应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

转移开、闭集值映象和H-KKM定理的推广及应用*

李秉友　　苏家宝

（石家庄 河北师范大学数学系，1993年12月24日收到）

摘　要

本文中，我们引入转移开、闭集值映象的概念，推广了H-空间中的KKM定理[4]．然后用所得的结果证明了几个重合定理、匹配定理和向量值极大极小不等式．这些结论推广了近期文献[1,2,4,5,6,7]中的相应结果．

关键词　转移开、闭集映象值　H-KKM映象　重合定理　匹配定理

一、引言和预备知识

本文中，我们将引入转移开、闭集值映象推广H-KKM定理[4]．然后用我们的KKM定理，证明几个重合定理和匹配定理．最后用所得的结论建立向量值极大极小不等式．

首先给出一些定义和记号．

设X和Y是两个集合．用2^X表示X的所有子集组成的族；用$\mathscr{F}(X)$表示X的一切有限子集族．设$F:X\to 2^Y$是一集值映象，$F(X)\equiv\cup\{F(x):x\in X\}$，对每个$y\in Y$，$F^{-1}y=\{x\in X:y\in F(x)\}$．用$\overline{F(x)}$和$\operatorname{int}F(x)$表示$F(x)$的闭包和内部．

定义1.1[4]　H-空间是一配对$(X,\{\Gamma_A\})$，其中X是拓扑空间，$\{\Gamma_A\}$是给定的X的一族非空可缩子集，用X中的一切有限子集编号，使得当$A\subset B$时，$\Gamma_A\subset\Gamma_B$．

设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，集$D\subset X$称为关于集$C\subset X$是H-凸的，如果对任何$A\in\mathscr{F}(C)$，$\Gamma_A\subset D$；当$C=D$时，称D是H-凸的．

子集$D\subset X$称为弱H-凸的，如果对每一$A\in\mathscr{F}(D)$，$\Gamma_A\subset D$是非空可缩的．子集$K\subset X$称为H-紧的，如果对每一$A\in\mathscr{F}(X)$存在一个紧的弱H-凸子集$D\subset X$，使$K\cup A\subset D$．

定义1.2[4]　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，集值映象$F:X\to 2^X$称为H-KKM映象，如果对每一$A\in\mathscr{F}(X)$，$\Gamma_A\subset F(A)$．

定理1.1[4]（H-KKM定理）　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$F:X\to 2^X$是H-KKM映象，使得

（i）　对每一$x\in X$，$F(x)$是紧闭的．

（ii）　存在一紧集$L\subset X$和一H-紧集$K\subset X$，使得对每一弱H-凸集D，$K\subset D\subset X$，有

---

* 张石生推荐．

$$\bigcap_{x\in D}(F(x)\cap D)\subset L$$

则
$$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$$

设$(X,\{\Gamma_A\})$是一H-空间，函数$f:X\to\bar{R}$称为拟H-凸(凹)的，如果对任意$\lambda\in\bar{R}$，集$\{x\in X:f(x)<\lambda\}$($\{x\in X:f(x)>\lambda\}$)是H-凸（凹）的．

设X，Y是两拓扑空间，记$C(X,Y)=\{s:X\to Y:s$ 是连续的$\}$，$C^*(X,Y)=\{s\in C(X,Y):s^{-1}$映$Y$中紧集为$X$中紧集$\}$．

在本文中，我们假设所有拓扑空间均是Hausdorff拓扑空间．

二、H-KKM定理的几点推广

首先我们引入如下

定义2.1[7]　设X和Y是两拓扑空间，$G,F:X\to 2^Y$是两个集值映象．(i)G称为在X上是转移闭值的，如果对所有$x\in X$，当$y\bar{\in}G(x)$时，存在$x'\in X$，使得$y\bar{\in}\overline{G(x')}$．(ii)$F$称为在$X$上是转移开值的，如果对所有的$x\in X$，当$y\in F(x)$时，存在$x'\in X$，使得$y\in\mathrm{int}F(x')$．

