (3.7)$$

以及前节的LF, CN格式, 它们分别有MPDE的余项部分为

$$R_{Lax} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} (1-c^2)u_{xx} + \frac{a\Delta x^2}{3} (1-c^2)u_{xxx} + \dots \quad (3.8)$$

$$R_{Up} = \frac{a\Delta x}{2} (1-c^2)u_{xx} - \frac{a\Delta x^2}{6} (1-c)(1-2c)u_{xxx} + \dots \quad (3.9)$$

$$R_{Ft} = -\frac{a\Delta x}{2} c u_{xx} - \frac{a\Delta x^2}{6} (1+2c^2)u_{xxx} + \dots \quad (3.10)$$

$$R_{Lt} = -\frac{a\Delta x^2}{6} (1-c^2)u_{xxx} + \dots \quad (R_s=0) \quad (3.11)$$

$$R_{Cn} = -\frac{a\Delta x^2}{6} (1+2c^2)u_{xxx} + \dots \quad (R_s=0) \quad (3.12)$$

MPDE 已经可以提供我们很多关于差分格式的特性, 如数值耗散性强度等。而且, 更重要的一点在于它对应的色散关系和群速度效应, 根据后者的分析将提供余项校正的方向, 从而进行格式的改造、调节和优化。

#### 四、差分格式的耗散关系、色散关系和群速度

根据差分格式 (3.2) 的 MPDE (3.3)、(3.4), 取解式 (2.10), 则得到格式的耗散关系  $b(\xi)$ , 色散关系  $\omega(\xi)$  和群速度  $v_g = \frac{d\omega}{d\xi}$ 、相速度  $v_p = \frac{\omega(\xi)}{\xi}$ :

$$b(\xi) = -\text{Re}(L(i\xi)) - \sum_l \nu_{2l} (-1)^l \xi^{2l} \quad (4.1)$$

$$\omega(\xi) = \text{Im}(L(i\xi)) - \sum_m \mu_{2m+1} (-1)^m \xi^{2m+1} \quad (4.2)$$

$$v_p(\xi) = \frac{\omega(\xi)}{\xi} = \frac{1}{\xi} \text{Im}(L(i\xi)) - \sum_m \mu_{2m+1} (-1)^m \xi^{2m} \quad (4.3)$$

$$v_g(\xi) = \frac{d\omega}{d\xi} = \text{Im}(L'_\xi(i\xi)) - \sum_m (2m+1) (-1)^m \mu_{2m+1} \xi^{2m} \quad (4.4)$$

我们更关心的是由于格式的数值耗散和数值色散而导出的附加因素。换句话说, 由于数值余项  $R_s, R_p$  导致的数值耗散 (又称数值粘性) 等部分:

$$\nu = b(\xi) + \text{Re}(L(i\xi)) = -\sum_l (-1)^l \nu_{2l} \xi^{2l} \quad (4.5)$$

$$\mu = \omega(\xi) - \text{Im}(L(i\xi)) = -\sum_m (-1)^m \mu_{2m+1} \xi^{2m+1} \quad (4.6)$$

$$v_p^N = v_p - \frac{1}{\xi} \text{Im}(L(i\xi)) = -\sum_m (-1)^m \mu_{2m+1} \xi^{2m} \quad (4.7)$$

$$v_g^N = v_g - \text{Im}(L(i\xi))'_\xi = -\sum_m (-1)^m (2m+1) \mu_{2m+1} \xi^{2m} \quad (4.8)$$

