应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非均匀圆柱型正交各向异性圆板的弯曲问题*

秦圣立

（山东 曲阜师范大学物理系，1994年2月1日收到）

摘　要

本文研究了非均匀圆柱型正交各向异性圆板的弯曲问题，求得了折算刚度随半径按指数函数规律变化的非均匀圆柱型正交各向异性圆板在横向均布载荷作用下的通解，并给出了周边固定夹支条件下的精确解。

关键词　非均匀正交各向异性圆板　过渡区　弯曲　精确解

一、引　言

近来由于复合材料在工程中的广泛应用，研究复合材料板、壳的弯曲问题引起了人们的极大注意和重视。由各种材料的纤维缠绕，并用粘合剂粘合而成的复合材料圆板，从中心各向同性点到直线正交各向异性区之间，将出现一个非均匀的过渡区。对于这个过渡区的性质，Dhoopar 和 Sinha[1],[2] 用细观力学与实验方法粗略地研究了其变化规律；范赋群和董万林[3]采用包络的办法，给出了过渡区随半径r按线性变化的规律。

由于这个过渡区的变化规律还不甚了解，我们从梁的弯曲理论[4]考虑，给出了过渡区随半径r按指数函数变化的规律，从而简化了计算过程。给出了在横向均布载荷作用的非均匀圆柱型正交各向异性圆板弯曲问题的通解。最后求得了本问题在周边固定夹支条件下的精确解。

二、基本方程和边界条件

在横向均布载荷q作用下，圆柱型正交各向异性圆板的弯曲平衡方程[3]为：

$$\frac{dM_r}{dr}+\frac{M_r-M_\theta}{r}=-\frac{qr}{2} \tag{2.1}$$

其中，

* 何福保推荐。

$$\left.\begin{aligned}M_r&=-D_r\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{Q_{12}}{Q_{11}}\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right)=-Q_{11}HW''-Q_{12}H\frac{W'}{r}\\M_\theta&=-D_r\left(\frac{Q_{22}}{Q_{11}}\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}+\frac{Q_{12}}{Q_{11}}\frac{d^2W}{dr^2}\right)=-Q_{22}H\frac{W'}{r}-Q_{12}HW''\\M_{r\theta}&=0\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

这里用了平面应力下的本构关系：

$$\sigma_r=Q_{11}\varepsilon_r+Q_{12}\varepsilon_\theta,\quad \sigma_\theta=Q_{12}\varepsilon_r+Q_{22}\varepsilon_\theta,\quad \tau_{r\theta}=Q_{66}\gamma_{r\theta}\tag{2.3}$$

圆板的抗弯刚度和在直线正交各向异性区的折算刚度的符号分别表为：

$$\left.\begin{aligned}&D_r=Q_{11}h^3/12=Q_{11}H\\&Q_{11}^*=\frac{E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}},\quad Q_{22}^*=\frac{E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}\\&Q_{12}^*=\frac{\nu_{r\theta}E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}=\frac{\nu_{\theta r}E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

在中心处为各向同性点，折算刚度的符号分别为：

$$Q_{11}^0=\frac{E_0}{1-\nu^2},\quad Q_{22}^0=\frac{E_0}{1-\nu^2},\quad Q_{12}^0=\frac{E_0}{1-\nu^2}\tag{2.5}$$

其中E_0，ν分别为基体的杨氏模量和泊松比。

从中心各向同性点到直线正交各向异性区的过渡区域内，这是一个非均匀的各向异性区。我们认为这种非均匀性是由环向纤维排列的不均匀性造成的。由梁的弯曲理论[4] $1/\rho=M/EI$，这种排列的不均匀性与环向纤维的弯曲刚度EI有关，还与缠绕时对纤维施加的弯矩M有关，则非均匀圆柱型正交各向异性圆板的折算刚度可表为：

$$\left.\begin{aligned}Q_{11}&=Q_{11}^*+\Delta Q_{11}\exp\left[-\frac{M}{EI}r\right]\\Q_{22}&=Q_{22}^*+\Delta Q_{22}^*\exp\left[-\frac{M}{EI}r\right]\\Q_{12}&=Q_{12}^*+\Delta Q_{12}^*\exp\left[-\frac{M}{EI}r\right]\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

其中，M是缠绕时对纤维施加的弯矩，E是环向纤维的杨氏模量，I是环向纤维的横截面惯性矩，均视为常数。把环向纤维视作半径为a的等截面圆柱，且圆板厚度$h=2a$。则截面惯性矩可表为：

$$I=\frac{1}{4}\pi a^4\tag{2.7}$$

其中，

$$\Delta Q_{11}^*=Q_{11}^0-Q_{11}^*,\quad \Delta Q_{22}^*=Q_{22}^0-Q_{22}^*,\quad \Delta Q_{12}^*=Q_{12}^0-Q_{12}^*\tag{2.8}$$

