应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

再生核空间中求解定态对流扩散方程*

张池平　　崔明根

（哈尔滨工业大学数学系，1993年10月27日收到）

摘　要

本文在再生核空间 W_2^1 中，给出定态对流扩散方程的一种级数形式的解析解。此解析解具有如下特点：1）解是由精确的形式给出；2）解是显式计算，不须解方程组；3）在数值求解中，每增加一个基数项，近似解的误差在空间范数意义下单调下降。最后对[2]中的算例，进行了计算，结果比[2]中给出的渐近解精度高。

关键词　再生核　对流扩散方程　解析解

一、引　　言

1986年陆金甫等人[1]针对定态对流扩散方程提出了一种修正 Dennis 格式，克服了Dennis格式的一些缺点。但是由于原问题的解当P_e充分大时，显示边界层性质，即在$x=1$附近的一个薄层内解的变化非常迅速。为了能反映出解在薄层内的变化情况，需要将步长选得比较小，因而方程组的阶数高，求解时工作量较大。[2]中提出了一种求修正Dennis格式解的渐近方法，[3][4][5]给出了再生核空间W_2^1中最佳插值算子，W_2^1空间中最佳Hermite算子，第二类Fredholm积分方程解析解。本文在再生核空间W_2^1中，给出一种求解定态对流扩散方程的级数形式的解析解。如方程右端项$f(x)$由离散形式f_i给出时，通过此解析解可以直接得到相应的近似解。这种级数形式的解析解有如下特点：

1）解由精确的形式表示出来；

2）解是显式计算，无须解方程组；

3）在数值求解时，每增加一个基数项，近似解的误差在空间范数意义下单调下降。

最后，对[2]中提供的算例，进行了计算，计算的结果比[2]中给出的渐近解的精度高。

二、主要定理及解的表示

本文针对定态对流扩散方程

---

* 吴望一推荐。
国家自然科学基金资助项目

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dx^2}-P_e\dfrac{du}{dx}=0, & 0<x<1 \qquad (2.1)\\ u(0)=T_0,\ u(1)=T_1 & \qquad (2.2)\end{cases}$$

（其中$P_e>0$是Peclet数），来说明本文提出的解法。

首先将方程(2.1)，边界条件(2.2)化为积分方程：

$$-\frac{1}{P_e}u(x)+\int_0^x u(\xi)d\xi-x\int_0^1 u(\xi)d\xi=-\frac{1}{P_e}(T_1-T_0)x-\frac{T_0}{P_e} \qquad (2.3)$$

在[6]中引进再生核空间$W_2^1[a,b]$，并且给出其再生核$R(x,y)$的解析表达式。

$W_2^1[a,b]\equiv W_2^1=\{u(x)\mid u(x)$是区间$[a,b]$上的绝对连续函数，且$u'(x)\in L^2[a,b]\}$

对u，$v\in W_2^1$，定义内积

$$(u,v)=\int_a^b[u(x)v(x)+u'(x)v'(x)]dx$$

取范数$\|\cdot\|=(\cdot,\cdot)^{1/2}$，空间$W_2^1[a,b]$的再生核是

$$R(x,y)=\frac{1}{2\operatorname{sh}(b-a)}[\operatorname{ch}(x+y-b-a)+\operatorname{ch}(|x-y|-b+a)]$$

对于$x\in[a,b]$和$\forall u\in W_2^1[a,b]$，$R(x,y)$有如下性质：

$$(u(y),\ R(x,y))_y=u(x)$$

命题1　设$\forall u\in W_2^1$，则：

$$\max|u(x)|\leqslant\frac{b-a+1}{\sqrt{b-a}}\|u\|$$

证明

$$u(x)=\int_y^x u'(t)dt+u(y)\qquad |u(x)|\leqslant\int_a^b|u'(t)|dt+|u(y)|$$

在$[a,b]$上两边对y积分

$$|u(x)|(b-a)\leqslant(b-a)\int_a^b|u'(t)|dt+\int_a^b|u(y)|dy$$

$$\leqslant(b-a)\left(\int_a^b|u'(t)|^2dt\right)^{1/2}(b-a)^{1/2}+\left(\int_a^b|u(y)|^2dy\right)^{1/2}(b-a)^{1/2}$$

$$\leqslant[(b-a)(b-a)^{1/2}+(b-a)^{1/2}]\|u\|$$

所以有：

$$|u(x)|\leqslant\frac{(b-a)+1}{\sqrt{b-a}}\|u\|\qquad \text{即}\max|u(x)|\leqslant\frac{b-a+1}{\sqrt{b-a}}\|u\|$$

