

四个对激波与涡旋有高分辨率的计算格式的比较*

黄 敦 杨 淳

(北京大学) (北京师范大学)

(1993年3月1日收到)

摘 要

近十年来, 计算非定常无粘可压气体力学 Euler 方程组的高分辨率差分格式有显著进展。本文选择四个近年受到重视的格式, 用一较复杂的二维不定常问题作进一步的 考验。所选算例为平面激波遇矩形障碍物初始阶段的绕射与反射。在挡板头部有两个尖角点, 角点附近流场参量变化剧烈, 会有中心稀疏波和集中涡的出现, 要模拟好它们, 就要求格式有较好的 适应性。本文选择特殊的激波马赫数 $M_s = 2.068$, 使静止坐标系下波波后流速恰为声速, 并沿中心稀疏波区从角点发出的一条曲线也有这一现象, 以考察各格式在方程组某一特征值恰为 零时的计算特点, 因零特征值可以使某些格式局部受损。计算结果的图形显示可表明四个格式在激波分辨率, 格式粘性、膨胀波的计算、模拟非定常集中涡产生过程的能力等方面的性质。

关键词 高分辨率格式 激波反射 绕射 尖角 涡旋生成

一、引 言

计算无粘气体力学非线性 Euler 方程组的高分辨率格式近年发展很快。Van Leer 1979 年提出的 MUSCL(monotonic upwind scheme for conservation laws) 格式首先显示了高分辨率的可能, 之后又出现了许多类型的格式, 常见的如 TVD 格式 (total variation diminishing), ENO 格式 (essentially nonoscillatory), 及国内发展的 MmB 格式 (maximum minimum bounded), NND 格式 (nonoscillatory with no free parameter difference scheme) 等。称它们为高分辨率格式, 是指差分格式具有如下性质:

1. 在解的非强间断区域, 差分格式一般能以二阶或二阶以上精度逼近偏微分方程。加密网格也可以提高计算结果的准确性, 但同提高格式精度而增加的算法复杂程度相比, 加密网格要增加大得多的计算量, 所以二阶精度意义重大。

2. 在窄的间断过渡区附近 (激波或接触间断), 基本不出现早期著名格式不可避免的非物理的数值振荡型误差。ENO 格式容许有幅度很小的振荡 (约 $1/100$), 但有在光滑区极值点仍可达高精度的优点。

* 国家自然科学基金及科委资助课题。

3. 在保证差分格式稳定的前提下尽量减小格式粘性, 这一点可由使用尽可能高的库朗数或在计算中自动增加反扩散项等方法达到。并且放弃了在激波捕捉法中广泛应用达三十年的人为粘性, 当年人为粘性很具开创性, 但它比高分辨率格式对激波过渡区的抹光严重, 特别是同一问题中出现几个激波的情况, 且在计算中要试验选择适当的参数, 这也加大了计算量。

4. 激波过渡区窄, 只有很少的过渡点。

高分辨率格式仍在发展, 已用众多算例考验, 并在高技术领域的计算中广为应用。我们选择加以比较的有[1]中提出的TVD1格式, [2]中的ENO格式, 同一文献给出的另一TVD型格式(记为TVD2), 及一种对称型TVD格式([3], 记作Yee格式), 后者在相同网格数下可比TVD1减少约20%的机时。

虽然以上格式的数值分析工作已有很多结果, 但从纯数学角度研究多于三个方程, 多于三个自变量的非线性偏微分方程组仍有较大困难。近期的差分格式因高度非线性的构造, 数值分析工作也很复杂。因此, 用复杂的流体力学问题检验格式十分重要, 数值实验可帮助我们了解格式的可靠性, 准确程度及效率。此外, 物理实验的光测照片对真实流场的描述也可验证计算结果。

我们计算了平面激波绕矩形挡板的波系及流场结构, 以展示格式在挡板头部尖角处膨胀波的计算, 集中涡的产生及弓形激波模拟能力等方面的计算性能。为比较, 一致采用Schwarz变换构造的二维网格, 网格数均为 100×40 。