以上关系才是进行差分格式数值效应分析的依据。

例如(2.1)的格式(3.5)~(3.7)及LF、CN, 由其MPDE的余项部分(3.8)~(3.12), 我们有

$$\left. \begin{aligned} \text{Lax: } v=b &= \frac{a}{2c} (1-c^2) \xi^2 \Delta x + \dots \\ \omega &= a\xi + \frac{a}{3} (1-c^2) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ \mu &= \frac{a}{3} (1-c^2) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ v_g &= a + a(1-c^2) (\xi \Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Upwind: } v=b &= \frac{a}{2} (1-c) \xi^2 \Delta x + \dots \\ \omega &= a\xi - \frac{a}{6} (1-c)(1-2c) \xi^3 \Delta x^2 - \dots \\ \mu &= -\frac{a}{6} (1-c)(1-2c) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ v_g &= a - \frac{a}{2} (1-c)(1-2c) (\xi \Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{FTCS: } v=b &= -\frac{ac}{2} \xi^2 \Delta x + \dots \\ \omega &= a\xi - \frac{a}{6} (1+2c^2) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ \mu &= -\frac{a}{6} (1+2c^2) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ v_g &= a - \frac{a}{2} (1+2c^2) (\xi \Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{LF: } v=b &= 0 \\ \omega &= a\xi - \frac{a}{6} (1-c^2) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ \mu &= -\frac{a}{6} (1-c^2) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ v_g &= a - \frac{a}{2} (1-c^2) (\xi \Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{CN: } v=b &= 0 \\ \omega &= a\xi - \frac{a}{6} \left(1 + \frac{c^2}{2}\right) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ \mu &= -\frac{a}{6} \left(1 + \frac{c^2}{2}\right) \xi^3 \Delta x^2 + \dots \\ v_g &= a - \frac{a}{4} (2+c^2) (\xi \Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

因为波数  $\xi$  与空间变量  $x$  之积  $\xi x$ , 通常在解式(2.10)中是以  $2\pi$  为周期的, 即  $\xi x \in [-\pi, \pi]$ . 所以当步长  $\Delta x$  相当小时, 以上各式(4.9)~(4.13)是各格式的关系(4.5)~(4.8)的主项, 它们已基本表征了格式的内在特征: 稳定性, 数值耗散性和色散性, 群速度的数值解效应。

## 五、差分格式的稳定性、数值耗散性和色散性分析

我们在进行差分格式的稳定性、耗散性与色散性以及群速度分析时, 更重视数值耗散关

系  $\nu$  和数值色散关系  $\mu$  的主项部分, 即  $\xi\Delta x$  的低阶项。在考虑对格式作改造、优化或设计高效能格式时, 才引入更多的高阶项。

### 1. 稳定性

按照 Warming 等的讨论,

$$\nu(\xi) > 0 \quad (5.1)$$

是格式的稳定性充分条件。于是, Lax, Upwind 格式的稳定性充分条件正是众所周知的 Courant 条件

$$c < 1 \quad \text{或} \quad \Delta t < \frac{\Delta x}{a} \quad (5.2)$$

FTCS 是逆耗散性的,  $\nu(\xi) < 0$ , 恒不稳定。而 LF 和 CN 格式为无数值耗散格式, 其稳定性由色散关系分析。例如,  $\mu = \mu(\xi) < 0$  时, 表示数值色散与原方程色散性相异, 有微小的抑制。这时要求 LF 格式满足  $c < 1$  条件, 而 CN 格式无条件成立。这正是 Fourier 分析得到的稳定性结果。

即使不稳定的格式, 也不可认为毫无意义。事实上可以通过改造转化为稳定的格式, 甚至极好的格式。如 FTCS, 如按其 MPDE 中的  $R_s$ , 在格式的右端相应补偿一项  $\nu_s$ , 就得到著名的 Lax-Wendroff 格式。

$$\text{LW: } u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2}{2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (5.3)$$

右端第三项正是  $\frac{a}{2} c \Delta x u_{xx} \cdot \Delta t$  的二阶中心差分逼近。许多不稳定格式, 如模型抛物型方程的 Richardson 格式, 都可通过这种分析和改造, 化为优良格式。对于非线性计算的不稳定性改造, 也可以进行余项的合理调节试验得到克服。关于这方面的问题将以另文详细讨论。

### 2. 数值耗散性

这也是格式所固有的属性, 它的意义在于使数值解趋向光滑化。对于诸如激波等问题的模拟中, 适当的数值光滑效果是必须的<sup>[13]</sup>, 但又不可过头, 否则会严重降低解的分辨率, 甚至失真。

根据格式的数值耗散关系  $\nu = \nu(\xi)$ , 可以得到格式数值耗散强度<sup>[7]</sup>。而且许多格式的数值耗散性有轻度可调性, 尤其与某些常数有关, 如 Lax, Upwind, L-W 格式的数值耗散系数作为  $c \in (0, 1)$  的函数, 有图 1 所示的曲线 ( $a=1, \xi\Delta x = \frac{2\pi}{16}$ )。