命题2　设$\{x_i\}=[a,b]$，如果$\{x_i\}$在$[a,b]$中稠密，则：$\{\varphi_i(x)=R(x_i,x)\}$是$W_2^1[a,b]$中的完全系。

证明　由$R(x,y)$的定义可直接得出。

对于算子方程

$$Au=f \qquad (2.4)$$

A是$W_2^1\to W_2^1$的有界线性算子．$\{x_k\}$是$[a,b]$中一组互异点，设A^*是A的共轭算子，记

$$\psi_k(x)=A^*\varphi_k(x) \qquad (2.5)$$

命题3　$\{\psi_k(x)\}_1^n$是W_2^1中的线性无关函数组，且Gram矩阵

$$G_n=[(\psi_i,\ \psi_j)]=\begin{bmatrix}(\psi_1,\psi_1),\cdots,(\psi_1,\psi_n)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ (\psi_n,\psi_1),\cdots,(\psi_n,\psi_n)\end{bmatrix}$$

是正定对称矩阵。

证明 设

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\psi_k(x)=0$$

由$\psi_k(x)$的定义，推出

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)=0$$

由命题2，立刻得出

$$\alpha_k=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

由此可知$\{\psi_k(x)\}_1^n$是线性无关组，因而对于

$$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\neq 0$$

应有

$$Y^TG_nY=\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\psi_k(x),\ \sum_{k=1}^{n}y_k\psi_k(x)\right)>0$$

即G_n是正定矩阵，G_n的对称性显然。 证毕

将$\{\psi_k(x)\}$进行Schmidt正交化，得到标准正交化函数系$\{\tilde{\varphi}_k(x)\}$：

$$\tilde{\varphi}_k(x)=\sum_{k=1}^{k}\alpha_{jk}\psi_j(x), \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{2.6}$$

命题4 若$(A^*)^{-1}$存在，当$\{x_k\}_1^\infty$在$[a,b]$上稠密时，$\{\tilde{\varphi}_k(x)\}_1^\infty$是完全系。

证明 对$\forall u\in W_2^1$，令

$$(u(x),\ \tilde{\varphi}_k(x))=0 \qquad (k=1,2,\cdots)$$

由$\tilde{\varphi}_k(x)$的定义，有

$$0=\left(u(x),\ \sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}\psi_j(x)\right)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}(u(x),\ A^*\varphi_j(x))$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}(Au(x),\ \varphi_j(x)) \tag{2.7}$$

记$Au=g$，则$g\in W_2^1$，由(2.7)可写成

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}(g(x),\ \varphi_j(x))=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}g(x_j)=0$$

当$k=1$时，由$\alpha_{11}\neq 0$，得

$$g(x_1)=0 \tag{2.8}$$

当$k=2$时，由$\alpha_{22}\neq 0$及(2.8)，又得

$$g(x_2)=0$$

继续这种讨论，一般地有

$$g(x_k)=0\qquad(k=1,2,\cdots)$$

由$\{x_k\}_1^\infty$在$[a,b]$中的稠密性和$g(x)$的连续性知：

$$Au(x)=g(x)=0,\qquad x\in[a,b]$$

因此$u\equiv0$，即$\{\tilde{\varphi}_k(x)\}_1^\infty$是$W_2^1$中的完全系。

定义2.1　记$X_n=\text{span}[\{\tilde{\varphi}_k(x)\}_1^n]$，$P_n$是到$X_n$的投影算子，$u$是(2.4)的解，则称

$$u_n(x)=(P_nu)_{(x)}$$

为方程(2.4)的近似解。

由定义2.1有

$$\begin{aligned}u_n(x)&=(P_nu)_{(x)}=\sum_{k=1}^n(u(y),\ \tilde{\varphi}_k(y))\tilde{\varphi}_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^k\alpha_{jk}(u(y),\ \psi_j(y))\tilde{\varphi}_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^k\alpha_{jk}(Au(y),\ \varphi_j(y))\tilde{\varphi}_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^k\alpha_{jk}(f(y),\ \varphi_j(y))\tilde{\varphi}_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^k\alpha_{jk}f(x_j)\tilde{\varphi}_k(x)\end{aligned}$$

记$f(x_j)=f_j$及

$$\tilde{f}_k=\sum_{j=1}^k\alpha_{jk}f_j$$

则$u_n(x)$可以写成

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^n\tilde{f}_k\tilde{\varphi}_k(x)\tag{2.9}$$

