应用数学和力学，第15卷第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

大变形对称弹性理论的广义变分原理*

赵玉祥　顾祥珍　李欢秋

（洛阳水利工程研究所，1993年8月4日收到）

摘　要

本文以陈至达提出的变形几何非线性理论[1]为基础，应用Lagrange乘子法，对大变形对称弹性力学问题进行了研究，给出了相应的位能广义变分原理、余能广义变分原理，以及动力学问题的广义变分原理；同时，文中还证明了位能广义变分原理和余能广义变分原理的等价性。

关键词　动力学　大变形　自变函数　广义变分原理

一、引　言

非线性弹性力学问题分为材料的物理非线性和变形的几何非线性。在几何非线性问题中，若考虑体矩，则称为大变形非对称弹性力学问题；本文不考虑体矩，故称为大变形对称弹性力学问题。

几何非线性理论是研究变形体空间运动与变形的准确的数学理论。在大变形理论中，形变梯度包括应变张量与转动张量两部分。在经典大变形理论中，通常采用Green应变张量和Новожилов平均整旋角来描述；在乘积分解定理中，是把变换分解成形变与转动乘积的形式。我国陈至达提出新的变换分解定理，是把运动变换分解为应变张量与转动张量的直和形式，给出了应变张量与转动张量的显式表达式，从而解决了变形几何非线性的理论问题。

根据钱伟长[2][3]提出的"广义变分原理的泛函，可以系统地采用Lagrange乘子法建立"的途径，我们可以把文[1]变形几何非线性的研究成果，用来建立大变形弹性力学问题的各种广义变分原理。在这方面，郭仲衡[4]、陈至达[5]、戴天民[6]等已相继提出了非线性理论的各种变分原理。本文就是在陈至达提出的变形几何非线性理论的基础上，应用钱伟长提出的Lagrange乘子法，建立了大变形弹性力学问题的位能广义变分原理、余能广义变分原理，以及弹性动力学问题的广义变分原理，同时还证明了，在大变形理论中，从最小位能原理出发导出的位能广义变分原理和广义余能原理二者是等价的，它们泛函之间只差一个符号，从而又一次说明钱伟长提出的等价性定理，在大变形对称弹性力学中也是适用的。

二、基　本　方　程

本文采用拖带坐标系。因此，研究弹性体的变形就是研究拖带系的变换。设一个变形体

* 钱伟长推荐。1989年8月4日第一次收到。

的初始位形为B_0(未变形前)，占有空间区域Ω_0，界面为S_0。经F变换后

$$F: B_0\to B, \ \Omega_0\to\Omega, \ S_0\to S$$

$$S=S_u\cup S_p, \ S_u\cap S_p=\phi$$

大变形弹性力学问题的基本方程（参见[1]）可表达为

物理方程：

$$\sigma^i_{\cdot j}=C^{i\cdot k}_{\cdot j\cdot l}S^l_k \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.1}$$

σ——应力张量，

S——应变张量，

C——弹性系数张量.

平衡方程：

$$\rho w_j-\sigma^i_{\cdot j}|_i-\rho f_j=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.2}$$

ρ——形变体密度（以形变后单位体积计），

w——加速度矢量，

f——体力矢量

$$\sigma^i_{\cdot j}=\sigma_j^{\cdot i}, \ m^i_j=0 \ (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.3}$$

m——体矩矢量.(2.3)方程指明应力是对称的，体矩为零.

几何方程：

应变分量

$$S^j_i=\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|^*_i)-L_k{}^jL_i{}^k(1-\cos\theta) \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.4}$$

平均整旋角

$$\theta=\mp\arc\sin(-\omega^i_j\omega^j_i)^{1/2}$$
$$=\mp\arc\sin\left\{\frac{1}{2}[(u^1|_2-u^1|^*_2)^2+(u^2|_3-u^2|^*_3)^2+(u^3|_1-u^3|^*_1)^2]^{1/2}\right\} \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.5}$$

$u^j|_i$ 是变形体中一点位移u^j的协变导数；$u^j|^*_i$为$u^j|_i$的转置张量.