注2.1　易知

(i)　一个集值映象是转移开（闭）值的，如果它是开（闭）值的．

(ii)　集值映象$G:X\to 2^Y$在X上是转移闭值的，当且仅当映象$F:X\to 2^Y$，$F(x)=Y\setminus G(x)$，$x\in X$，是转移开值的．

(iii)　如果$G:X\to 2^Y$是X上转移闭（开）值的，$s\in C(X,Y)$，则$s^{-1}G:X\to 2^X$在X上是转移闭（开）值的．

现给出H-KKM定理的几个推广形式．

定理2.1　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$F:X\to 2^X$是一集值映象，使得

(i)　F在X上是转移闭值的．

(ii)　映象$\bar{F}:X\to 2^X$，$\forall x\in X$，$\bar{F}(x)=\overline{F(x)}$，是一个H-KKM映象．

(iii)　存在一紧集$L\subset X$和一H-紧集$K\subset X$，使得对每一弱H-凸集D，$K\subset D\subset X$，有

$$\bigcap_{x\in D}(\overline{F(x)}\cap D)\subset L$$

则
$$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$$

证明　易知映象$\bar{F}:X\to 2^X$满足定理1.1的所有条件，因此由定理1.1知，$\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}\neq\phi$．现余下的只需证明$\bigcap_{x\in X}F(x)=\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}$．

显然$\bigcap_{x\in X}F(x)\subset\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}$．假设存在某个$y\in\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}$，使得$y\bar{\in}\bigcap_{x\in X}F(x)$，那么必有某个$x\in X$，$y\bar{\in}F(x)$．由条件(i)知，存在$x'\in X$，使得$y\bar{\in}\overline{F(x')}$，因而$y\bar{\in}\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}$，矛盾，故有$\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}\subset\bigcap_{x\in X}F(x)$，这表明$\bigcap_{x\in X}F(x)=\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}$．证毕．

注2.2　定理2.1削弱了定理1.1中映象F的紧闭性和H-KKM条件．事实上，虽然$F:X\to 2^X$不是紧闭的，但由X是Hausdorff空间知$\bar{F}:X\to 2^X$是紧闭的．故定理2.1适当改进了

[4,定理1]和[7,定理2]．易证$F:X\to 2^X$在X上是转移闭值的当且仅当$\bigcap_{x\in X}F(x)=\bigcap_{x\in X}\overline{F(x)}$．

以下简单的例子表明定理2.1并不包括于定理1.1之中．

例 设$X=[0,1]$．定义$F:X\to 2^X$如下：对每一$x\in X$，$F(x)$是区间$[x,1]$中的所有有理点．对每一$A\in\mathscr{F}(X)$，令$\Gamma_A=\mathrm{co}A$，则$(X,\{\Gamma_A\})$是一H-空间．显然$\Gamma_A\not\subset F(A)$，故F不是H-KKM的，且对几乎所有的$x\in X$，$F(x)$不是闭集($x=1$除外)，故不可用定理1.1．但易知$\bar{F}:X\to 2^X$是H-KKM映象，且F在X上是转移闭值的．令$K=L=D=[1/2,1]$，则定理2.1的全部条件满足，故$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$．事实上$\bigcap_{x\in X}F(x)=\{1\}$．

由定理2.1，我们立即得到

推论2.2 设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$F:X\to 2^X$是集值映象，满足定理2.1的条件(i)和(ii)以及以下条件(iii)

(iii) 存在H-紧集$K\subset X$，使得$\bigcap_{x\in K}\overline{F(x)}$是紧集．则$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$．