将(2.2)式和(2.6)式代入方程(2.1)，则得

$$\begin{aligned}&(Q_{11}^*+\Delta Q_{11}^*\exp[-r/\varepsilon])W'''\\&\quad+\frac{1}{r}\left[(Q_{11}^*+\Delta Q_{11}^*\exp[-r/\varepsilon])-\frac{r}{\varepsilon}\Delta Q_{11}^*\exp[-r/\varepsilon]\right]W''\\&\quad+\frac{1}{r^2}\left[(Q_{22}^*+\Delta Q_{22}^*\exp[-r/\varepsilon])-\frac{r}{\varepsilon}\Delta Q_{12}^*\exp[-r/\varepsilon]\right]W'\\&=qr/2H\end{aligned}\tag{2.9}$$

其中，

$$\varepsilon=\frac{E\pi h^4}{64M} \tag{2.10}$$

引入如下的无量纲变量[6]：

$$\tilde{W}=\frac{W}{C},\quad \tilde{r}=\frac{r}{C},\quad \tilde{q}=\frac{Cq}{hE},\quad \tilde{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{C} \tag{2.11}$$

则方程(2.9)（略去符号"～"）可改写为：

$$\begin{aligned}&r^2[A+(1-A)\exp[-r/\varepsilon]]W'''\\&\quad+r[A+(1-A)\exp[-r/\varepsilon]-\frac{r}{\varepsilon}(1-A)\exp[-r/\varepsilon]]W''\\&\quad+\left[\nu_{\theta r}A+\left[(1-B)-\frac{r}{\varepsilon}(\nu-\nu_{\theta r}A)\right]\exp[-r/\varepsilon]\right]W'\\&=qr^3/\varepsilon_1^2\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中，

$$\varepsilon_1^2=\frac{h^2}{6(1-\nu^2)^2C^2},\quad A=\frac{E_r(1-\nu^2)}{E_0(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})}$$

$$B=\frac{E_\theta(1-\nu^2)}{E_0(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})},\quad \varepsilon=\frac{E\pi h^4}{64MC}$$

C是圆板半径.

令

$$\varphi=W' \tag{2.13}$$

则方程(2.12)化为二阶变系数的微分方程：

$$\begin{aligned}&r^2[A+(1-A)\exp[-r/\varepsilon]]\varphi''\\&\quad+r\left[A+(1-A)\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]-\frac{r}{\varepsilon}(1-A)\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]\right]\varphi'\\&\quad+\left[\nu_{\theta r}A+\left[(1-B)-\frac{r}{\varepsilon}(\nu-\nu_{\theta r}A)\right]\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]\right]\varphi\\&=qr^3/\varepsilon_1^2\qquad(0\leqslant r\leqslant 1)\end{aligned} \tag{2.14}$$

对于固定夹支的无量纲边界条件为：

$$W|_{r=1}=0,\quad W'|_{r=1}=0,\quad W'|_{r=0}=0 \tag{2.15}$$

三、控制微分方程的精确解

方程(2.14)的齐次微分方程为：

$$\begin{aligned}&r^2[A+(1-A)\exp[-r/\varepsilon]]\varphi''\\&\quad+r\left[A+(1-A)\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]-\frac{r}{\varepsilon}(1-A)\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]\right]\varphi'\\&\quad+\left[\nu_{\theta r}A+\left[(1-B)-\frac{r}{\varepsilon}(\nu-\nu_{\theta r}A)\right]\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]\right]\varphi\\&=0\end{aligned} \tag{3.1}$$

方程(3.1)在$r=0$处具有正则奇点. 在此情况下，至少有一个 Frobenius 形式的解[6]

$$\varphi=r^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n \tag{3.2}$$

其中，系数a_n与r无关，可将指数函数展为幂级数：

$$\exp\left[-\frac{r}{\varepsilon}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^m \qquad (0\leqslant r\leqslant 1) \tag{3.3}$$

将(3.2)和(3.3)代入方程(3.1)，可表为：

$$r^2\left[A+(1-A)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^m\right)\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)(n+\sigma-1)a_n r^{n+\sigma-2}\right]$$

$$+r\left[A+(1-A)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^m\right)\right.$$

$$\left.-\frac{r}{\varepsilon}(1-A)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^m\right)\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+\sigma)a_n r^{n+\sigma-1}\right)$$

$$+\left[\nu_{\theta r}A+\left[(1-B)-\frac{r}{\varepsilon}(\nu-\nu_{\theta r}A)\right]\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^m\right)\right]$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^{n+\sigma}\right)=0 \tag{3.4}$$

