应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

多重尺度法在平面Couette流稳定性分析中的应用*

周哲玮

（上海大学；上海市应用数学和力学研究所，1993年12月15日收到）

摘　要

本文用文[3]所建议的多重尺度法分析了经过修正的平面Couette流动的线性稳定性性质．在平面Couette流的分析中，用多重尺度法可以找到不稳定的 Tollmien-Schlichting 波，但却不能找到最不稳定的模态．通过与文[3]相比较，本文对这种方法进行了探讨．

关键词　稳定性　多重尺度法　无穷远分叉

一、引　言

作者在文[1]中提出了经过修正的层流流动的流动稳定性问题，其中引入了一种随时间变化的修正速度剖面．这种剖面精确满足Navier-Stokes方程，且可以与基本流动同时存在于流场之中．考虑到这种修正剖面，流动稳定性分析导出了一组系数中带有时间因子$e^{-\eta t}$的偏微分方程，这里η是大于零的实数．作者先是在文[1]采用物理假定来处理这个时间因子，进而在文[3]中建议了一种多重尺度法来求解系数中含有时间因子$e^{-\eta t}$的偏微分方程．这种方法用于分析平面Poiseuille流动的稳定性时，获得了较为满意的并与文[1]采用物理假设的分析相当一致的结果．本文应用这种方法来分析经过修正的平面Couette流动的线性稳定性问题．

二、基本方程与解法

本文研究的基本层流流动是平面Couette流动，其速度剖面是

$$\bar{u}=y,\qquad -1\leqslant y\leqslant 1 \tag{2.1}$$

受到背景干扰后，迭加了一修正剖面，流动成为

$$u=\bar{u}+\bar{\delta}u_t(y)e^{-\eta t} \tag{2.2}$$

其中η为大于零的实数，$\bar{\delta}$为修正剖面的最大幅值，$u_t(y)$的形状见文[1]．

引进流函数ψ，满足

* 国家自然科学基金和上海工业大学科学基金资助课题

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.3}$$

其中u为流向速度，v为横向速度。

设 $$\psi=\bar{\psi}+\varepsilon\psi' \tag{2.4}$$

其中$\bar{\psi}$为层流流动的流函数，ψ'为扰动流函数。

如设 $$\psi'=\phi(y,t)e^{i\alpha x}+\text{C.C.} \tag{2.5}$$

其中α为实数，C.C.为复共轭项，关于ϕ的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi+i\alpha\bar{u}\nabla^2\phi-\frac{1}{R}\nabla^4\phi+\bar{\delta}e^{-\eta t}i\alpha(u_i\nabla^2\phi-u_i''\phi)=0 \tag{2.6}$$

$$\phi(\pm1,t)=\phi'(\pm1,t)=0 \tag{2.7}$$

其中， $\nabla^2\phi=\phi''-\alpha^2\phi$，$\nabla^4\phi=\phi^{(4)}-2\alpha^2\phi''+\alpha^4\phi$

“$'$”为对y的导数。

按照文[3]所建议的方法，

令 $$\varepsilon=\eta \tag{2.8}$$

设 $$\xi=\varepsilon t,\quad \eta=(1+\omega_2(\xi)\varepsilon^2+\omega_3(\xi)\varepsilon^3+\cdots)t \tag{2.9}$$

假定ϕ具有形为

$$\phi=\phi_0(\xi,\eta,y)+\varepsilon\phi_1(\xi,\eta,y)\varepsilon^2\phi_2(\xi,\eta,y)+\cdots \tag{2.10}$$

的一致有效展开式。

按照与文[3]完全相同的方法，可得到在形式上完全相同的结果，即

$$\phi=[E_0(\xi)\gamma_0(y)+\varepsilon(E_{11}(\xi)\gamma_{11}(y)+E_{12}(\xi)\gamma_{12}(y))]e^{i(\alpha x-\theta)}+\text{C.C.}+O(\varepsilon^2) \tag{2.11}$$

其中

$$E_0(\xi)=a_0\exp[\delta s_r(e^{-\xi}-1)+\alpha c_i t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 t] \tag{2.12}$$

$$E_{11}(\xi)=a_{11}\exp[\delta s_r(e^{-\xi}-1)-\xi+\alpha c_i t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 t] \tag{2.13}$$

$$E_{12}(\xi)=a_{12}\exp[\delta s_r(e^{-\xi}-1)-2\xi+\alpha c_i t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 t] \tag{2.14}$$

$$\theta(\xi)=\delta s_i(e^{-\xi}-1)-\alpha c_r t+\alpha(\omega_i\omega_{2i}-c_r\omega_{2r})\varepsilon^2 t \tag{2.15}$$

$s=s_r+is_i$和$\omega_2(\xi)=\omega_{2r}(\xi)+i\omega_{2i}(\xi)$分别是在计算中得到的常数和函数，其具体表达式可参看文[3]，a_0，a_{11}，a_{12}为初始值。