由(2.9)式可知，近似解$u_n(x)$可由$f(x)$在有限个点$\{x_k\}_1^n$处的值$\{f_k\}_1^n$来表示。

定理1　设$Au_n=f_n$，则f_n是f的以$\{x_k\}_1^n$为节点的插值函数

$$f_n(x_k)=f(x_k),\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

证明

$$\begin{aligned}f_n(x_k)&=(f_n(x),\ \varphi_k(x))=(Au_n(x),\ \varphi_k(x))\\&=(u_n(x),\ A^*\varphi_k(x))=(P_nu(x),\ \psi_k(x))\\&=(u(x),\ P_n\psi_k(x))=(u(x),\ \psi_k(x))\\&=(Au(x),\ \varphi_k(x))=(f(x),\ \varphi_k(x))=f(x_k)\end{aligned}$$

定理2　当$n\to\infty$时，有

$$u_n(x)\xrightarrow{(一致)}u(x),\qquad x\in[a,b]$$

证明　由$u_n(x)$的定义，及$\{\tilde{\varphi}_k(x)\}_1^\infty$的完全性，有

$$\|u-u_n\|=\|u-\sum_{k=1}^{n}(u,\tilde{\varphi}_k)\tilde{\varphi}_k\|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

再由命题1可得结论。

定理3 设$u(x)$是方程(2.4)的解，则当$\{x_k\}_1^\infty$在$[a,b]$中稠密时，

$$u(x)=u_\infty(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}_k\tilde{\varphi}_k(x)$$

证明 由定理1，

$$f(x_k)=f_\infty(x_k) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

而$\{x_k\}$在$[a,b]$中稠密，及$f(x)$，$f_\infty(x)$均是连续函数，因此

$$f(x)\equiv f_\infty(x), \qquad x\in[a,b]$$

或者

$$(Au)(x)=f(x)=f_\infty(x)=Au_\infty(x)$$

由此推出

$$u(x)\equiv u_\infty(x), \qquad x\in[a,b]$$

下面对解的误差作一个分析，设

$$\gamma_n(x)=u(x)-u_n(x)$$

这里$u(x)$是方程(2.4)的真解，则

$$\begin{aligned}\gamma_{n+1}(x)&=u(x)-u_{n+1}(x)=u(x)-\sum_{k=1}^{n+1}\tilde{f}_k\tilde{\varphi}_k\\&=u(x)-u_n(x)-\tilde{f}_{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1}(x)=\gamma_n(x)-\tilde{f}_{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1}(x)\end{aligned} \tag{2.10}$$

由(2.10)，我们有

$$\begin{aligned}\|\gamma_{n+1}\|^2&=(\gamma_{n+1},\ \gamma_{n+1})=(\gamma_n-\tilde{f}_{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1},\ \gamma_n-\tilde{f}_{n+1}\tilde{\varphi}_{n+1})\\&=(\gamma_n,\gamma_n)-2\tilde{f}_{n+1}(\gamma_n,\tilde{\varphi}_{n+1})+\tilde{f}_{n+1}^2(\tilde{\varphi}_{n+1},\tilde{\varphi}_{n+1})\\&=\|\gamma_n\|^2-2\tilde{f}_{n+1}(\gamma_n,\tilde{\varphi}_{n+1})+\tilde{f}_{n+1}^2\end{aligned}$$

注意到$\{\tilde{\varphi}_k\}$的正交性，有

$$\begin{aligned}(\gamma_n,\tilde{\varphi}_{n+1})&=(u-u_n,\ \tilde{\varphi}_{n+1})=(u,\tilde{\varphi}_{n+1})-(u_n,\tilde{\varphi}_{n+1})\\&=(u,\tilde{\varphi}_{n+1})=\left(u,\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{j,n+1}A^*\varphi_j\right)\\&=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{j,n+1}(Au,\varphi_j)\\&=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_{j,n+1}f(x_j)=\tilde{f}_{n+1}\end{aligned}$$

由此得

$$\|\gamma_{n+1}\|^2=\|\gamma_n\|^2-\tilde{f}_{n+1}^2 \tag{2.11}$$

(2.11)表明

$$\|\gamma_{n+1}\|\leqslant\|\gamma_n\|, \qquad (n=1,2,\cdots)$$

即误差在空间范数意义下是单调下降的。

对于方程(2.3)

$$Au(x)=-\frac{1}{P_e}u(x)+\int_0^x u(\xi)d\xi-x\int_0^1 u(\xi)d\xi$$

$$f(x)=-\frac{1}{P_e}(T_1-T_0)x-\frac{T_0}{P_e}$$

即

$$Au(x)=f(x)$$

那么，A作为$W_2^1[0,1]\to W_2^1[0,1]$的有界线性算子，设$\{x_k\}_1^\infty$是$[0,1]$中的稠密集合。

$$\varphi_k(x)=R(x,x_k)=\frac{1}{2\mathrm{sh}(1)}[\mathrm{ch}(x+x_k-1)+\mathrm{ch}(|x-x_k|-1)]$$