由方程(3.4)，使r的同幂次项的系数等于零，关于r^{σ}的系数，我们得

$$[\sigma^2+\nu_{\theta r}A+(1-B)]a_0=0 \tag{3.5}$$

令$r^{\sigma+1}$的系数等于零，则得

$$a_1=\frac{[(1-A)\sigma(\sigma+1)+(1-B)+(\nu-\nu_{\theta r}A)]a_0}{\varepsilon[(1+\sigma)^2+\nu_{\theta r}A+(1-B)]} \tag{3.6}$$

使$r^{\sigma+n+m+2}$的系数等于零，可得递推关系，

$$a_{n+m+2}=-\left\{\left[\frac{(1-A)\sigma^2}{(n+m+2)}+(1-A)\sigma+\frac{(1-B)}{(n+m+2)}\right.\right.$$

$$\left.+(\nu-\nu_{\theta r}A)\right]\frac{a_0}{(n+m+1)!}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n+m+2}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}[(1-A)(n+m+\sigma+1)+(\nu-\nu_{\theta r}A)]a_{n+m+1}$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ j=n+m-i+1}}^{m}[2(1-A)(j+\sigma+1)+(1-B)]\frac{1}{i!}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^i a_{j+1}$$

$$\left.+\sum_{\substack{i=1\\ j=n+m-i}}^{m}[(1-A)(j+\sigma+1)+(\nu-\nu_{\theta r}A)]\frac{1}{i!}\left(-\frac{r}{\varepsilon}\right)^{i+1}a_{j+1}\right\}\Big/$$

$$\{[(n+m+\sigma+2)^2+(1-B)+\nu_{\theta r}A]\} \tag{3.7}$$

其中具有负下标的a_j均取为零。

由方程(3.5)，我们可看出，当$a_0=0$时方程(3.1)有"平凡解"。为了方便，取$a_0=1$，则得

$$\sigma^2=B-1-\nu_{\theta r}A \tag{3.8}$$

当$(B-1-\nu_{\theta r}A)>0$时，上述方程的根容易求得为，

$$\sigma_1;\sigma_2=\pm(B-1-\nu_{\theta r}A)^{1/2} \tag{3.9}$$

将方程(3.9)分别代入方程(3.2)，我们得两个线性无关的解，则通解可表为：

$$\varphi=C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1 r^{n+\sigma_1}+C_2\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2 r^{n+\sigma_2} \tag{3.10}$$

其中C_1，C_2均为任意常数；a_n^1，a_n^2是将σ_1，σ_2分别代入方程(3.6)和(3.7)所得到的a_n的值，它们均与r无关。

一旦知道齐次方程的解，利用参数变易法可确定方程(2.14)的一个特解。令特解为：

$$\varphi^*=D_1(r)\varphi_1+D_2(r)\varphi_2 \tag{3.11}$$

其中φ_1，φ_2是两线性无关的解。

由方程(3.11)和(2.14)，得到关于$D_1(r)$和$D_2(r)$的微分方程如下

$$\left.\begin{aligned}&D_1'(r)\varphi_1+D_2'(r)\varphi_2=0\\&D_1'(r)\varphi_1'+D_2'(r)\varphi_2'=qr^3/\varepsilon_1^2\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

因此有，

$$D_1'(r)=\frac{\varphi_2 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2')} \tag{3.13}$$

$$D_2'(r)=\frac{\varphi_1 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1')} \tag{3.14}$$

因为φ_1和φ_2是已知函数，直接积分，可得方程(3.13)和(3.14)的解，

$$D_1(r)=\int\frac{\varphi_2 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2')}dr+\tilde{C}_1 \tag{3.15}$$

$$D_2(r)=\int\frac{\varphi_1 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1')}dr+\tilde{C}_2 \tag{3.16}$$

把方程(3.15)和(3.16)代入方程(3.11)，可得非齐次方程(2.14)的一个特解：

$$\begin{aligned}\varphi^*=&\left[\int\frac{\varphi_2 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2')}dr+\tilde{C}_1\right]\varphi_1\\&+\left[\int\frac{\varphi_1 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1')}dr+\tilde{C}_2\right]\varphi_2\end{aligned} \tag{3.17}$$