二、计算格式及力学问题的提出

控制方程为无粘气体力学Euler方程组:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0$$

其中

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$$

$$F(U) = (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, u(p + E))^T$$

$$G(U) = (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v(p + E))^T$$

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right)$$

ρ, p, E 为无粘 γ 气体的密度、压力及单位体积的总能, u, v 为 x, y 方向的速度分量, γ 为绝热系数。

我们用有限体积法将四种格式直接推广到二维非定常问题, 未采用原有的算子分裂法, 时间方向用Runge-kutta法以使非定常问题达时间二阶精度。数值通量的构造由[1~3]中的四种格式推广, 所得半离散有限体积格式为:

$$\frac{dU_{i,j}}{dt} = -\frac{1}{S_{i,j}} (h_{i+1/2,j} - h_{i-1/2,j} + h_{i,j+1/2} - h_{i,j-1/2})$$

其中 $S_{i,j}$ 为四边形网格 $\Omega_{i,j}$ 的面积(见图1),

$$h_{i+1/2,j} = F(U_{i+1/2,j}) \Delta y_{\mathcal{Q}_2} - G(U_{i+1/2,j}) \Delta x_{\mathcal{Q}_2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \phi_{i+1/2,j}^k R_{i+1/2,j}^k$$

其中 $\{R_{i+1/2,j}^k\}$ 为矩阵 $\frac{\partial F}{\partial U} \Big|_{i+1/2,j} \Delta y_{\mathcal{L}_2} - \frac{\partial G}{\partial U} \Big|_{i+1/2,j} \Delta x_{\mathcal{L}_2}$ 的特征向量, 四种格式的

$\phi_{i+1/2,j}^k$ 形式如下:

1. TVD1格式

$$\phi_{i+1/2,j}^k = g_{ij}^k + g_{i+1,j}^k - Q^k(a_{i+1/2,j}^k + v_{i+1/2,j}^k) d_{i+1/2,j}^k$$

其中 $\{a_{i+1/2,j}^k\}_{k=1}^3$ 为与 $\{R_{i+1/2,j}^k\}_{k=1}^3$ 对应的特征值,

$$g_{ij}^k = \text{minmod}(\tilde{g}_{i+1/2,j}^k, \tilde{g}_{i-1/2,j}^k)$$

$$\tilde{g}_{i+1/2,j}^k = \frac{1}{2} Q^k(a_{i+1/2,j}^k) d_{i+1/2,j}^k$$

$$v_{i+1/2,j}^k = \begin{cases} (g_{i+1,j}^k - g_{ij}^k) / d_{i+1/2,j}^k & (\text{若 } d_{i+1/2,j}^k \neq 0) \\ 0 & (\text{若 } d_{i+1/2,j}^k = 0) \end{cases}$$

其中 $\{d_{i+1/2,j}^k\}_{k=1}^3$ 为 $U_{i+1,j} - U_{i,j}$ 在 $\{R_{i+1/2,j}^k\}_{k=1}^3$ 上的分解系数.

TVD1与Yee格式的数值通量中都有一个重要的函数 $Q^k(x) \leq 1$, 自变量 x 可以是 a^k 或 $a^k + v^k$. TVD1格式构造中一个关键点是选择 $Q(x)$ 基本上为 $|x|$, 目的是抑制数值振荡, 保证一般可达二阶精度. 但 $|x|$ 需要在 $x=0$ 处略加修改, 因 $Q(0)=0$ 会导致违反熵条件, 在稀疏波区格式会计算出违反热力学第二定律的膨胀激波. 故[1]中的 $Q(x)$ 定义如下:

$$Q(x) = \begin{cases} |x| & \text{若 } |x| > \varepsilon_k \\ (|x|^2 + \varepsilon_k^2) / 2\varepsilon_k & \text{若 } |x| \leq \varepsilon_k \end{cases}$$

g^k 中记号 minmod 表示关于二个或三个自变量的函数, 若自变量均同号, 则其值为自变量中绝对值最小者, 若自变量中至少有一个符号不同, 则其值为零, 即:

$$\text{minmod}(x, y, z) = \begin{cases} \text{sign} \cdot \min(|x|, |y|, |z|) & (\text{若 } x, y, z \text{ 同号}) \\ 0 & (\text{否则}) \end{cases}$$

2. Yee格式

$$\phi_{i+1/2,j}^k = Q^k(a_{i+1/2,j}^k) (g_{i+1/2,j}^k - g_{i-1/2,j}^k)$$

其中 $g_{i+1/2,j}^k = \text{minmod}(d_{i-1/2,j}^k, d_{i+1/2,j}^k, d_{i+3/2,j}^k)$

3. ENO格式

$$\phi_{i+1/2,j}^k = -|a_{i+1/2,j}^k| d_{i+1/2,j}^k + \max(0, a_{i+1/2,j}^k) (1 + \lambda a_{i+1/2,j}^k - \lambda a_{i-1/2,j}^k) \bar{S}_{ij}^k \\ - \min(0, a_{i+1/2,j}^k) (1 + \lambda a_{i+3/2,j}^k - \lambda a_{i+1/2,j}^k) \bar{S}_{i+1,j}^k$$