转轴**L**方向余弦

$$L_i{}^j=\frac{1}{\sin\theta}\omega^j_i,$$

$$\omega^j_i\equiv\frac{1}{2}(u^j|_i-u^j|^*_i) \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.6}$$

边界条件：

$$\sigma^i_{\cdot j}n_j=\bar{p}_j \qquad (\text{已给定，在}S_p\text{上}) \tag{2.7}$$

$$u^j=\bar{u}^j \ (\text{已给定，在}S_u\text{上}) \tag{2.8}$$

当变形体发生大变形时，其微元体的体积及表面积将发生改变，由于拖带系本身尺规改变，诸张量本身往往不是标准物理量纲度量的量值。因此将涉及到变形后位形上的量，换算成物理分量的问题。故以上各式之量在工程计算中，必须采用物理分量.

各物理分量为

$$\hat{\sigma}^i_{\cdot j}=\sigma^i_{\cdot j}\sqrt{\frac{g^{(jj)}}{g^{(ii)}}} \tag{2.9}$$

$$\hat{u}^j|_i=\sqrt{\frac{\mathring{g}_{(jj)}}{g_{(ii)}}}u^j|_i \tag{2.10}$$

$$\hat{S}_i^j=\frac{1}{2}(\hat{u}^j|_i+\hat{u}^j|_i^*)-\hat{L}_k^j\hat{L}_i^k(1-\cos\theta) \tag{2.11}$$

$$\theta=\pm\arc\sin\left\{\frac{1}{2}[(\hat{u}^1|_2-\hat{u}^1|_2^*)^2+(\hat{u}^2|_3-\hat{u}^2|_3^*)^2+(\hat{u}^3|_1-\hat{u}^3|_1^*)^2]^{1/2}\right\} \tag{2.12}$$

$$\hat{L}_i^j=\frac{1}{2\sin\theta}(\hat{u}^j|_i-\hat{u}^j|_i^*) \tag{2.13}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho\sqrt{g}=\rho_0\sqrt{g_0}\\ g_0=|\mathring{g}_{ij}|,\quad g=|g_{ij}|\end{array}\right\} \tag{2.14}$$

式中

ρ_0为未变形前单位微元体积的质量；

$\mathring{g}^{(ij)}$，$\mathring{g}_{ij}$ 为未变形前曲线坐标系的度规张量；

$g^{(ij)}$，$g_{(ij)}$为变形后曲线坐标系的度规张量．

我们考虑形变为纯弹性，而且弹性模量C为常数；故弹性能量之值与形变路径无关．所以我们可以采用形变后的位形为讨论根据．

本文工作是将上述问题之求解化为用变分原理表达．

三、大变形对称弹性力学问题的变分原理

(一)、大变形对称弹性力学问题的位能广义变分原理

满足大变形对称弹性力学问题基本方程的 u，θ，s，σ 的解，必使下述泛函Π_p为驻值

$$\Pi_p=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}C_{s\,i}^{j\,h}S_h^sS_i^j-\rho f_ju^j\right)d\Omega-\int_\Omega\Big[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)+L_k^jL_i^k(1-\cos\theta)\Big]\sigma^i{}_jd\Omega-\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\sigma^i{}_jn_idS-\int_{S_p}\bar{p}_ju^jdS \tag{3.1}$$

证明 我们采用Lagrange乘子$\lambda^i{}_j$（定义在Ω域内）和μ_j（定义在位移边界S_u上），将运动几何方程和位移边界条件合并到大变形弹性体的位能泛函中，得到

$$\Pi_p'=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}C_{i\,i}^{j\,h}S_h^sS_i^j-\rho f_ju^j\right)d\Omega+\int_\Omega\Big[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)+L_k^jL_i^k(1-\cos\theta)\Big]\lambda^i{}_jd\Omega+\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\mu_jdS-\int_{S_p}\bar{p}_ju^jdS \tag{3.2}$$