从 (2.12) ～ (2.15) 可以看出，如有不稳定情况发生，必是$E_0(\xi)$的增长率最大。

令 $$E_0(\xi)=a_0e^{f(t)} \tag{2.16}$$

当$f'(t)>0$，E_0是随时间增长的；当$f'(t)<0$，E_0是随时间衰减的。

略去ε^2项后

$$f'(t)=-\bar{\delta}s_r e^{-\varepsilon t}+\alpha c_i \tag{2.17}$$

令 $f'(t)=0$，有

$$e^{-\varepsilon t}=\alpha c_i/\bar{\delta}s_r \tag{2.18}$$

当方程右边>0且$\leqslant1$时有解

$$t_0=-\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\alpha c_i}{\bar{\delta}s_r} \tag{2.19}$$

文[3]中已将扰动的发展归纳为以下几种情况

(i) $c_i>0$，无论$\bar{\delta}s_r$为何值，扰动最后一定会增长起来；

(ii) $c_i<0$，当$\bar{\delta}s_r$也<0，则当$t<t_0$时扰动是增长的；

(iii) $c_i<0$，$\bar{\delta}s_r>0$，则扰动会衰减下去；

(iv) $c_i=0$，扰动的性质由$\bar{\delta}s_r$的符号决定。

三、数 值 结 果

在文[3]中，我们把多重尺度法的结果和采用物理假定而略去时间因子$e^{-\eta t}$的结果进行了比较。发现在平面Poiseuille流的情况下，二者符合得很好。但是也发现，在物理假定下的数值计算结果表明，无论$\bar{\delta}>0$或$\bar{\delta}<0$，只要大到一定的程度扰动都有可能增长，而多重尺度法的分析中$\bar{\delta}$只在某一符号下才会引起失稳。在平面Poiseuille流中，这一符号总是与数值计算中$|\bar{\delta}|$值较小的那一符号相同。

在文[1]中，略去时间因子$e^{-\eta t}$时，作了两种物理假定：其一认为当扰动的增长率超过修正剖面的衰减率时流动失稳，此时修正剖面的幅值认为达到阈值$\bar{\delta}_1$，其二是认为背景干扰一直存在，因此可以不考虑修正剖面衰减的影响，只要扰动的增长率大于零，就认为修正剖面的幅值达到阈值$\bar{\delta}_2$，相当于多重尺度法分析中$t=0$时的情况。

下面计算两个平面Couette流的算例：

例1 $\alpha=1.1$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=14.066$

用文[1]的方法计算，当$\bar{\delta}>0$时，有

$$\bar{\delta}_1=0.01812，\quad \bar{\delta}_2=0.00757$$

而当$\bar{\delta}<0$时，有

$$\bar{\delta}_1=-0.01812，\quad \bar{\delta}_2=-0.00757$$

用多重尺度法计算

$$\varepsilon=\eta=0.068，\quad \alpha c_i=-0.08654，\quad s_r=-7.114$$

由第二节分析知，当$\bar{\delta}>0$时流动有可能失稳。当$t=0$时，扰动为中性所需要的修正剖面幅值$\bar{\delta}^*$为

$$\bar{\delta}^*=\alpha c_i/s_r=0.01216$$

例2 $\alpha=1.1$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=10.904$

用文[1]的方法计算，当$\bar{\delta}>0$时，有

$$\bar{\delta}_1=0.01733，\quad \bar{\delta}_2=0.01153$$

而当$\bar{\delta}<0$时，有

$$\bar{\delta}_1=-0.01733，\quad \bar{\delta}_2=-0.01153$$

用多重尺度法计算

$$\varepsilon=\eta=0.041，\quad \alpha c_i=-0.08654，\quad s_r=1.725$$

即当$\bar{\delta}<0$时流动有可能失稳。当$t=0$时，扰动为中性所需要的修正剖面幅值$\bar{\delta}^*$为

$$\bar{\delta}^*=\alpha c_i/s_r=-0.05017$$

由文[2]的讨论可知，修正速度剖面主要是通过对速度剖面曲率的改变而起作用的。由于基本层流流动$\bar{u}=y$，$\bar{u}''=0$，$\bar{\delta}>0$和$\bar{\delta}<0$的情况在阈值数值上是相同的。多重尺度法同样只能判断一种符号下的失稳，而且在平面Couette流的情况下，我们失去了文[3]中所具有的良好的一致性，尤其在例2中，$\bar{\delta}^*$和$\bar{\delta}_1$，$\bar{\delta}_2$都相差较远。

四、分 析 与 讨 论

为了寻找这种差异的原因，我们再详细研究一下在平面Poiseuille流和平面Couette流中的计算结果.

在文[3]的二个例题中，中性的T-S波的频率和阈值分别为：

① $\alpha=1.2$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=14.066$

文[1]方法 $\bar{\delta}_2=-0.00479$，$\alpha c_r=0.36888$

多重尺度法 $\bar{\delta}^*=-0.0043$，$\alpha c_r=\bar{\delta}s_i-\alpha c_r'=0.36896$

其中c_r'是$\bar{\delta}=0$时特征值的实部.