到此，我们可把非齐次方程(2.14)的通解写为：

$$\begin{aligned}\varphi=&\bar{C}_1\varphi_1+\bar{C}_2\varphi_2\\&+\left[\int\frac{\varphi_2 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2')}dr\right]\varphi_1+\left[\int\frac{\varphi_1 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1')}dr\right]\varphi_2\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中$\bar{C}_1=C_1+\tilde{C}_1$；$\bar{C}_2=C_2+\tilde{C}_2$均为任意常数。方程(3.18)右边的第三项和第四项所含的积分可化为有理真分式积分，分别把它们记为$F_1(r)$；$F_2(r)$，

$$F_1(r)=\int\frac{\varphi_2 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2')}dr,\quad F_2(r)=\int\frac{\varphi_1 qr^3}{\varepsilon_1^2(\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1')}dr$$

将方程(3.18)代入方程(2.13)，并积分，我们可得方程(2.12)的通解：

$$W=\bar{C}_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^1}{n+\sigma_1+1}r^{n+\sigma_1+1}+\bar{C}_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{n+\sigma_2+1}r^{n+\sigma_2+1}$$

$$+\int\left(F_1(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1r^{n+\sigma_1}\right)dr+\int\left(F_2(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2r^{n+\sigma_2}\right)dr+\bar{C}_3 \tag{3.19}$$

将方程(3.19)代入边界条件(2.15)，可确定常数$\bar{C}_1$，$\bar{C}_2$，$\bar{C}_3$。由(2.15)的第三个方程，因为$\sigma_2<-1$，我们可知$\bar{C}_2=0$。由(2.15)式前两个方程，可以得到

$$\bar{C}_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^1}{n+\sigma_1+1}+\left[\int\left(F_1(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1r^{n+\sigma_1}\right)dr\right]_{r=1}$$

$$+\left[\int\left(F_2(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2r^{n+\sigma_2}\right)dr\right]_{r=1}+\bar{C}_3=0 \tag{3.20}$$

$$\bar{C}_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1+F_1(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1+F_2(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2=0 \tag{3.21}$$

由方程(3.21)，得到系数$\bar{C}_1$为：

$$\bar{C}_1=-F_1(1)-F_2(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\Big/\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1 \tag{3.22}$$

把方程(3.22)代入方程(3.20)，则得

$$\bar{C}_3=F_1(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^1}{n+\sigma_1+1}$$

$$+F_2(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m^1}{m+\sigma_1+1}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1$$

$$-\left[\int\left(F_1(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1r^{n+\sigma_1}\right)dr\right]_{r=1}$$

$$-\left[\int\left(F_2(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2r^{n+\sigma_2}\right)dr\right]_{r=1} \tag{3.23}$$

最后将方程(3.22)，(3.23)和$\bar{C}_2=0$代入方程(3.19)，可得挠度函数$W(r)$的精确解为：

$$W(r)=-\left(F_1(1)+F_2(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\Big/\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^1}{n+\sigma_1+1}r^{n+\sigma_1+1}$$

$$+\int\left(F_1(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1r^{n+\sigma_1}\right)dr$$

$$+\int\left(F_2(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2r^{n+\sigma_2}\right)dr$$

$$+F_1(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{n+\sigma_1+1}$$

$$+F_2(1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m^1}{m+\sigma_1+1}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1$$

$$-\left[\int\left(F_1(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^1r^{n+\sigma_1}\right)dr\right]_{r=1}$$

$$-\left[\int\left(F_2(r)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2r^{n+\sigma_2}\right)dr\right]_{r=1} \tag{3.24}$$

因篇幅所限，本问题的数字结果与文献[3]的结果及其他结果的比较，我们将另文讨论.

参 考 文 献

[1] Dhoopar, B. L. and P. K. Sinha, Properties of fibres twining circular plate (I), *Fibre Sci. and Tech.*, 14(4) (1981), 261.

[2] Sinha, P. K. and B. L. Dhoopar, Properties of fibres twining circular plate (Ⅱ), *Fibre Sci. and Tech.*, 15(2) (1981), 117.

[3] 范赋群、董万林，复合材料非均匀圆柱正交各向异性圆板弯曲，力学学报，17(5) (1985), 461—471.

[4] Fung, Y. C., *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice-Hall INC. (1979).

[5] 秦圣立、张爱淑，关于环形薄板的屈曲问题，应用数学和力学，6(2) (1985), 175—190.

[6] Nayfeh, A. H., *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons (1981).

Bending Problems of Non-Homogeneous Cylindrical Orthotropic Circular Plate

Qin Sheng-li

(Qufu Normal University, Qufu, Shandong)

Abstract

In this paper, the bending problem of the non-homogeneous cylindrical orthotropic circular plate is described. A general solution for the bending of circular plate under uniformly distributed transverse load is solved, and the exact solution of such circular plate with clamped edges is obtained.

Key words non-homogeneous orthotropic circular plate, transitional region, bending, exact solution