应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

铅球飞行轨迹方程的微分解及应用*

刘 小 湘

（湘潭机电专科学校，1993年6月19日收到）

摘 要

本文根据运动学原理建立了铅球轨迹方程，考虑铅球落点位置，利用微积分和三角函数理论求出手角极值和最大飞进距离，得出了最佳出手角、最大飞进距离与出手点高度初速度之间简单表达式。并通过计算制成了最佳出手角、最大飞进距离表。

关键词 轨迹方程 极值 出手角 飞进距离

一、前 言

在目前的掷铅球教学和训练中，铅球的最佳出手角一般认为是 38°～42°（文献[1]～[3]）。最佳出手角与出手点高度及出手初速度，空气阻力之间定量关系至今不太清楚，这对于体育理论的完善和指导教学训练均不利。为此，笔者作了初步探讨并将之进行总结，供同行参考。

二、铅球在飞进时的轨迹方程

铅球的运动属抛射体运动，其运动可分解为水平方向匀速（v_x）运动，垂直方向的初速为（v_y）的垂直上抛运动。实践和空气动力学计算表明：铅球飞进时空气阻力小，对飞行影响小，在建立轨迹方程时忽略空气阻力。

以出手点为原点，水平方向为x轴方向，垂直向上为y轴方向，建立坐标系（如图1所示）。铅球飞行在坐标系中的轨迹方程为(2.1)，(2.1)式源于运动学理论。

$$y=x\mathrm{tg}\theta-gx^2/2v_0^2\cos^2\theta \tag{2.1}$$

本文讨论铅球飞进距离极值。假设出手点距地面H，铅球落点在坐标系中位置$y=-H$，x为待求值。将$y=-H$代入(2.1)，解方程并舍去$x<0$的情况，得铅球飞进距离：

$$x=\frac{\sin2\theta v_0^2+\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(1+\cos2\theta)}}{2g} \tag{2.2}$$

---

* 汪家𬤊推荐。

1993年12月20日收到修改稿。

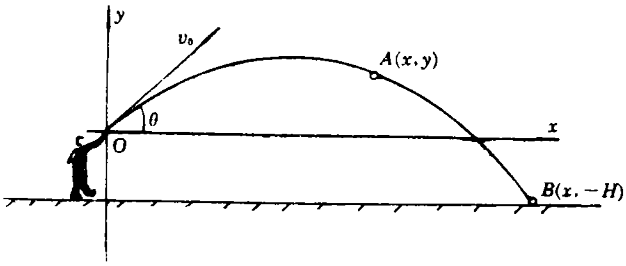

图 1

三、铅球飞进的极值

(2.2)式反映了铅球落地时的x值，这也是铅球飞进距离．由(2.2)可知，这距离与重力加速度g，出手高度H，出手初速度v_0及出手角有关．其中重力加速度g为常量(本文取9.8m/s²)，出手高度H，出手初速度v_0对运员来讲难以改变，因此，本文主要讨论出手角度变化时，飞进距离x变化．要x取极值，必有$\partial x/\partial\theta=0$．对(2.2)式两边求导，有：

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{1}{2g}\left[2\cos 2\theta v_0^2+\frac{2\sin 2\theta\cos 2\theta\cdot 2v_0^4+8gHv_0^2(-\sin 2\theta)}{2\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(H\cos 2\theta)}}\right]$$

用微分求极值条件$\partial x/\partial\theta=0$并约去公共常数$2v_0^2$．得：

$$-\cos 2\theta=\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta v_0^2-2gH\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(H\cos 2\theta)}}$$

整理得：

$$\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(1+\cos 2\theta)}=\sin 2\theta v_0^2-2gH\mathrm{tg}2\theta$$

两边平方，整理得：

$$v_0^2(1+\cos 2\theta)=gH\mathrm{tg}^2 2\theta-v_0^2\sin 2\theta\mathrm{tg}2\theta$$

$$v_0^2(1+\mathrm{tg}2\theta\sin 2\theta+\cos 2\theta)=gH\mathrm{tg}^2 2\theta$$

将$\mathrm{tg}2\theta=\sin 2\theta/\cos 2\theta$代入，整理得：

$$v_0^2(\cos 2\theta+\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)=gH\mathrm{tg}2\theta\sin 2\theta$$