其中 $\bar{S}_{ij}^k = \text{minmod}(S_{-i,j}^k, S_{+i,j}^k) / [1 + \lambda(a_{i+1/2,j}^k - a_{i-1/2,j}^k)]$

$$S_{\pm i,j}^k = d_{i\pm 1/2,j}^k \mp D_{i\pm 1/2,j}^k$$

$$D_{i+1/2,j}^k = \text{minmod}(d_{i+3/2,j}^k - d_{i+1/2,j}^k, d_{i+1/2,j}^k - d_{i-1/2,j}^k)$$

$$\lambda = \sqrt{\Delta x_{\mathcal{L}_2}^2 + \Delta y_{\mathcal{L}_2}^2} / \Delta t$$

4. TVD2格式

仅与ENO格式的 $S_{\pm i,j}^k$ 不同: $S_{\pm i,j}^k = d_{i\pm 1/2,j}^k$

以上四格式中用到的 $U_{i+1/2,j}$ 值均由 Roe 平均得到^[1]。上述公式只给出 \mathcal{L}_2 边上的数值通量，其余三边的通量可类似得到。

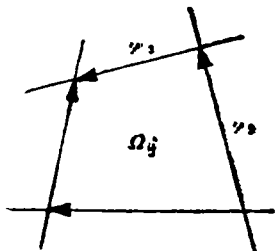


图 1

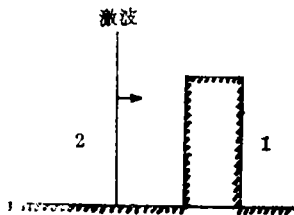


图 2

图 2 为所算力学问题的初始时刻示意图。所有量都采用无量纲化。入射激波前 1 区的量 $p_1 = \rho_1 = 1, u_1 = v_1 = 0, E_1 = 2.5$ ，选择入射激波马赫数使波后 2 区速度 $u_2 = 0, u_2 = c_2, c_2$ 为局部声速，则有

$$\frac{u_2}{c_1} = \frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}}$$

利用激波关系式，得：

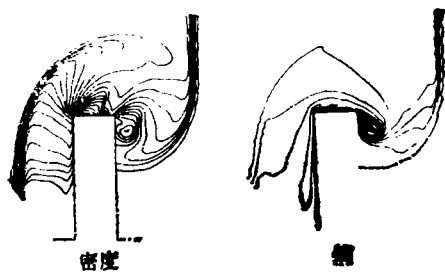
$$\frac{2}{\gamma+1} \left(M_s - \frac{1}{M_s} \right) = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_s^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_s^2}{(\gamma+1)M_s^2} \right]^{1/2}$$

给出：入射激波马赫数 $M_s = (7 + \sqrt{34})^{1/2} / \sqrt{3} = 2.068037$

压力比 $p_2/p_1 = 4.823148$

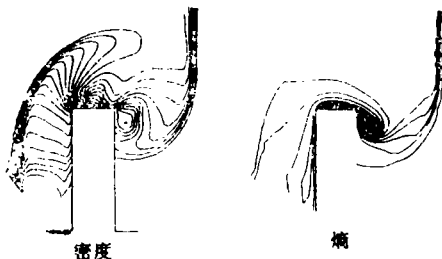
三、计算结果比较与结论

图 5~图 6 为四种格式下流场的密度及熵的等值线分布，图 7~图 10 为四种格式计算结果沿物面的压力分布及计算平面 y 方向第 30 层网格点上的密度分布，此处流场受挡板影响不大。图中可见，Yee 格式计算出的激波过渡区较宽，TVD1、TVD2 及 ENO 格式则较为接近。从第 30 层给出的流场较简单部分的密度分布看，Yee 格式有四个激波过渡点，其余三格式只有三个点，其中又以 ENO 格式的结果略好。这里的激波过渡区仍略宽，是由于由流场网格很密处决定的库朗数对第 30 层过小。Yee 格式的优点是简化了算法，可以节约 20% 的计算量，但对称的格式未充分反映迎风的物理特性，故格式粘性比另外三格式略大，激波抹光略多。