定理2.3 设$(X,\{\Gamma_A\})$是一H-空间，Y是拓扑空间，$F:X\to 2^Y$，$s\in C^*(X,Y)$．如果

(i) F在X上是转移闭值的；

(ii) 映象$s^{-1}F:X\to 2^X$是H-KKM映象；

(iii) 存在紧集$L\subset Y$和H-紧集$K\subset X$，使得对每一弱H-凸集D，$K\subset D\subset X$，有

$$\bigcap_{x\in D}(\overline{F(x)}\cap s(D))\subset L$$

则

$$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$$

证明 由条件(i)和注2.1(iii)，我们知道映象$s^{-1}F:X\to 2^X$在X上是转移闭值的．由条件(iii)有

$$\bigcap_{x\in D}(\overline{s^{-1}F(x)}\cap D)\subset\bigcap_{x\in D}(s^{-1}\overline{F(x)}\cap D)$$

$$=\bigcap_{x\in D}s^{-1}(\overline{F(x)}\cap s(D))=s^{-1}(\bigcap_{x\in D}\overline{F(x)}\cap s(D))\subset s^{-1}(L)$$

$s^{-1}(L)$是X中紧集．这样由定理2.1知，$\bigcap_{x\in X}s^{-1}F(x)\neq\phi$．

因而

$$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$$

定理2.4 设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$F,G:X\to 2^X$是两个集值映象，使得

(i) G在X上是转移闭值的，且对每个$x\in X$，$F(x)\subset G(x)$．对所有$y\in X$，$\{x\in X:y\bar{\in}F(x)\}$是H-凸的．

(ii) 对每个$x\in X$，$x\in F(x)$．

(iii) 存在紧集$L\subset X$和H-紧集D，$K\subset D\subset X$有

$$\bigcap_{x\in D}(\overline{G(x)}\cap D)\subset L$$

则

$$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$$

证明 我们仅需证映象$\bar{G}:X\to 2^X$是H-KKM映象即可．假设$\bar{G}$不是H-KKM的，则存在某个$A\in\mathscr{F}(X)$，使得对某个$y\in\Gamma_A$，$y\bar{\in}\bigcap_{x\in A}\overline{G(x)}=\overline{G(A)}$．因此$y\bar{\in}G(A)\supset F(A)$．于是有$A\subset\{x\in X:y\bar{\in}F(x)\}$．由条件(i)知$\Gamma_A\subset\{x\in X:y\bar{\in}F(x)\}$，故$y\bar{\in}F(y)$．这与条件(ii)矛盾．证毕．

定理2.4推广了[4,定理2]和其他文献的相应结果．

三、应　　用

在这一节中，我们应用所得的H-KKM类定理证明一些重合定理，匹配定理．然后用这些结果建立几个向量值极大极小不等式．这些结论推广了[1,2,4,5,6,7]中的相应结果．

定理3.1　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑空间，$G:X\to 2^Y$，使得

(i)　G在X上是转移开值的．

(ii)　对每个$y\in Y$，$G^{-1}y$是非空H-凸的．

(iii)　存在H-紧集$K\subset X$，使得$Y\setminus \bigcup\limits_{x\in K}\mathrm{int}G(x)$是紧的．

则对任意$s\in C^*(X,Y)$，存在$\bar{x}\in X$，使得$s(\bar{x})\in G(\bar{x})$．

证明　定义映象$F:X\to 2^Y$如下，对每一个$x\in X$，

$$F(x)=Y\setminus G(x)$$

则由条件(i)知F在X上是转移闭值的．集合$\bigcap\limits_{x\in K}\overline{F(x)}=\bigcap\limits_{x\in K}\overline{Y\setminus G(x)}=Y\setminus\bigcup\limits_{x\in K}\mathrm{int}G(x)$是紧集．因此对每个弱H-凸集$D$，$K\subset D\subset X$，

$$\bigcup_{x\in D}(\overline{F(x)}\cap s(D))\subset\bigcap_{x\in K}(\overline{F(x)}\cap s(D))\subset\bigcap_{x\in K}\overline{F(x)}$$