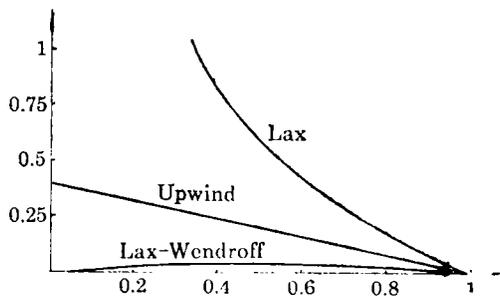


图 1

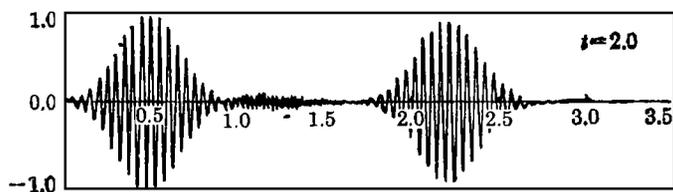


图 2

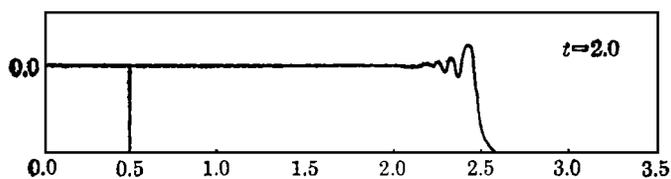


图 3

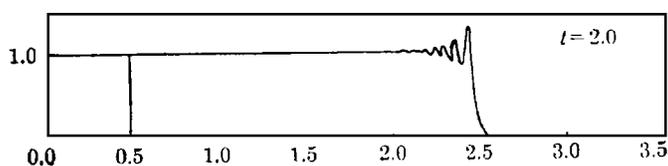


图 4

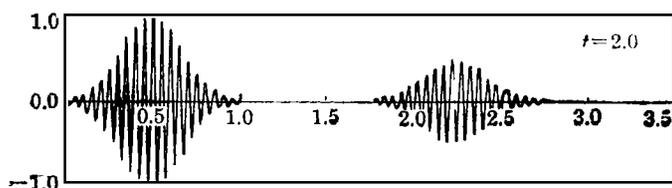


图 5

### 3. 数值色散性与群速度效应

模型问题(2.1)本身为纯色散型方程,然而其相容的差分格式却额外地引入了数值色散成份 $\mu(\xi)$ 。原方程解的波形将以其特征速度

$$v_0 = a \quad (5.4)$$

传播,但数值解的波形却按群速度(4.13)传播。这就会造成数值解的滞后或超前错位。这种数值解效应称为群速度效应<sup>[6]</sup>。不仅如此,数值解的波前、波包、能量等都将取决于群速度。因而,数值色散分析,不仅考虑其不同波数 $\xi$ 引起的频散,造成激波波头或波包前方的虚假振荡问题<sup>[6,7]</sup>,更首要的是分析其波形的错位!图2和图3分别是对(2.1)( $a=1, \xi\Delta x=1/160, c=0.8$ ),在如下初值的模拟结果

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & (0 < x \leq \frac{1}{2}) \\ 0 & (x > \frac{1}{2}) \end{cases} \quad (5.5)$$

$$u(x, 0) = \exp \left[ -16 \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \sin \xi x, \quad \xi \Delta x = \frac{2\pi}{8} \quad (5.6)$$

所产生的异常现象（波头和波包前的寄生振荡，高频波解的滞后等），都来自于色散和群速度效应。根据(4.9)~(4.13)，显然

$$v_p, v_g(\xi) = \begin{cases} < v_0 = a, & \text{对Up, LW, LF, CN} \\ > v_0 = a, & \text{对Lax} \end{cases} \quad (5.7)$$

表明前述各种重要格式的滞后或超前传播性质。此外，有意义的关系

$$v_g(\xi) - v_0 \approx 3(v_p(\xi) - v_0) \quad (5.8)$$

表明在 $\xi \Delta x \ll 1$ 或小波数情况，群、相速度关系。

#### 4. 耗散和色散的复合效应

根据Canosa和Gazdag<sup>[16]</sup>和文献[6, 7]的讨论，数值耗散性和色散性的复合效果很值得注意。当

$$v^2 > 4|\mu| \quad (5.9)$$

格式的复合效果呈耗散优势，光滑效果起主导作用，而且对色散的寄生振荡起抑制作用。反之，呈色散优势。如L-W, CN, LF等格式，在激波计算或高频波计算时，都有寄生振荡。特别地，常常产生非线性计算不稳定现象。

例如，图4是对L-W格式再消除二阶耗散项，即用格式Modified Lax-Wendroff格式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} = & u_j^n - \frac{c}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{c^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ & + \frac{c^2(1-c^2)}{6}(u_{j+2}^n - 4u_{j+1}^n + 6u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) \end{aligned} \quad (5.10)$$