将$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$代入，整理得

$$(1+\cos 2\theta)/(\sin 2\theta\mathrm{tg}2\theta)=gH/v_0^2$$

将$\mathrm{tg}2\theta=\sin 2\theta/\cos 2\theta$代入，整理得：

$$\frac{\cos 2\theta+\cos^2 2\theta}{\sin^2 2\theta}=gH/v_0^2$$

将$\sin^2 2\theta=1-\cos^2 2\theta$代入，整理得：

$$\cos^2 2\theta(v_0^2+gH)+v_0^2\cos 2\theta-gH=0$$

解方程：

$$\cos 2\theta_{1,2}=\frac{-v_0^2\pm\sqrt{v_0^4+4gH(v_0^2+gH)}}{2(v_0^2+gH)}$$

$$\cos 2\theta_1=\frac{-v_0^2+\sqrt{v_0^4+4gH(v_0^2+gH)}}{2(v_0^2+gH)}$$

$\cos 2\theta_2<0$不符合实际情况，予以舍去．

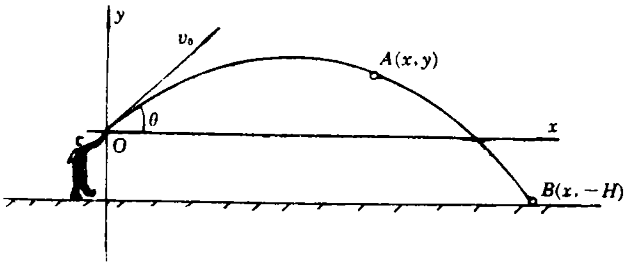

图 1

三、铅球飞进的极值

(2.2)式反映了铅球落地时的x值，这也是铅球飞进距离．由(2.2)可知，这距离与重力加速度g，出手高度H，出手初速度v_0及出手角有关．其中重力加速度g为常量(本文取$9.8\mathrm{m/s^2}$)，出手高度H，出手初速度v_0对运员来讲难以改变，因此，本文主要讨论出手角度变化时，飞进距离x变化．要x取极值，必有$\partial x/\partial\theta=0$．对(2.2)式两边求导，有：

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{1}{2g}\left[2\cos2\theta v_0^2+\frac{2\sin2\theta\cos2\theta\cdot2v_0^4+8gHv_0^2(-\sin2\theta)}{2\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(H\cos2\theta)}}\right]$$

用微分求极值条件$\partial x/\partial\theta=0$并约去公共常数$2v_0^2$．得：

$$-\cos2\theta=\frac{\sin2\theta\cos2\theta v_0^2-2gH\sin2\theta}{\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(H\cos2\theta)}}$$

整理得：

$$\sqrt{\sin^2 2\theta v_0^4+4gHv_0^2(1+\cos2\theta)}=\sin2\theta v_0^2-2gH\mathrm{tg}2\theta$$

两边平方，整理得：

$$v_0^2(1+\cos2\theta)=gH\mathrm{tg}^2 2\theta-v_0^2\sin2\theta\mathrm{tg}2\theta$$

$$v_0^2(1+\mathrm{tg}2\theta\sin2\theta+\cos2\theta)=gH\mathrm{tg}^2 2\theta$$

将$\mathrm{tg}2\theta=\sin2\theta/\cos2\theta$代入，整理得：

$$v_0^2(\cos2\theta+\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)=gH\mathrm{tg}2\theta\sin2\theta$$