式中的独立变量是S_i^j，u^j，θ，$\lambda^i{}_j$和μ_j．对（3.2）式求变分，得

$$\delta\Pi_o'=\int_\Omega(\sigma^i{}_j\delta S_i^j-\rho f_i\delta u^j)d\Omega+\int_\Omega\Big[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_j+u^j|_i^*)+L_k^jL_i^k(1-\cos\theta)\Big]\delta\lambda^i{}_jd\Omega+\int_\Omega\lambda^i{}_j\delta\Big[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)$$

$$+L_k{}^{j}L_i{}^{k}(1-\cos\theta)\Big]d\Omega+\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\delta\mu_j dS$$

$$+\int_{S_u}\mu_j\delta u^j dS-\int_{S_p}\bar{p}_j\delta u^j dS \tag{3.3}$$

利用Green公式

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega\lambda^i{}_j\delta(u^j|_i)d\Omega=-\frac{1}{2}\int_{S_p+S_u}\lambda^i{}_j\delta u^j n_i dS+\frac{1}{2}\int_\Omega\lambda^i{}_j|_i\delta u^j d\Omega \tag{3.4a}$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega\lambda^i{}_j\delta(u^j|^*_i)d\Omega=-\frac{1}{2}\int_{S_p+S_u}\lambda^{i*}_{\cdot j}\delta u^j n_i dS+\frac{1}{2}\int_\Omega\lambda^{i*}_{\cdot j}|\delta u^j d\Omega \tag{3.4b}$$

对于一般弹性力学，应力分量可分解为对称与反对称两部分：

$$\sigma^i{}_j=\underset{s}{\sigma^i{}_j}+\underset{a}{\sigma^i{}_j}$$

对称　反对称

$$\underset{s}{\sigma^i{}_j}=\frac{1}{2}(\sigma^i{}_j+\sigma^{i*}_{\cdot j})$$

$$\underset{a}{\sigma^i{}_j}=\frac{1}{2}(\sigma^i{}_j-\sigma^{i*}_{\cdot j})$$

对称成份使形变体产生应变，而反对称部份使微元体转动．因

$$\lambda^i{}_jL_k{}^{j}L_i{}^{k}=\lambda^j{}_iL_k{}^{i}L_j{}^{k}=\lambda^j{}_iL_k{}^{i}L_i{}^{k}$$

所以有

$$(\lambda^i{}_j-\lambda^{i*}_{\cdot j})L_k{}^{j}L_i{}^{k}\sin\theta\delta\theta=0$$

在对称弹性力学中，此项变分量为零，故应有

$$\underset{a}{\sigma^i{}_j}=0,\quad \underset{s}{\sigma^i{}_j}=\sigma^i{}_j,\quad \sigma^i{}_j=\sigma_j{}^i$$

将（3.4）式代入（3.3）式中，整理后可得

$$\delta\Pi'_p=\int_\Omega(\sigma^i{}_j+\lambda^i{}_j)\delta S_i^j d\Omega+\int_\Omega\Big[\Big(\frac{1}{2}\lambda^i{}_j|_i+\frac{1}{2}\lambda^{i*}_{\cdot j}|_i\Big)$$

$$-\rho f_j\Big]\delta u^j d\Omega+\int_\Omega\frac{1}{2}(\lambda^i{}_j-\lambda^{i*}_{\cdot j})L_k{}^{j}L_i{}^{k}\sin\theta\delta\theta d\Omega$$

$$+\int_\Omega\Big[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|^*_i)+L_k{}^{j}L_i{}^{k}(1-\cos\theta)\Big]\delta\lambda^i{}_j d\Omega$$

$$+\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\delta\mu_j dS-\int_{S_p}\Big[\frac{1}{2}(\lambda^i{}_j+\lambda^{i*}_{\cdot j})n_i+\bar{p}_j\Big]\delta u^j dS+$$

$$+\int_{S_u}\Big[\mu_j-\frac{1}{2}(\lambda^i{}_j+\lambda^{i*}_{\cdot j})n_i\Big]\delta u^j dS \tag{3.5}$$

由$\delta\Pi'_p=0$的驻值条件，可得

Lagrange乘子的物理意义：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda^i{}_j=-\sigma^i{}_j &&(\text{在}\Omega\text{内})\\&\mu_j=\frac{1}{2}(\lambda^i{}_j+\lambda^{i*}_{\cdot j})n_i=-\sigma^i{}_jn_i &&(\text{在}S_u\text{上})\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

应力对称条件：

$$\lambda^i{}_j=\lambda^{i*}_{\cdot j}\quad \text{即}\sigma^i{}_j=\sigma_j{}^i\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.7}$$

将Lagrange乘子$\lambda^i{}_j$和μ_j所代表的物理量代入式（3.5）中相应的各项，可得到

平衡方程：

$$\sigma^{i}_{\cdot j}|_{i}+\rho f_{j}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.8}$$