后，由于其耗散更弱，复合效果是强色散优势，所以计算激波波头振荡更强，且随时间向上游发展。

复合效果的合理调节，特别是根据求解问题的特征相应控制其色散 $\mu$ 与耗散 $\nu$ 的级别和对比关系，实在是个难题，但其重要性不言而喻。如计算初值(5.6)的高频波形传播，如果用原L-W格式(5.3)，取 $c=0.4$ 时，在 $t=2.0$ 时已经把波形全光滑掉了，在计算图形上只有幅度小于0.2的小振荡。如果采用(5.10)的消去二阶耗散项的格式，得到图5所示的波形（ $a=1, \Delta x = \frac{1}{160}, c=0.8$ ）。这时仍有耗散效果。需注意的是其群速度滞后效果，数值解传播速度，已不是 $a=1$ 的原解析解速度，而是Lax-Wendroff的数值群速度

$$v_g = 1 - \frac{1}{2}(1 - 0.8^2) \left( \frac{2\pi}{8} \right)^2 \approx 0.89. \quad (5.11)$$

这就是图5波形中心为何只到达 $x=2.3$ 附近，而不是 $x=2.5$ 的准确解位置的原因。

群速度效应的进一步研究，还揭示了数值边界的耦合效果，变网格界面或网格加细、重化而引起的寄生波的产生、反射、透射和传播，这对于人工边界（又称吸收边界）的研究，对有限元等的区域分解方法的研究都具有直接的关系和重要性。

## 参 考 文 献

- [1] Courant, R., K. O. Friedrichs and H. Lewy, Uber die partiellen differenzengleichungen der Mathematischen Physik, *Mathematische Annalen*, 100(1928), 32.
- [2] Richtmyer, R. D., and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Second Edition, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York (1967).
- [3] Keiss, H. O., Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems, *Mathematics of Computation*, 22(104)(1968), 703.
- [4] Hirt, U. W., Heuristic stability theory for finite difference equations, *J. of Comput. Phys.*, 2(1968), 339.
- [5] Warming, R. F., and B. J. Hyett, The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite difference method, *J. of Comput. Phys.*, 14(1974), 159.
- [6] 刘儒勋, 关于非线性计算稳定性, 力学学报, 16(5)(1984), 529.
- [7] 刘儒勋, 差分格式余项效应研究, 庆祝计算物理学会成立十周年文集, 计算物理, 9(4)(1992) 479.
- [8] Vichnevetsky, R., and J. B. Bowles, *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations*, SIAM Philadelphia(1982).
- [9] Trefethen, L. N., Group velocity in finite difference schemes, *SIAM Review*, 24(2)(1982), 113.
- [10] Vichnevetsky, R. and L. H. Turner, Spurious scattering from discontinuously stretching grids in computational fluid dynamics, *Applied Numer. Math.*, 8 (1991), 289.
- [11] Vichnevetsky, R., Quantum phenomena in numerical wave propagation, *Advances in Comput Methods for P. D. E.*, VI, Publ. IMACS(1987).
- [12] Karni, S., To the boundary and back—a numerical study, *Inter. J. for Numerical Methods in Fluids*, 13(1991), 201.
- [13] 忻孝康、刘儒勋、蒋伯诚, 《计算流体力学》, 国防科技大学出版社(1989).
- [14] Fromm, J. E., A method for reducing dispersion in convective difference schemes, *J. of Comput. Phys.*, 3(1968), 176.
- [15] Canosa, J. and J. Gazdag, The Korteweg-de Vries-Burgers equations, *J. of Comput. Phys.*, 23(1977), 293.
- [16] 刘儒勋、夏南, 差分方法的耗散和色散性分析, 第一届计算物理学术会议文集(1983).

## The Remainder-Effect Analysis of Finite Difference Schemes and the Applications

Liu Ru-xun Zhou Zhao-hui

(Dept. of Math., University of Sci. & Tech. of China, Hefei)

### Abstract

In the present paper two contents are enclosed. First, the Fourier analysis approach of the dispersion relation and group velocity effect of finite difference schemes is discussed, the defects of the approach is pointed out and the correction is made. Second, a new systematic analysis method-remainder-effect analysis (abbr. REAM) is proposed by means of the modified partial differential equations (abbr. MPDE) of finite difference schemes. The analysis is based on the synthetical study of the rational dispersion and the dissipation relations of finite difference schemes. And the method clearly possesses constructivity.

**Key words** finite difference scheme, remainder effect, group velocity