② $\alpha=1.5$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=10.904$

文[1]方法 $\bar{\delta}_2=0.0115$，$\alpha c_r=0.51277$

多重尺度法 $\bar{\delta}^*=0.0116$，$\alpha c_r=\bar{\delta}s_i-\alpha c_r'=0.52298$

可见用多重尺度法和物理假定方法得出的基本上是同一个T-S波.

而在本文的二个例题中，中性T-S波的频率和阈值分别为

① $\alpha=1.1$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=14.066$

文[1]方法 $\bar{\delta}_2=0.00757$，$\alpha c_r=0.12361$

多重尺度法 $\bar{\delta}^*=0.01216$，$\alpha c_r=\bar{\delta}s_i-\alpha c_r'=0.79063$

② $\alpha=1.1$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=10.904$

文[1]方法 $\bar{\delta}_2=-0.01153$，$\alpha c_r=0.15749$

多重尺度法 $\bar{\delta}^*=-0.05017$，$\alpha c_r=\alpha c_r'-\bar{\delta}s_i=0.64817$

可以看到，此时两种方法求得的并不是同一个T-S波，它们的阈值不相同自然也就不奇怪了.

我们再来看没有修正剖面作用的平面Couette流衰减最慢的几个T-S波.

$\alpha=1.1$，$R=2900$

① $\alpha c_r=\pm0.80138$，$\alpha c_i=-0.086543$

② $\alpha c_r=\pm0.63437$，$\alpha c_i=-0.19542$

③ $\alpha c_r=\pm0.8658788$，$\alpha c_i=-0.22281$

④ $\alpha c_r=\pm0.0399426$，$\alpha c_i=-0.24550$

⑤ $\alpha c_r=\pm0.11975$，$\alpha c_i=-0.24681$

由于对称，总是有一对频率相同，传播方向相反的波.

可以看出用多重尺度法求出的T-S波比较接近没有经过修正的平面Couette流中衰减最慢的波，而用物理假定计算的结果比较接近第5对波.

我们用文[1]中的算法对经过修正的平面Couette流多计算几个T-S波，可看到

当 $\alpha=1.1$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=14.066$

② $\alpha c_r=0.36868$，$\bar{\delta}_2=0.008326$

③ $\alpha c_r=0.61626$，$\bar{\delta}_2=-0.01071$

④ $\alpha c_r=0.84555$，$\bar{\delta}_2=0.02565$

当 $\alpha=1.1$，$R=2900$，$\sqrt{\eta R}=10.904$

② $\alpha c_r=0.47660$，$\bar{\delta}_2=0.01371$

③ $\alpha c_r=0.78001$，$\bar{\delta}_2=-0.02453$

④ $\alpha c_r=0.19158$, $\delta_2=0.36133$

虽然这些波仍然不是用多重尺度法所求得的T-S波，但其中已经有比较接近的了.

根据以上几组数据，我们可以看到，用多重尺度法可以找到在修正剖面作用下的不稳定扰动，这个扰动实际是由未经修正时衰减较慢的波受到干扰后演化而成的. 在平面Poiseuille流动中，最不稳定的波是由原来衰减最慢的演化而成，所以多重尺度法与用物理假定计算的结果相当一致；而在平面Couette流中，受到干扰的影响之后，原来衰减最慢的波并未演化成最不稳定的波，而只是成为较不稳定的波. 这也许是亚临界流动和无穷远分叉流动的一个区别.

五、结　　语

本文将文[3]所建议的多重尺度法用于分析平面Couette流，并将其结果与对平面Poiseuille流的分析进行了比较. 我们看到，用多重尺度法分析经过修正的层流流动的线性稳定性是有效的，但在无穷远分叉问题中也受到了限制.从文[3]和本文的分析可以推测，这种限制与本文使用的多重尺度法把特征函数改变的影响归入ε^2项而忽略有关.在文[1]中我们已注意到，本文的分析也进一步证明，基本特征函数的改变对无穷远分叉类的流动—平面Couette流和圆管Poiseuille流是十分重要的.因此要搞清楚这一类问题，文[3]建议的多重尺度法是需要改进的.

参 考 文 献

[1] 周哲玮，经过修正的层流流动的流动稳定性问题（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ），应用数学和力学，10(2)(3)(4)(1989)，115—129；231—238；285—295.

[2] 周哲玮，经过修正的平面Couette流的非线性稳定性研究，应用数学和力学，12(5)(1991)，415—419.

[3] 周哲玮，非定常修正下平面Poiseuille流动的线性稳定性性质，应用数学和力学，12(6)(1991)，509—514.

The Application of Multi-Scale Perturbation Method to the Stability Analysis of Plane Couette Flow

Zhou Zhe-wei

(Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

This paper applies the multi-scale perturbation method suggested by Ref. [3] to investigate the linear stability behavior of distorted plane Couette flow. Using this method, the unstable Tollmien-Schlichting wave in plane Couette flow can be found, but not the most unstable mode. By comparing the results of this paper with those of Ref.[3], the effectiveness of this method is investigated.

Key words stability multi-scale perturbation method, bifurcation from infinity