密度 熵
 $M_s = 2.068$, 时间 = 1.2, 网格: 100×40

图 3 TVD1 格式



密度 熵
 $M_s = 2.068$, 时间 = 1.2, 网格: 100×40

图 4 Yee 格式

关于挡板尖角处膨胀波的计算，均采用 Schwarz 变换生成计算网格，网格正交性较好，尖角处密集且适合流场的物理特性。计算结果以 TVD1 格式较好，其余三格式等熵图

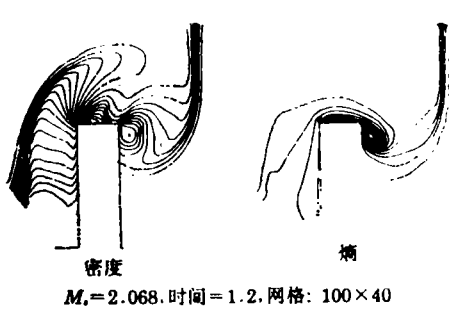


图5 ENO 格式

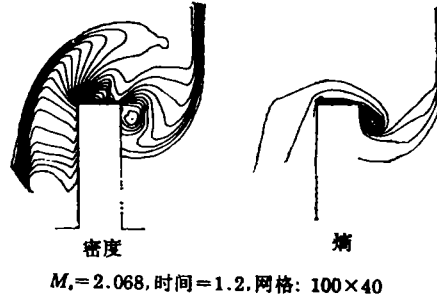


图6 TVD2 格式

中在挡板的左上角出现一小封闭曲线，反映此处有小量熵增，这是由于流场参量有较大梯度且格式粘性稍大引起的计算误差。在TVD1格式的等密度线分布中，挡板左上角膨胀波较均匀，所有曲线都自角点发出，从理论分析也正应如此，而其余三格式的等密度线在挡板左上角有两个曲三角形状的较密集区，好象有两个不同熵值的稀疏波。这一现象说明，即使采用同样较为适合物理问题的网格，高分辨率格式仍有差别，这一点在物面压力分布上也得到反映。激波在挡板左侧面发生反射压力最高，挡板头部的稀疏效应向高压区传播，因而沿板侧在反射波后压力单调下降，图7显示TVD1格式在角点达压力最低值，这与稀疏波传播的理论分析一致，而另外三格式在左上角前已达压力最低值。从四格式构造的角度分析，我们认为这一微小差别是产生于TVD2与ENO格式都未引入 $Q(x)$ 函数一类的熵强迫机制。TVD1与Yee格式中 $Q(x)$ 的构造，当守恒律方程通量的Jacobi矩阵出现零特征值时，引入一些人为粘性，可以防止低强度非物理解的产生，此差别在一维激波管问题的计算中更为明显^[4]，而Yee格式因格式粘性较大，在本问题中也不是最好的。

因计算网格较密且适合于此力学问题，角点下游附近集中涡的生成现象四格式的计算结果基本一致。如果网格与格式的分辨率不够好，这一数十年前已可由激波管实验中得到的涡生成现象，就不能得到较好的数值模拟。本文中涡旋的产生是由于弓形激波后熵与温度不均

