 应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有限变形弹性理论随机变量变分原理及有限元法

高行山　　张汝清

（西安 西北工业大学）　（重庆大学）

（1993年11月22日收到）

摘　　要

本文将材料、载荷、结构几何形状、力和位移边界条件的随机性，直接引入有限变形弹性理论的泛函变分表达式中，应用小参数摄动法，建立了统一的随机变量变分原理及非线性随机有限元法，并将其应用于结构可靠性分析．算例表明，应用此方法处理随机变量的力学问题，具有使程序实施简便，计算效率高等优点．

关键词　有限变形　变分原理　有限元法　结构可靠性分析

一、引　　言

许多工程结构存在着材料的随机性，或几何形状的随机性，或随空间和时间变化的载荷随机性，或者兼而有之．在这些情况下，内力和变形与载荷之间的关系由具有随机系数的偏微分方程来描述，并可能同时具有随机的边界条件．对于这样的力学问题，显然不能完全采用确定性分析的方法．近十年来，已提出了一些随机有限元法[2,3,4]．但是，这些方法大都是基于直接刚度矩阵法，不能有效地将主要参数的随机变化特性引入到有限元公式中，构造出随机变量的有限元模型和发展新的有效的数值分析方法．本文以有限变形弹性理论变分原理为基础，根据随机变量的特性，运用二次摄动技术，提出了有限变形弹性理论的随机变量变分原理及非线性随机有限元法，并将其应用于结构可靠性分析．算例表明，此方法是有效的．

二、有限变形弹性理论随机变量变分原理

有限位移弹性理论最小势能原理为[6]

$$\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}d\Omega-\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f}d\Omega-\int_{\Gamma_p}\delta\boldsymbol{u}^T\overline{\boldsymbol{p}}d\Gamma=0 \tag{2.1}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{u}$分别表示应变变量、应力和位移．Ω，Γ_p，$\boldsymbol{f}$，$\overline{\boldsymbol{p}}$分别表示弹性体的求解域面力已知边界、体积力和已知面力．

应变度量　$\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I}$　　(2.2)

对于超弹性体 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{F})$ (2.3)

$$\boldsymbol{\psi}=\partial A/\partial \boldsymbol{F} \tag{2.4}$$

式中，A为应变能密度函数，$\boldsymbol{F}$为变形梯度张量.

材料性质、几何位置、外力和位移已知条件的随机变化，用随机场$b(\boldsymbol{x})$表示[5].

将位移函数$\boldsymbol{u}$关于随机场$b(\boldsymbol{x})$的均值$\bar{b}(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}$处按Taylor级数展开，保留到二阶项，得

$$\boldsymbol{u}(b(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})\doteq\boldsymbol{u}(\bar{b}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})+\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial b}\right)_{\bar{b}}db+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial b^2}\right)_{\bar{b}}db^2 \tag{2.5a}$$

令 $db=(b-\bar{b})\zeta=\zeta\Delta b$

上式变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(b(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})&\doteq\boldsymbol{u}(\bar{b}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})+\zeta\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial b}\right)_{\bar{b}}(b-\bar{b})+\frac{1}{2}\zeta^2\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial b^2}\right)_{\bar{b}}(b-\bar{b})^2\\&\doteq\boldsymbol{u}^\circ+\zeta\boldsymbol{u}'+\zeta^2\boldsymbol{u}''\end{aligned} \tag{2.5b}$$

式中，$(^\circ)$、$(')$和$('')$分别表示随机函数$\boldsymbol{u}$在$\bar{b}$处之值、一阶变异量和二阶变异量.

同样，将随机函数 $\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{p}$ 按二次摄动展开. 体积积分和表面积分分别用变换表示为

$$d\Omega=J_v dv \tag{2.6a}$$

$$d\Gamma=J_s ds \tag{2.6b}$$

其中，v和s分别表示参考域和边界域，J_v和J_s分别表示体积和面积 Jacobian，域和边界的随机性通过Jacobian矩阵的随机变化引入.