如果对某个$s\in C^*(X,Y)$，映象$\overline{s^{-1}F}:X\to 2^X$是H-KKM的，则由定理2.3知，$\bigcap\limits_{x\in X}F(x)\neq\phi$．由此可知$G(X)\neq Y$,这将与条件(ii)矛盾.所以对每个$s\in C^*(X,Y)$,存在$A\in\mathscr{F}_1(X)$和$\bar{x}\in\Gamma_A$,使得$\bar{x}\notin\overline{s^{-1}F(A)}$.因此$\bar{x}\notin s^{-1}F(A)$，$s(\bar{x})\notin F(A)$．故$A\subset G^{-1}(s(\bar{x}))$．由$G^{-1}(s(\bar{x}))$的H-凸性，有$\Gamma_A\subset G^{-1}(s(\bar{x}))$．故$\bar{x}\in G^{-1}(s(\bar{x}))$即$s(\bar{x})\in G(\bar{x})$．

定理3.1推广了[5,定理1]和[6,定理6]．

当$X=Y$，$s=I_X$时，我们有以下不动点定理，推广了[1,定理1]．

推论3.2　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$G:X\to 2^X$，使得

(i)　G在X上是转移开值的．

(ii)　对每个$y\in X$，$G^{-1}y$是非空且H-凸的．

(iii)　存在H-紧集$K\subset X$，使得$X\setminus\bigcup\limits_{x\in K}\mathrm{int}G(x)$是紧集．

则存在$\bar{x}\in X$，使得$\bar{x}\in G(\bar{x})$．

定理3.3　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑空间，$G,F:X\to 2^Y$，$s\in C^*(X,Y)$，使得

(i)　G在X上是转移开值的．

(ii)　对每个$y\in Y$，$G^{-1}y$非空且$F^{-1}y$关于$G^{-1}y$是H-凸的．

(iii)　存在H-紧集$K\subset X$和紧集$L\subset Y$，使得对每个弱H-凸集D，$K\subset D\subset X$，有

$$Y\setminus\bigcup_{x\in D}(\mathrm{int}G(x)\cap s(D))\subset L$$

则存在$\bar{x}\in X$，使得$s(\bar{x})\in F(\bar{x})$．

证明　定义映象$T:X\to 2^Y$如下：对每一个$x\in X$，$T(x)=Y\setminus G(x)$

类似于定理3.1的证明，可证对每一$s\in C^*(X,Y)$,$\overline{s^{-1}T}:X\to 2^Y$不是H-KKM映象.因此存在$A\in\mathscr{F}_1(X)$,$\bar{x}\in\Gamma_A$,使得$s(\bar{x})\notin T(A)$也就是$A\subset G^{-1}(s(\bar{x}))$.由条件(ii),有$\bar{x}\in\Gamma_A\subset F^{-1}(s(\bar{x}))$即$s(\bar{x})\in F(\bar{x})$．

现给出一个匹配定理，推广了[6,定理2]和[2,推论1]．

定理3.4　设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑空间，$G:X\to 2^Y$，使得

(i)　G在X上是转移开值的．

(ii) $G(X)=Y$.

(iii) 存在H-紧集$K\subset X$和紧集$L\subset Y$，使得

$$Y\setminus\bigcup_{x\in K}\operatorname{int}G(x)\subset L$$

则对每个$s\in C^*(X,Y)$，存在$A\in\mathscr{F}(X)$，$\bar{x}\in\Gamma_A$，使得$s(\bar{x})\in\bigcap_{x\in A}G(x)$.