几何方程：

$$S^{j}_{i}=\frac{1}{2}(u^{j}|_{i}+u^{j}|^{*}_{i})-L_{k}{}^{j}L_{i}{}^{k}(1-\cos\theta) \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.9}$$

位移边界条件：

$$u^{j}-\bar{u}^{j}=0 \qquad (\text{在}S_{u}\text{上}) \tag{3.10}$$

力边界条件：

$$\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}-\bar{p}_{j}=0 \qquad (\text{在}S_{p}\text{上}) \tag{3.11}$$

在证明中用到了物理方程：

$$\sigma^{i}_{\cdot j}=C^{ik}_{ji}S^{i}_{k}$$

由上述可以看到，由(3.2)式的驻值条件，可得到求解大变形对称弹性理论问题的全部方程。

最后，将Lagrange乘子所代表的物理量代入(3.2)式中，可得到大变形对称弹性力学问题的位能广义变分原理的泛函(3.1)。

(二)、大变形对称弹性力学问题的余能广义变分原理

满足大变形对称弹性力学问题基本方程的u,θ,S,σ的解，必使下述泛函Π_{c}为驻值

$$\Pi_{c}=\int_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}{}^{-1}C^{ik}_{ji}\sigma^{i}_{k}\sigma^{j}_{k}+L_{k}{}^{j}L_{i}{}^{k}(1-\cos\varepsilon)\sigma^{i}_{\cdot j}\Big]d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}(\sigma^{i}_{\cdot j}|_{i}+\rho f_{j})u^{j}d\Omega-\int_{S_{p}}(\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}-\bar{p}_{j})u^{j}dS-\int_{S_{u}}\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}\bar{u}^{j}dS \tag{3.12}$$

现在我们进行证明．对(3.12)式求变分，可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{c}=&\int_{\Omega}[S^{j}_{i}+L_{k}{}^{j}L_{i}{}^{k}(1-\cos\theta)]\delta\sigma^{i}_{\cdot j}d\Omega\\&+\int_{\Omega}\sigma^{i}_{\cdot j}L_{k}{}^{j}L_{i}{}^{k}\sin\theta\delta\theta d\Omega+\int_{\Omega}(\sigma^{i}_{\cdot j}|_{i}+\rho f_{j})\delta u^{j}d\Omega\\&+\int_{\Omega}u^{j}\delta(\sigma^{i}_{\cdot j}|_{i})d\Omega-\int_{S_{p}}(\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}-\bar{p}_{j})\delta u^{j}dS\\&-\int_{S_{p}}u^{j}\delta\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}dS-\int_{S_{u}}\bar{u}^{j}\delta\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}dS\end{aligned} \tag{3.13}$$

利用Green公式

$$\int_{\Omega}u^{j}\delta(\sigma^{i}_{\cdot j}|_{i})\,d\Omega=\int_{S_{p}+S_{u}}u^{j}\delta\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}dS-\int_{\Omega}u^{j}|_{i}\delta\sigma^{i}_{\cdot j}d\Omega \tag{3.14}$$

将(3.14)式代入(3.13)式，整理后可得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{c}=&\int_{\Omega}(\sigma^{i}_{\cdot j}-C^{ik}_{ji}S^{i}_{k})\delta S^{j}_{k}d\Omega+\int_{\Omega}\Big[S^{j}_{i}-\frac{1}{2}(u^{j}|_{i}+u^{j}|^{*}_{i})+\\&+L_{k}{}^{j}L_{i}{}^{k}(1-\cos\theta)\Big]\delta\sigma^{i}_{\cdot j}d\Omega+\int_{\Omega}\frac{1}{2}(\sigma^{i}_{\cdot j}-\sigma_{j}{}^{i})L^{i}_{\cdot k}L^{k}_{\cdot i}\cdot\\&\cdot\sin\theta\delta\theta d\Omega+\int_{\Omega}(\sigma^{i}_{\cdot j}|_{i}+\rho f_{j})\delta u^{j}d\Omega-\int_{S_{p}}(\sigma^{i}_{\cdot j}n_{i}-\bar{p}_{j})\delta u^{j}dS\end{aligned}$$

$$+\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\delta\sigma^i{}_j n_i dS \tag{3.15}$$