位移梯度的二次摄动展式为

$$\nabla\boldsymbol{u}\doteq\nabla^\circ\boldsymbol{u}+\zeta\nabla'\boldsymbol{u}+\zeta^2\nabla''\boldsymbol{u} \tag{2.7a}$$

$$\delta(\nabla\boldsymbol{u})^T=\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ T}+\zeta\delta\boldsymbol{\varepsilon}'^T+\zeta^2\delta\boldsymbol{\varepsilon}''^T \tag{2.7b}$$

而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\psi}&=\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{F}}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{F},b)\\&\doteq\boldsymbol{\psi}^\circ+\zeta(\boldsymbol{\psi}'+\boldsymbol{c}^\circ\boldsymbol{\varepsilon}')+\zeta^2(\boldsymbol{\psi}''+\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\varepsilon}'+\boldsymbol{c}^\circ\boldsymbol{\varepsilon}'')\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中，第一类弹性矩阵$\boldsymbol{c}=\partial^2A/\partial F\partial F$，与第二类弹性矩阵$\boldsymbol{c}^*=\partial^2A/\partial E\partial E$之间的关系为

$$C_{ijkl}=\delta_{ik}S_{jl}+F_{ip}F_{ks}C^*_{jpls}\triangleq H_{ijkl}+D_{ijkl} \tag{2.9}$$

式中，H_{ijkl}为初应力阵，D_{ijkl}为材料本构阵.

将上述展式代入式(2.1)中，比较同次项系数，则得有限位移弹性理论随机变量变分原理.

零次变分原理

$$\int_v\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ T}\boldsymbol{\psi}\,J_v^\circ dv-\int_v\delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{f}^\circ J_v^\circ dv-\int_{s_p}\delta\boldsymbol{u}^T\bar{\boldsymbol{p}}^\circ J_s^\circ ds=0 \tag{2.10}$$

一次变分原理

$$\begin{aligned}&\int_v[\delta\boldsymbol{\varepsilon}'^T\boldsymbol{\psi}^\circ J_v^\circ+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ T}(\boldsymbol{\psi}'+\boldsymbol{c}^\circ\boldsymbol{\varepsilon}')J_v^\circ+\delta\boldsymbol{\varepsilon}^\circ\boldsymbol{\psi}^\circ J_v']dv\\&-\int_v\delta\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{f}'J_v^\circ+\boldsymbol{f}^\circ J_v')dv-\int_{s_p}\delta\boldsymbol{u}^T(\bar{\boldsymbol{p}}'J_s^\circ+\bar{\boldsymbol{p}}^\circ J_s')ds=0\end{aligned} \tag{2.11}$$

二次变分原理

$$\int_v [\delta\varepsilon'^T\psi^\circ J_v^\circ+\delta\varepsilon'^T(\psi'+c^\circ\varepsilon')J_v^\circ+\delta\varepsilon'^T\psi^\circ J_v'+\delta\varepsilon^{\circ T}(\psi''+c'\varepsilon'+c^\circ\varepsilon'')J_v^\circ$$
$$+\delta\varepsilon^{\circ T}(\psi'+c^\circ\varepsilon')J_v'+\delta\varepsilon^{\circ T}\psi^\circ J_v'']dv$$
$$-\int_v \delta u^T(f''J_v^\circ+f'J_v'+f^\circ J_v'')dv-\int_{S_p}\delta u^T(p''J_s^\circ+p'J_s'+p^\circ J_s'')ds=0 \qquad (2.12)$$

方程(2.10)为确定性变量的有限位移弹性理论变分原理，可按普通有限元求解。而方程(2.11)和(2.12)中带有(′)和(″)的随机函数用空间期望和自协方差函数描述。

三、随机有限元法

在进行有限元分析时，同时离散位移场和随机场．将随机场离散为q个单元，即

$$b(x)=\sum_{i=1}^{q}\phi_i(x)b_i \qquad (3.1)$$

$\phi_i(x)$为形函数，b_i为$b(x)$在第i个结点之值．

为了保证收敛，随机函数ψ，c，f，$\bar{p}$，J_v和J_s也用相同的形函数离散．例如，ψ的近似式为

$$\psi=\sum_{i=1}^{q}\phi_i(x)\psi_i=\sum_{i=1}^{q}\phi_i(x)(\psi_i^\circ+\zeta\psi_i'+\zeta^2\psi_i'') \qquad (3.2)$$