证明 对每个$x\in X$，令$F(x)=Y\setminus G(x)$. 则$F:X\to 2^Y$是转移闭值的. 对每个$s\in C^*(X,Y)$，每个弱H-凸集D，$K\subset D\subset X$，

$$\bigcap_{x\in D}\overline{F(x)}\cap s(D)\subset\bigcap_{x\in K}F(x)=Y\setminus\bigcup_{x\in K}\operatorname{int}G(x)\subset L$$

若对某个$s\in C^*(X,Y)$，$\overline{s^{-1}F}$: $X\to 2^X$是H-KKM的，则由定理2.3，有$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$. 从而$G(X)\neq Y$. 和(ii)矛盾. 因此存在$A\in\mathscr{F}(X)$，$\bar{x}\in\Gamma_A$，使得$\bar{x}\,\overline{\in}\,s^{-1}F(A)$. 故$x\,\overline{\in}\,s^{-1}F(A)$，$s(\bar{x})\,\overline{\in}\,F(A)=Y\setminus\bigcap_{x\in A}G(x)$ 即$s(\bar{x})\in\bigcap_{x\in A}G(x)$.

定理3.5 设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑空间，$(E,\mathring{C})$是拓扑Riesz空间，这里C是一闭锥且$\mathring{C}\neq\phi$. 设$\alpha,\beta\in E$，$f,g:X\times Y\to E$是两函数，使得

(i) 对每个$y\in Y$，$\{x\in X:f(x,y)\in\alpha+\mathring{C}\}$关于$\{x\in X:g(x,y)\in\beta+\mathring{C}\}$是H-凸的.

(ii) 对每一$(x,y)\in X\times Y$，当$g(x,y)\in\beta+\mathring{C}$时，存在$x'\in X$和$y$的邻域$\mathscr{N}(y)$，使得对所有$z\in\mathscr{N}(y)$，$g(x',z)\in\beta+\mathring{C}$.

(iii) 存在H-紧集$K\subset X$，紧集$L\subset Y$，使得

$$M=\bigcap_{x\in K}\overline{\{y\in Y:g(x,y)\,\overline{\in}\,\beta+\mathring{C}\}}\subset L$$

则以下之一结论成立：

(a) 对任意$s\in C^*(X,Y)$，存在$\bar{x}\in X$，使得

$$f(\bar{x},s(\bar{x}))\in\alpha+\mathring{C}$$

(b) 存在$\bar{y}\in M$，使得对所有$x\in X$，$g(x,\bar{y})\,\overline{\in}\,\beta+\mathring{C}$

证明 定义$F,G:X\to 2^Y$如下：对每个$x\in X$

$$F(x)=\{y\in Y:f(x,y)\in\alpha+\mathring{C}\}$$

$$G(x)=\{y\in Y:g(x,y)\in\beta+\mathring{C}\}$$

若结论(b)不成立，则对每个$y\in M$，有$x\in X$，使得$g(x,y)\in\beta+\mathring{C}$，也就是$y\in G(x)$，故$M\subset\bigcup_{x\in X}G(x)$.

由
$$M=\bigcap_{x\in K}\overline{\{y\in Y:g(x,y)\,\overline{\in}\,\beta+\mathring{C}\}}=\bigcap_{x\in K}\overline{(Y\setminus\operatorname{int}G(x))}$$
$$=Y\setminus\bigcup_{x\in K}\operatorname{int}G(x)\subset\bigcup_{x\in X}\operatorname{int}G(x)$$

故$Y=G(X)$，故对每个$y\in Y$，$G^{-1}y$不是空集. 现在，(1)对每个$y\in Y$，$G^{-1}y$非空且$F^{-1}y$关于$G^{-1}y$是H-凸的.

(2) G在X上是转移开值的.

(3) 存在H-紧集$K\subset X$，紧集$L\subset Y$，使得$Y\setminus\bigcup_{x\in K}\operatorname{int}G(x)\subset L$.

由定理3.3，对任意$s\in C^*(X,Y)$，存在$\bar{x}\in X$，使得$s(\bar{x})\in F(\bar{x})$，即$f(\bar{x},s(\bar{x}))\in\alpha+\mathring{C}$.

推论3.6 设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$f,g:X\times X\to(E,C)$是两个函数，这里E是拓扑Riesz空间，C是闭锥且$\mathring{C}\neq\phi$. 如果

(i) 对每一$(x,y)\in X\times X$，$f(x,y)\leqslant g(x,y)$.