将$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$代入，整理得

$$(1+\cos2\theta)/(\sin2\theta\mathrm{tg}2\theta)=gH/v_0^2$$

将$\mathrm{tg}2\theta=\sin2\theta/\cos2\theta$代入，整理得：

$$\frac{\cos2\theta+\cos^2 2\theta}{\sin^2 2\theta}=gH/v_0^2$$

将$\sin^2 2\theta=1-\cos^2 2\theta$代入，整理得：

$$\cos^2 2\theta(v_0^2+gH)+v_0^2\cos2\theta-gH=0$$

解方程：

$$\cos2\theta_{1,2}=\frac{-v_0^2\pm\sqrt{v_0^4+4gH(v_0^2+gH)}}{2(v_0^2+gH)}$$

$$\cos2\theta_1=\frac{-v_0^2+\sqrt{v_0^4+4gH(v_0^2+gH)}}{2(v_0^2+gH)}$$

$\cos2\theta_2<0$不符合实际情况，予以舍去．

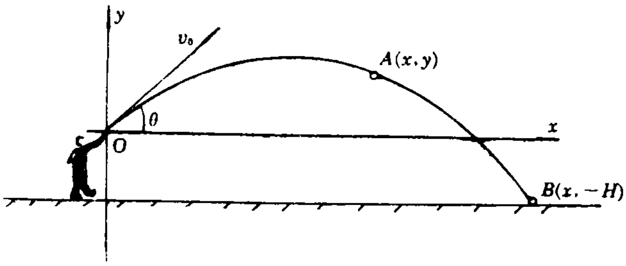

图 1

三、铅球飞进的极值

(2.2)式反映了铅球落地时的x值，这也是铅球飞进距离．由(2.2)可知，这距离与重力加速度g，出手高度H，出手初速度v_0及出手角有关．其中重力加速度g为常量(本文取9.8m/s²)，出手高度H，出手初速度v_0对运员来讲难以改变，因此，本文主要讨论出手角度变化时，飞进距离x变化．要x取极值，必有$\partial x/\partial\theta=0$．对(2.2)式两边求导，有：

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{1}{2g}\left[2\cos2\theta v_0^2+\frac{2\sin2\theta\cos2\theta\cdot2v_0^4+8gHv_0^2(-\sin2\theta)}{2\sqrt{\sin^22\theta v_0^4+4gHv_0^2(H\cos2\theta)}}\right]$$

用微分求极值条件$\partial x/\partial\theta=0$并约去公共常数$2v_0^2$．得：

$$-\cos2\theta=\frac{\sin2\theta\cos2\theta v_0^2-2gH\sin2\theta}{\sqrt{\sin^22\theta v_0^4+4gHv_0^2(H\cos2\theta)}}$$

整理得：

$$\sqrt{\sin^22\theta v_0^4+4gHv_0^2(1+\cos2\theta)}=\sin2\theta v_0^2-2gH\operatorname{tg}2\theta$$

两边平方，整理得：

$$v_0^2(1+\cos2\theta)=gH\operatorname{tg}^22\theta-v_0^2\sin2\theta\operatorname{tg}2\theta$$

$$v_0^2(1+\operatorname{tg}2\theta\sin2\theta+\cos2\theta)=gH\operatorname{tg}^22\theta$$

将$\operatorname{tg}2\theta=\sin2\theta/\cos2\theta$代入，整理得：

$$v_0^2(\cos2\theta+\sin^22\theta+\cos^22\theta)=gH\operatorname{tg}2\theta\sin2\theta$$

将$\sin^22\theta+\cos^22\theta=1$代入，整理得

$$(1+\cos2\theta)/(\sin2\theta\operatorname{tg}2\theta)=gH/v_0^2$$

将$\operatorname{tg}2\theta=\sin2\theta/\cos2\theta$代入，整理得：

$$\frac{\cos2\theta+\cos^22\theta}{\sin^22\theta}=gH/v_0^2$$

将$\sin^22\theta=1-\cos^22\theta$代入，整理得：

$$\cos^22\theta(v_0^2+gH)+v_0^2\cos2\theta-gH=0$$

解方程：

$$\cos2\theta_{1,2}=\frac{-v_0^2\pm\sqrt{v_0^4+4gH(v_0^2+gH)}}{2(v_0^2+gH)}$$

$$\cos2\theta_1=\frac{-v_0^2+\sqrt{v_0^4+4gH(v_0^2+gH)}}{2(v_0^2+gH)}$$

$\cos2\theta_2<0$不符合实际情况，予以舍去．

差。这误差一方面由于本文推导时忽略空气阻力，二方面也是由于实践中经验角度不是理论上最合理的。

5.6. (3.1)、(3.2)两式比文献[1]2—32～2—34式更为简单，且计算结果相符。

参 考 文 献

[1] 《运动生物力学》编写组，《运动生物力学》，人民体育出版社(1986).

[2] 马欣熙，《体育》，高教出版社(1987).

[3] 《田径》编写组，《田径》，人民体育出版社(1983).

The Differential Solution to the Flying Locus Equation of the Shot and Its Application

Liu Xiao-xiang

(Xiangtan Institute of Machinery and Electricity Technology, Xiangtan, Hu'nan)

Abstract

This paper establishes a locus equation of the shot according to kinematical principles. By using differential and integral calculus and trigonometric function, we have found the extreme value of the angles of delivery and the best flying distances, with the falling points of the shot considered. Thus a simple expression showing the relationships among the best angle of delivery, the best flying distance, the height of delivery point and its initial velocity can be attained and a diagram can be made by calculating, showing the best angle of delivery and the best flying distance.

Key words locus equation, extreme value, angle of delivery, flying distance