将ψ_i在随机场$b(x)$的均值$\bar{b}$处按Taylor级数展开，有

$$\psi_i=\psi_i^\circ+\sum_{k=1}^{q}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial b_k}\right)_{\bar{b}}db_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial^2\psi_i}{\partial b_k\partial b_l}\right)_{\bar{b}}db_k db_l \qquad (3.3)$$

即有

$$\psi_i'=\sum_{k=1}^{q}(\psi_i')_k\Delta b_k \qquad (3.4)$$

$$\psi_i''=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}(\psi_i'')_{kl}\Delta b_k\Delta b_l \qquad (3.5)$$

$(\psi_i')_k$，$(\psi_i'')_{kl}$可由求导得出，其余函数有类似表达式．

将位移场离散为N_L个单元，N_P个结点，每个结点有N_F个自由度，位移场近似式为

$$u\doteq u^\circ+\zeta u'+\zeta^2u'' \qquad (2.5b)$$

因而有

$$u^\circ=\sum_{i=1}^{N_P}N_i(x)d_i^\circ=N(x)d^\circ \qquad (3.6a)$$

$$u'\doteq\sum_{i=1}^{N_P}N_i(x)d_i'\doteq N(x)d' \qquad (3.6b)$$

$$u''=\sum_{i=1}^{N_P}N_i(x)d_i''=N(x)d'' \qquad (3.6c)$$

式中，$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$为位移形函数矩阵．而

$$\boldsymbol{d}'_i=\sum_{k=1}^{q}(\boldsymbol{d}'_i)_k\Delta b_k \tag{3.7a}$$

$$\boldsymbol{d}''_i=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}(\boldsymbol{d}''_i)_{kl}\Delta b_k\Delta b_l \tag{3.7b}$$

单元随机应变场离散为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{d}&=\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}^\circ+\zeta(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{d}^\circ+\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}')+\zeta^2(\boldsymbol{B}''\boldsymbol{d}^\circ+\boldsymbol{B}'\boldsymbol{d}'+\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}'')\\&=\boldsymbol{\varepsilon}^\circ+\zeta\boldsymbol{\varepsilon}'+\zeta^2\boldsymbol{\varepsilon}''\end{aligned} \tag{3.8}$$

由方程(2.7b)，得

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}^\circ\delta\boldsymbol{d}+\zeta\boldsymbol{B}'\delta\boldsymbol{d}+\zeta^2\boldsymbol{B}''\delta\boldsymbol{d} \tag{3.9}$$

将上述各近似式，代入方程(2.10)、(2.11)和(2.12)中，即得随机有限元方程．

零次方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}^\circ=\boldsymbol{F}^\circ \tag{3.10a}$$

其中
$$\boldsymbol{K}=\int_v\boldsymbol{B}^{\circ T}\boldsymbol{Q}^\circ\boldsymbol{B}^\circ J_v^\circ dv \tag{3.10b}$$

$$\boldsymbol{F}^\circ=\int_v\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{f}^\circ J_v^\circ dv+\int_{s_p}\boldsymbol{N}^T\bar{\boldsymbol{p}}^\circ J_s^\circ ds \tag{3.10c}$$

式(3.10b)中$\boldsymbol{Q}^\circ$满足$\psi^\circ=\boldsymbol{Q}^\circ\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$．非线性方程(3.10a)可用迭代法求解．

一次方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}'_m=\boldsymbol{F}'_m\qquad(m=1,2,\cdots,q) \tag{3.11a}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'_m=&\int_v\boldsymbol{N}^T[\boldsymbol{f}'_mJ_v^\circ+\boldsymbol{f}^\circ(J'_v)_m]dv+\int_{s_p}\boldsymbol{N}^T[\bar{\boldsymbol{p}}'_mJ_s^\circ+\bar{\boldsymbol{p}}^\circ(J'_s)_m]ds\\&-\int_v\boldsymbol{B}_m'^T\psi^\circ J_v^\circ dv-\int_v\boldsymbol{B}^{\circ T}(\psi'_m+\boldsymbol{c}^\circ\boldsymbol{B}'_m\boldsymbol{d}^\circ)J_v^\circ dv\\&-\int_v\boldsymbol{B}^{\circ T}\psi^\circ(J'_v)_mdv\end{aligned} \tag{3.11b}$$