由$\delta\Pi_c=0$的驻值条件，可得

$$S_i^j=\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)-L_k{}^j L_i{}^k(1-\cos\theta) \qquad (在\Omega内) \tag{3.16}$$

$$\sigma^i{}_j=\sigma_j{}^i \qquad (在\Omega内) \tag{3.17}$$

$$\sigma^i{}_j|_i+\rho f_j=0 \qquad (在\Omega内) \tag{3.18}$$

$$\sigma^i{}_j n_i-\bar{p}_j=0 \qquad (在S_p上) \tag{3.19}$$

$$u^j-\bar{u}^j=0 \qquad (在S_u上) \tag{3.20}$$

由上述证明可知，从(3.12)式取驻值条件，可得：(1)静力平衡条件，(2)几何方程，(3)应力对称条件，(4)力边界条件，(5)位移边界条件.

(三)、两个广义变分原理的等价性

将前面得到的两个广义变分原理的泛函相加，得

$$\Pi_p+\Pi_c=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)\sigma^i{}_j+\sigma^i{}_j|_i u^j\right]d\Omega$$

$$-\int_{S_u}u^j\sigma^i{}_j n_i dS-\int_{S_p}\sigma^i{}_j n_i u^j dS \tag{3.21}$$

由于

$$\int_\Omega\left[\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)\sigma^i{}_j+\sigma^i{}_j|_i u^j\right]d\Omega$$

$$=\int_\Omega[u^j|_i\sigma^i{}_j+\sigma^i{}_j|_i u^j]d\Omega$$

$$=\int_\Omega(u^j\sigma^i{}_j)|_i d\Omega=\int_{S_p+S_u}u^j\sigma^i{}_j n_i dS \tag{3.22}$$

将(3.22)式代入(3.21)式中，可得

$$\Pi_p+\Pi_c=0 \tag{3.23}$$

从而说明了钱伟长等价定理在大变形对称弹性力学问题中也是正确的，即位能广义变分原理和余能广义变分原理，它们的泛函是等价的，两个泛函之间相差一个符号.

(四)、大变形对称弹性动力学问题的广义变分原理

满足大变形对称弹性动力学问题基本方程的**u**,θ,**S**,**σ**的解，必使下述泛函Π_k为驻值

$$\Pi_k=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\Omega\frac{1}{2}\rho\dot{u}_j\dot{u}^j d\Omega-\int_\Omega\left(\frac{1}{2}C_{jl}^{ik}S_k^l S_i^j-\rho f_j u^j\right)d\Omega\right.$$

$$+\int_\Omega\left[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)+L_k{}^j L_i{}^k(1-\cos\theta)\right]\sigma^i{}_j d\Omega$$

$$\left.+\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\sigma^i{}_j n_i dS+\int_{S_p}\bar{p}_j u^j dS\right\}dt \tag{3.24}$$

根据Hamilton原理，可构造下述泛函

$$\Pi_k'=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\Omega\frac{1}{2}\rho\dot{u}_j\dot{u}^j d\Omega-\int_\Omega\left(\frac{1}{2}C_{jl}^{ik}S_k^l S_h^j-\rho f_j u^j\right)d\Omega\right.$$

$$-\int_\Omega\left[S_i^j-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|_i^*)+L_k{}^j L_i{}^k(1-\cos\theta)\right]\alpha^k{}_j d\Omega$$

$$-\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\beta_j dS+\int_{S_p}\bar{p}_j u^j dS\Big\}dt \tag{3.25}$$

式中的独立变量是$S^j_i, u^j, \theta, \alpha^i_{\cdot j}$和$\beta_j$，对(3.25)式求变分，得

$$\delta\Pi'_k=\int_\Omega \rho\dot{u}_j\delta u^j d\Omega\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_\Omega\Big[\rho\ddot{u}_j+\frac{1}{2}(\alpha^i_{\cdot j}|_i+\alpha^{i*}_{\cdot j}|_i)-\rho f_j\Big]$$