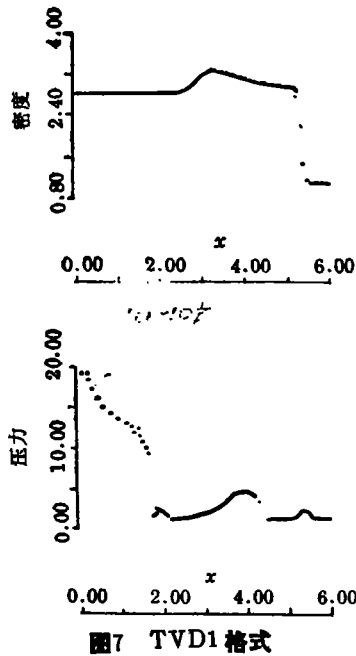


图7 TVD1 格式

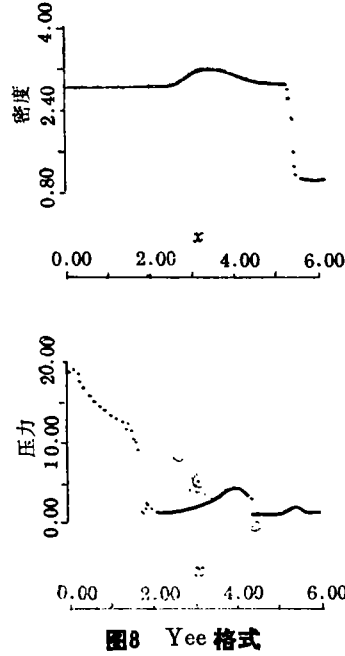


图8 Yee 格式

匀引起的, 这里也应有物理粘性的影响, 但短时间内, 且空气的粘性系数较小, 粘性影响的线性尺度为矩形挡板宽度的千分之一量级。

以上四格式都具有高分辨率, 计算结果与北大激波管实验室黄文生副教授、胡永生工程师提供的干涉仪照片相符合, 它们的差别是次要的。其中TVD1格式虽早在1983年已提出, 但在减小格式粘性, 消除激波附近数值振荡, 避免算出非物理的膨胀激波及高精度地模拟复杂流场, 特别是尖缘初始阶段集中涡生成几方面仍有一定的优点。

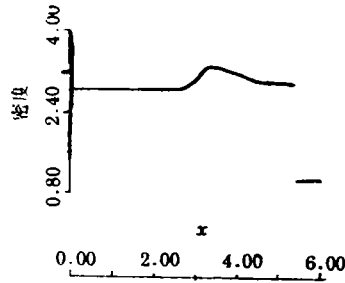


图9 ENO 格式

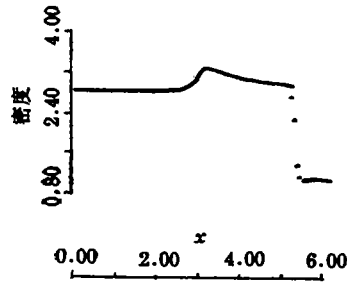


图10 TVD2 格式

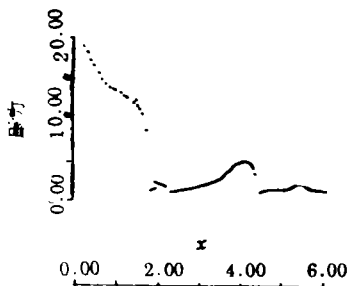


图9 ENO 格式

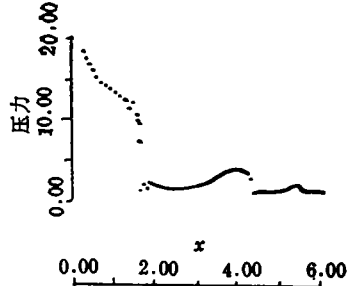


图10 TVD2 格式

参 考 文 献

- [1] Harten A., High resolution schemes for hyperbolic conservative laws, *J. Comput. phys.*, 49(1983), 357—393.
- [2] Harten A., and S. Osher, Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes, *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(1987), 279—309.
- [3] Yee, H. C., construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their application, *J. Comput. phys.*, 68(1987), 151—179.
- [4] 黄敦、杨淳、种连荣, 关于以气体力学 Euler 方程组为基础的激波计算, 第四届流体力学数值方法论文集(1989), 9—19.

A Comparison of Four Recent Numerical Schemes Giving High Resolution of Shock Wave and Concentrated Vortex

Huang Dun

(Depart. of Math., Peking University, Beijing)

Yang Chun

(Depart. of Math., Beijing Normal University, Beijing)

Abstract

In recent ten years high resolution difference schemes for the computation of the full unsteady Eulerian system of equations for inviscid compressible gas finds celebrated progress. This paper tests, by a complex two-dimensional unsteady problem, four recent schemes, to them further attention is paid. The test problem is the initial stage of a two-dimensional diffraction and reflection of a plane shock wave, impinging on a rectangular obstacle. At the top side there are two sharp corners, near which flow parameters finds severe variation. There is an occurrence of expansion fan with a center and also concentrated vortices. To simulate them well, the schemes should have good adaptivity. The special shock Mach number $M_s=2.068$ is so chosen, that at this M_s the partial velocity behind impinging shock in fixed coordinate system is right equal to the speed of sound there, this condition also occurs along a curve in the region of expansion fan with a center at the corner. This can clarify the computational feature of different schemes in case, when one of the eigenvalues is just zero. Zero eigenvalue may spoil some schemes locally. Graphical visualization of the computational results may show features of the tested schemes about the shock wave resolution, scheme viscosity, expansion wave and the ability to simulate the process of the generation of unsteady concentrated vortex.

Key words high resolution schemes, shock wave reflection, diffraction, sharp corner, vortex generation