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_D+\boldsymbol{K}_H \tag{3.11c}$$

$$\boldsymbol{K}_D=\int_v\boldsymbol{B}^{\circ T}\boldsymbol{D}^\circ\boldsymbol{B}^\circ J_v^\circ dv \tag{3.11d}$$

$$\boldsymbol{K}_H=\int_v\boldsymbol{B}^{\circ T}\boldsymbol{H}^\circ\boldsymbol{B}^\circ J_v^\circ dv \tag{3.11e}$$

二次方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}''=\boldsymbol{F}'' \tag{3.12a}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}''=\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}\Big\{&\int_v\boldsymbol{N}^T\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{f}''_{kl}J_v^\circ+\boldsymbol{f}'_k(J'_v)_l+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^\circ(J''_v)_{kl}\Big)dv\\&+\int_{s_p}\boldsymbol{N}^T\Big[\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{p}}''_{kl}J_s^\circ+\bar{\boldsymbol{p}}'_k(J'_s)_l+\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{p}}^\circ(J''_s)_{kl}\Big]ds\end{aligned}$$

$$-\int_v \boldsymbol{B}_k'^T(\psi_l'+c^\circ\boldsymbol{B}_l'\boldsymbol{d}^\circ+c^\circ\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}_l')J_v^\circ dv$$

$$-\int_v \boldsymbol{B}_k'^T\psi^\circ(J_v')_l dv-\int_v \boldsymbol{B}^{\circ T}\left(\frac{1}{2}\psi_{kl}''+c_k'\boldsymbol{B}_l'\boldsymbol{d}^\circ\right.$$

$$\left.+c_k'\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}_l+\frac{1}{2}c^\circ\boldsymbol{B}_{kl}''\boldsymbol{d}^\circ+c^\circ\boldsymbol{B}_k'\boldsymbol{d}_l'\right)J_v^\circ dv$$

$$-\int_v \boldsymbol{B}^{\circ T}(\psi_k'+c^\circ\boldsymbol{B}_k'\boldsymbol{d}^\circ+c^\circ\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}_k')(J_v')_l dv$$

$$\left.-\int_v \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{\circ T}\psi^\circ(J_v'')_{kl}dv-\int_v \frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{kl}''\psi^\circ J_v^\circ dv\right\}\Delta b_k\Delta b_l \tag{3.12b}$$

$$\boldsymbol{d}''=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}\boldsymbol{d}_{kl}''\Delta b_k\Delta b_l \tag{3.12c}$$

应力的均值为

$$E[\boldsymbol{\sigma}]=\boldsymbol{\sigma}^\circ+\bar{\boldsymbol{\sigma}}'' \tag{3.13a}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}^\circ=\psi^\circ \tag{3.13b}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}''=\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}\left[\frac{1}{2}\psi_{kl}''+c_k'\boldsymbol{B}_l'\boldsymbol{d}^\circ+c_k'\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}_l'+\frac{1}{2}c\boldsymbol{B}_{kl}''\boldsymbol{d}^\circ\right.$$

$$\left.+c^\circ\boldsymbol{B}_k'\boldsymbol{d}_l'+\frac{1}{2}c^\circ\boldsymbol{B}^\circ\boldsymbol{d}_{kl}''\right]\mathrm{cov}(b_k,b_l) \tag{3.13c}$$

应力的自协方差为

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_j)=\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{q}(\boldsymbol{\sigma}_i')_k(\boldsymbol{\sigma}_j')_l\mathrm{cov}(b_k,b_l) \tag{3.13d}$$

式中

$$(\boldsymbol{\sigma}_i')_k=(\psi_i')_k+c_i^\circ(\boldsymbol{B}_i')_k\boldsymbol{d}_i^\circ+c_i^\circ\boldsymbol{B}_i^\circ(\boldsymbol{d}_i')_k\qquad(i=1,2,\cdots,NL) \tag{3.13e}$$

四、结构可靠性分析

设 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$是与结构可靠性分析有关的一组基本随机变量，如结构构件几何尺寸、材料强度以及外载荷等.