$$\cdot\delta u^j d\Omega\Big\}dt-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_\Omega\frac{1}{2}(\alpha^i_{\cdot j}-\alpha^{i*}_{\cdot j})L^{\cdot j}_{k\cdot}L^{\cdot k}_{i\cdot}\sin\theta\delta\theta d\Omega\Big\}dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_\Omega\Big[S^j_i-\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|^*_i)+L^{\cdot j}_{k\cdot}L^{\cdot k}_{i\cdot}(1-\cos\theta)\Big]\delta\alpha^i_{\cdot j}d\Omega\Big\}dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_\Omega(\sigma^i_{\cdot j}+\alpha^i_{\cdot j})\delta S^j_i d\Omega\Big\}dt-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{S_u}(u^j-\bar{u}^j)\delta\beta_j dS\Big\}dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{S_p}\Big[\frac{1}{2}(\alpha^i_{\cdot j}+\alpha^{i*}_{\cdot j})n_i+\bar{p}_j\Big]\delta u^j dS\Big\}dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{S_u}\Big[\beta_j-\frac{1}{2}(\alpha^i_{\cdot j}+\alpha^{i*}_{\cdot j}n_i)\Big]\delta u^j dS\Big\}dt \tag{3.26}$$

由$\delta\Pi'_k=0$的驻值条件，可得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^i_{\cdot j}=-\sigma^i_{\cdot j}\\&\alpha^i_{\cdot j}=\alpha^{i*}_{\cdot j}\text{即}\sigma^i_{\cdot j}=\sigma^{i*}_{\cdot j}\end{aligned}\right\}\quad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.27}$$

$$\beta_j=\frac{1}{2}(\alpha^i_{\cdot j}+\alpha^{i}_{\cdot j})n_i=-\sigma^i_{\cdot j}n_i\qquad(\text{在}S_u\text{上}) \tag{3.28}$$

将Lagrange乘子$\alpha^i_{\cdot j}$和β_j所代表的物理量代入(3.26)式中相应的各项还可得到：

$$\rho\ddot{u}_j-\sigma^i_{\cdot j}|_i-\rho f_j=0\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.29}$$

$$S^j_i=\frac{1}{2}(u^j|_i+u^j|^*_i)-L^{\cdot j}_{k\cdot}L^{\cdot k}_{i\cdot}(1-\cos\theta)\qquad(\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.30}$$

$$u^j-\bar{u}^j=0\qquad(\text{在}S_u\text{上}) \tag{3.31}$$

$$\sigma^i_{\cdot j}n_i-\bar{p}_j=0\qquad(\text{在}S_p\text{上}) \tag{3.32}$$

上述证明了，由(3.25)式取驻值的条件，可得：(1)动力平衡方程，(2)几何方程，(3)位移边界条件，(4)力边界条件，(5)应力对称条件．证明中用了物性方程．

最后将Lagrange乘子所代表的物理量代入(3.25)式中，可得到动力学问题广义变分原理的泛函(3.24)．

以上我们应用陈至达的应变-转动(S-R)分解定理，给出了大变形对称弹性力学问题的三个变分原理：位能广义变分原理，余能广义变分原理，动力学问题的广义变分原理，同时还得出钱氏等价定理也适用于大变形对称弹性力学问题．

参 考 文 献

[1] 陈至达，《有理力学》，中国矿业研究生部(1980)．

[2] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，1(1979)．

[3] 钱伟长，《变分法及是限元》，科学出版社(1980)．

[4] 郭仲衡，非线性弹性理论变分原理的统一理论，应用数学和力学，1(1)(1980)，5—24．

[5] 陈至达，钱氏定理在有限变形极矩弹性力学广义变分原理的应用，应用数学和力学，2(2)(1981)，181—196．

[6] 戴天民，论非线性弹理理论的各种变分原理，应用数学和力学，5(5)(1982)，585—596．

Generalized Variational Principles of Symmetrical Elasticity Problem of Large Deformation

Zhao Yu-xiang Gu Xiang-zhen Li Huan-qiu

(Luoyang Institute of Hydraulic Engineering, Luoyang)

Abstract

This paper is based on the geometrical nonlinear theories of deformation presented by Chen Zhi-da [1], Lagrange's multiplier method is used to study the symmetry elasticty problems of large deformation. The general variational principles of potential energy and complementary energy, and the general variation principle of dynamic problem have been proved. In the meantime it is also proved that the general variation principles of potential energy and complementary energy are equivalent.

Key words dynamics, large deformation, independent function, generalized variational principle