$$\begin{aligned}\psi_k(x)&=A^*\varphi_k(x)\\&=-\frac{1}{2P_e\mathrm{sh}(1)}\mathrm{ch}(x+x_k-1)+\frac{1}{2\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh}(x+x_k-1)-x_k\\&\quad+\begin{cases}\dfrac{-1}{2P_e\mathrm{sh}(1)}\mathrm{ch}(x-x_k-1)-\dfrac{1}{2\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh}(x-x_k-1), & x\geqslant x_k\\ \dfrac{-1}{2P_e\mathrm{sh}(1)}\mathrm{ch}(x-x_k+1)-\dfrac{1}{2\mathrm{sh}(1)}\mathrm{sh}(x-x_k+1)+1, & x<x_k\end{cases}\end{aligned}$$

由(2.6)式可得：

$$\psi_k(x)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}\psi_j(x),\qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

在$\{x_k\}_{k=1}^n$处：

$$f(x_k)=-\frac{1}{P_e}(T_1-T_0)x_k-\frac{T_0}{P_e}$$

那么，方程(2.3)的级数形式的近似解可以表示为：

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}f(x_j)\psi_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\alpha_{jk}f(x_j)\sum_{p=1}^{k}\alpha_{pk}\psi_p(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=1}^{k}\alpha_{jk}\alpha_{pk}f(x_j)\psi_p(x)$$

由定理3，知$u_n(x)\xrightarrow{(一致)}u(x)$，且误差按空间范数意义下是单调下降。

三、算　例

考虑下面具体的定态对流扩散方程

$$\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dx^2}-P_e\dfrac{du}{dx}=0, & 0<x<1\\ u(0)=0.2,\ u(1)=1.2\end{cases}$$

取$P_e=20$，由此得出表1。

表 1

x	u_t	$\bar{u}$	u_{te}	u_{ge}	u_e
0.1	0.2000000	0.2000000	0.0000000	0.0000000	0.2000000
0.2	0.2000001	0.2000001	0.0000000	0.0000000	0.2000001
0.3	0.2000008	0.2000008	0.0000000	0.0000000	0.2000008
0.4	0.2000063	0.2000064	0.0000002	0.0000003	0.2000061
0.5	0.2000465	0.2000471	0.0000011	0.0000017	0.2000454
0.6	0.2003394	0.2003457	0.0000039	0.0000102	0.2003355
0.7	0.2025011	0.2025356	0.0000224	0.0000569	0.2024787
0.8	0.2184832	0.2185950	0.0001676	0.0002794	0.2183156
0.9	0.3347625	0.3363636	0.0005727	0.0010284	0.3353352

表1中u_t表示本文所提供的级数形式的近似解，u_e表示微分方程的精确解，$\bar{u}$表示[2]中的渐近解，u_{te}是u_t和u_e的绝对误差，u_{ge}是$\bar{u}$和u_e的绝对误差。从表1可以看出，本文所提供的方法，在各点，特别是在$x=0.9$，精度比[2]中的精度高。

参 考 文 献

[1] 陆金甫、关治，定态对流扩散方程的修正Dennis格式，计算物理，3(2)(1986)，234—240.

[2] 吴启光，修正Dennis格式的渐近解，数值计算与计算机应用，(2)(1991)，90—94.

[3] 崔明根、邓中兴，W_2^1空间中的最佳插值逼近算子，计算数学，(2)(1988).

[4] 崔明根、邓中兴，W_2^1空间中的最佳Hermite算子，计算物理，(2)(1988).

[5] 崔明根等，第二类Fredholm积分方程解析解，数学进展，(3)(1988).

[6] Zhang Mian, Cui Ming-gen and Deng Zhong-xing, A new uniformly convergent iterative method by interpolation, where error decreases monotonically, *J. Computional Mathematics*, 3(4)(1985), 365—372.

The Solutions of Steady-State Convection Equations in the Spaces that Possess Restoring Nucleus

Zhang Chi-ping　　Cui Ming-gen

(Harbin University of Technology, Harbin)

Abstract

In this paper, in the space W_2^1 that possesses restoring nucleus, we obtain analytic solutions in the series form for the steady-state convection diffusion equation. The solutions have the following characteristics: 1) they are given in the accurate form; 2) they can be calculated in the explicit way, without solving the equations; 3) the error of the approximate solution will be monotonically decreased under the meaning of the norm of the spaces when a cardinal term is added in the procedure of numerical solution. Finally, we calculated the example in [2], the result shows that our solution is more accurate than that in [2].

Key words restoring nucleus, convection diffusion equation, analytic solutions