描述结构的力学特性的功能函数为

$$Z=\{Z_i=g_i(\boldsymbol{x}),i=1,2,\cdots,m\} \tag{4.1}$$

满足条件

$$Z_i=g_i(\boldsymbol{x})\begin{cases}<0 & \text{结构失效或破坏}\\ =0 & \text{结构处于极限状态}\\ >0 & \text{结构正常或安全}\end{cases}$$

如果Z是基本随机变量的非线性函数，$Z=g(\boldsymbol{x})=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，令

$$y_i=\frac{x_i-\mu_{xi}}{\sigma_{xi}} \tag{4.2}$$

式中，μ_{xi}和σ_{xi}为正态分布随机变量x_i的均值和标准差．则

$$Z=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=G(y_1,y_2,\cdots,y_n) \tag{4.3}$$

在新的随机变量空间$\boldsymbol{y}$中，可靠性指标β由下式给出

$$\beta=(\boldsymbol{y}^{*T}\boldsymbol{y}^{*})^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

式中，$\boldsymbol{y}^*$为设计验算点的坐标．

$$P_f=\Phi(-\beta) \tag{4.5}$$

式中，P_f为破坏概率，Φ为标准正态分布函数．

由此可见，只要求出设计验算点坐标$\boldsymbol{y}^*$，即可求出可靠性指标．由于未知量个数多于方程个数，需要迭代求解．R. Rackwitz 等人[7]提出一个迭代公式

$$\boldsymbol{y}^{(i+1)}=\left[\boldsymbol{y}^{(i)T}\alpha_i+\frac{G(\boldsymbol{y})^i}{|\nabla G(\boldsymbol{y})^{(i)}|}\right]\alpha_i^T \tag{4.6}$$

式中，$\boldsymbol{y}^{(i+1)}$表示第i次迭代求出的设计验算点坐标向量；α_i表示第i次迭代灵敏度系数向量．

$$\alpha_i=-\frac{\nabla G(\boldsymbol{y})^{(i)}}{|\nabla G(\boldsymbol{y})^{(i)}|} \tag{4.7}$$

$G(\boldsymbol{y})^{(i)}$表示第i次迭代时功能函数值；$\nabla G(\boldsymbol{y})^i$表示第$i$次迭代求出功能函数对$\boldsymbol{y}$的梯度向量，

$$|\nabla G(\boldsymbol{y})^{(i)}|=\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{y}_j}\bigg|_{\boldsymbol{y}^{(i)}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

以上公式是在基本随机变量为正态分布且相互独立时推导出来的，对于非正态分布随机变量，可采用Rosenblatt变换法[8]转换为正态变量，然后采用上述公式求解．

下面给出$\nabla G(\boldsymbol{y})$的计算公式求解．方程(4.2)矩阵表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{x} \tag{4.9}$$

由复合函数求导法则，有

$$\nabla G(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{M}^{-1})^T[\boldsymbol{J}_r\nabla g_r(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})+\boldsymbol{J}_s\nabla g_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})] \tag{4.10}$$

式中，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$为抗力，$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$为载荷效应，$\nabla g_r(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$，$\nabla g_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$分别为功能函数$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$关于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{s}$的梯度向量，而$\boldsymbol{J}_r=\partial\boldsymbol{r}/\partial\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{J}_s=\partial\boldsymbol{s}/\partial\boldsymbol{x}$．

抗力$\boldsymbol{r}$一般可以表示为基本随机变量的显函数，而载荷效应$\boldsymbol{s}$与基本随机变量的关系要复杂得多，难以用显式表示，因此方程(4.10)中$\nabla g_r(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$，$\nabla g_s(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$和$\boldsymbol{J}_r$比较容易求得，而$\boldsymbol{J}_s$需要用上节的随机有限元法求出．