(ii) 对任何$y\in X$，$\lambda\in E$，$\{x\in X: f(x,y)\in\lambda+\mathring{C}\}$是H-凸集。

(iii) 对任何$(x,y)\in X\times X$，当$g(x,y)\in\lambda+\mathring{C}$时，存在$x'\in X$和$y$的邻域$\mathscr{N}(y)$，使得对所有$z\in\mathscr{N}(y)$，$g(x',z)\in\lambda+\mathring{C}$。

(iv) 存在H-紧集$K\subset X$，使得集

$$\bigcap_{x\in K}\overline{\{y\in X: g(x,y)\bar{\in}\lambda+\mathring{C}\}}\text{是紧集.}$$

则以下结论之一成立：

(a) 存在$\bar{y}\in X$，使得对所有$x\in X$，$g(x,\bar{y})\bar{\in}\lambda+\mathring{C}$。

(b) 存在$\bar{x}\in X$，使得$f(\bar{x},\bar{x})\in\lambda+\mathring{C}$。

证明 在定理3.5中，令$X=Y$，$\alpha=\beta=\lambda\in E$，$s=I_X$。由条件(i)、(ii) 可以证得定理3.5中条件(i)成立。定理3.5的其他条件也成立。故结论由定理3.5立得。

当$E=\bar{R}$，$f=g$时，有

推论3.7 设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，$f: X\times X\to\bar{R}$是一函数，使得

(i) f在y处是γ-转移下半连续的，即：对所有$x\in X,y\in X$，当$f(x,y)>\gamma$时，存在$x'\in X$和y的邻域$\mathscr{N}(y)$，使得对所有$z\in\mathscr{N}(y)$，$f(x',z)>\gamma$。

(ii) 对每一固定的$y\in X$，$x\mapsto f(x,y)$在X上是拟H-凸的。

(iii) 存在H-紧集$K\subset X$，使得

$$\bigcap_{x\in K}\overline{\{y\in X: f(x,y)\leqslant\gamma\}}\text{ 是紧集}$$

则以下结论之一成立：

(a) 存在$\bar{x}\in X$，使得$f(\bar{x},\bar{x})>\gamma$。

(b) 存在$\bar{y}\in X$，使得对所有$x\in X$，$f(x,\bar{y})\leqslant\gamma$。

定理3.5和推论3.6，3.7分别推广了[2,定理5]、[4,定理3]、[7,定理4]。

参 考 文 献

[1] Browder, E., The fixed point theory of multivalued mapping on topological vector spaces, *Math. Ann.*, **177** (1968), 283—301.

[2] Chang Shih-sen and Ma Yi-hai, Generalized KKM theorem on H-space with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **163** (1992), 406—421.

[3] Fan, Ky, Some properties of convex sets related to fixed point theorem, *Math. Ann.*, **266** (1984), 519—537.

[4] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Some further generalization of Knaster-Kuratiwski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 484—490.

[5] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Fixed point theorems and vector valued minimax theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **146** (1990), 363—373.

[6] Park, S., Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 164—176.

[7] Tian, G. Q., Generalization of the FKKM theorems and the Ky Fan minimax inequality with application to maximal elements, price equilibrium and complementarity, *J. Math. Anal. Appl.*, **170** (1992), 457—471.

Transfer Open or Closed Setvalued Mapping and Generalization of H-KKM Theorem with Applications

Li Bing-you Su Jia-bao

(Department of Mathematics, Hebei Teachers University, Shijiazhuang, Hebei)

Abstract

In this paper, we introduce a class of generalized mapping called transfer open or closed valued mapping to generalized the KKM theorem on H-space. Then as applications, using our H-KKM theorem, we prove some coincidence theorems, matching theorems and vecotor valued minimax inequalities which generalize slightly the corresponding results in [1,2,4,5,6,7].

Key words transfer closed or open setvalued mapping, coincidence theorem, H-KKM mapping, matching theorem