五、算　例

带孔方板，边长$L=60.96$cm，厚2.54cm，圆孔直径10.16cm，受双向拉伸载荷P_1和P_2作用．利用对称性，只取四分之一计算．有限元网格如图1所示（采用四结点等参元）．随机场网格如图2所示．主要参数统计特性见表1，计算结果见表2和表3．随机场的相关函数是指数函数．

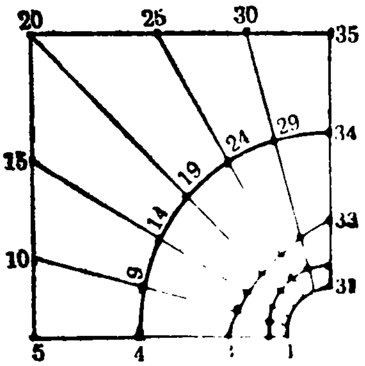

图1 有限元网格

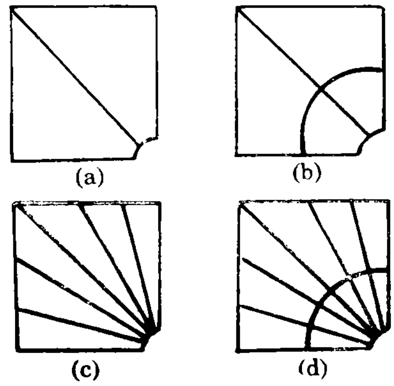

图2 随机场离散网格

表 1 主要参数统计特性

变 量	单 位	均 值	变异系数	分布函数类型
P_1	N/m	210.00	0.20	正态分布
P_2	N/m	210.00	0.20	正态分布
E	N/cm²	1.98×10^7	0.10	正态分布
t	cm	2.54	0.20	正态分布

表 2 各参数均为随机变量时可靠性指标（迭代次数$i=13$）

变 量	灵敏系数	初 始 值	最 终 值
P_1	0.16	210.00	223.66
P_2	−0.05	210.00	205.46
E	−0.67	1.998×10^7	1771×10^7
t	−0.72	2.54	2.21
功能函数		0.331	0.048
可靠性指标		0.263	1.745

表 3 不同随机场网格下可靠性指标（仅考虑$E(x,y)$是二维随机场，λ为相关长度）

网格 \ λ	1.0	0.75	0.5	0.25
(a)	2.380	2.819	3.925	
(b)	2.602	3.056	3.344	收 敛
(c)	不稳定	2.700	3.222	速度很慢
(d)	不稳定	不稳定	2.775	

参 考 文 献

[1] Zienkiewicz, O. C. and T. L. Taylor, *The Finite Element Method*, 4th Edion, McGraw-Hill, New York (1989).

[2] Liu, Wik., T. Belytschko and A. Mani, Random field finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 23(10) (1986), 1831—1845.

[3] Vanmarcke, E.H. et al., Random fields and stochastic finite elements, *Structural Safety*, (3) (1986), 143—146.

[4] 中桐滋、久田俊明，《確率有限要素法入门》，培風舘 (1985).

[5] 张汝清、高行山，随机变分原理及有限元法，应用数学和力学，13(5) (1992)，383—388.
[6] 张汝清，《固体力学变分原理及其应用》，重庆大学出版社 (1991).
[7] Rachwitz, R. and B. Fiessler, Structural reliability under combined random load sequences, *Comput. Sturctures*, 9(5) (1978), 489—494.
[8] Rosenblatt, M., Remarks on a multivariate transformation, *Annals of Math. Statistics*, 23(3) (1952), 470—472.

The Random Variational Principle in Finite Deformation of Elasticity and Finite Element Method

Gao Hang-shan
(*Northwesten Polytechnical University, Xi'an*)

Zhang Ru-qing
(*Chongqing University, Chongqing*)

Abstract

In the present paper, we have introduced the random materials, loads, geometrical shapes, force and displacement boundary condition directly into the functional variational formula, by use of a small parameter perturbation method, a unified random variational principle in finite deformation of elasticity and nonlinear random finite element method are established, and used for reliability analysis of structures. Numerical examples showed that the methods have the advantages of simple and convenient program implementation and are effective for the probabilistic problems in mechanics.

Key words finite deformation, variational principle, finite element method, structural reliability analysis