应用数学和力学，第15卷第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

计及表面波的圆环形贮液容器的弯曲自由振动*

周 叮

（南京理工大学）

摘 要

本文研究考虑表面波作用的圆环形贮液容器的弯曲自由振动问题，导出了贮液容器与液体耦联振动的振型函数和固有频率的精确计算公式，结果可借助于计算机求解。分析表明，水对容器的振动效应可等效于在内外环体上分别附着一不同的广义分布质量。

关键词 流固耦合 振动分析 贮液容器 液体晃动

一、引 言

关于贮液容器的固液耦合振动问题的研究已取得不少成果[1],[2],[3]，但以往的这些研究多以无水振型函数近似有水振型函数，文[5]、[6]曾给出了悬臂圆柱杆和圆柱壳在水中弯曲自由振动的振型函数及固有频率的精确计算公式，文[7]则进一步给出了内外液深均可任意的贮液圆筒在水中弯曲自由振动的精确解，到目前为止，所有的这些研究均是不计及表面波的，这是因为若考虑表面波的作用，固液耦联系统振动方程的分析和求解要更为困难和复杂得多。但在实际工程中，如当地震波谱中长周期成份占优或当贮液容器的直径较小时，不能忽略表面波的作用。

二、圆环形容器内液体的运动

内贮有液体的圆环形容器如图1所示，设容器内筒的内半径r'_0，外半径r_0；外筒的内半径R_0，外半径R'_0，筒高H，筒内液深h，考虑内外筒体均沿y方向作梁式振动，我们建立图示的柱坐标系来描述液体的运动。

设液体理想不可压无旋，因而存在速度势$\phi(r,\ \theta,\ z,\ t)$，满足

$$\nabla^2\phi=0 \tag{2.1}$$

其中 ∇^2是拉普拉斯算子。

若考虑表面波的作用，ϕ应满足以下边界条件

* 钱伟长推荐。1989年5月12日收到初稿，1994年5月26日收到修改稿。
南京理工大学科研发展基金支持。

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\quad z=h \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=r_0}=\frac{\partial y_1}{\partial t}\cos\theta \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=R_0}=\frac{\partial y_2}{\partial t}\cos\theta \tag{2.5}$$

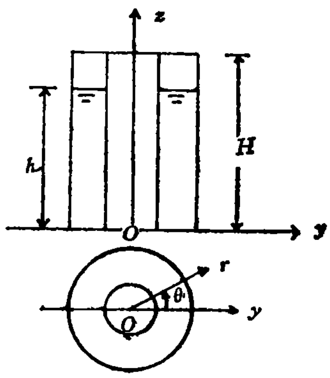

图1 圆环形贮液容器

其中，$y_1=y_1(z,t)$，$y_2=y_2(z,t)$ 分别是内外筒体沿y方向的位移。

我们将（2.1）的全解分为两部分

$$\phi=\phi_1+\phi_2 \tag{2.6}$$

其中 ϕ_1为满足齐次边界条件的通解，ϕ_2为满足非齐次边界条件的特解。

设$\phi_1=R_1(r)\Theta_1(\theta)Z_1(z)\dot{T}(t)$，$\phi_2=R_2(r)\Theta_2(\theta)Z_2(z)\dot{T}(t)$，$y_1=Y_1(z)T(t)$，$y_2=Y_2(z)T(t)$，用分离变量法[8]解（2.1），得

$$\phi_1=(A_1\mathrm{ch}\lambda z+A_2\mathrm{sh}\lambda z)(B_1\cos n\theta+B_2\sin n\theta)(C_1J_n(\lambda r)+C_2N_n(\lambda r))\dot{T}(t) \tag{2.7}$$

$$\phi_2=(A_1'\cos mz+A_2'\sin mz)(B_1'\cos n\theta+B_2'\sin n\theta)(C_1'I_n(mr)+C_2'K_n(mr))\dot{T}(t) \tag{2.8}$$

其中 A_i，B_i，C_i，A_i'，B_i'，C_i' $(i=1,2)$ 及λ，m为待定常数，$J_n(\lambda r)$，$N_n(\lambda r)$ 分别为n阶第一类和第二类贝塞尔函数，$I_n(mr)$，$K_n(mr)$ 分别为n阶修正第一类和第二类贝塞尔函数。

由边界条件(2.2)～(2.5)可得到

$$\phi_1=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}A_sQ_1(\lambda_sr)\mathrm{ch}\lambda_sz\cos\theta \tag{2.9}$$

其中

$$Q_1(\lambda_sr)=J_1(\lambda_sr)+\gamma_sN_1(\lambda_sr) \tag{2.10}$$

$$\gamma_s=-\frac{\dot{J}_1(\lambda_sr_0)}{\dot{N}_1(\lambda_sr_0)}=-\frac{\dot{J}_1(\lambda_sR_0)}{\dot{N}_1(\lambda_sR_0)} \tag{2.11}$$

λ_s满足

$$\dot{J}_1(\lambda_sr_0)\dot{N}_1(\lambda_sR_0)-\dot{J}_1(\lambda_sR_0)\dot{N}_1(\lambda_sr_0)=0 \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_2=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}(A_s'I_1(m_sr)+B_s'K_1(m_sr))\cos m_sz\cos\theta\\
&Y_1(z)\cos\theta=\sum_{s=1}^{\infty}m_s(A_s'\dot{I}_1(m_sr_0)+B_s'\dot{K}_1(m_sr_0))\cos m_sz\cos\theta\\
&Y_2(z)\cos\theta=\sum_{s=1}^{\infty}m_s(A_s'\dot{I}(m_sR_0)+B_s'\dot{K}_1(m_sR_0))\cos m_sz\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

其中 $m_s=\dfrac{(2s-1)\pi}{2h}$.

利用三角函数系的正交关系可得

$$\int_0^h Y_1(z)\cos m_s dz=\frac{h}{2}m_s(A'_s\dot{I}_1(m_s r_0)+B'_s\dot{K}_1(m_s r_0)) \tag{2.14}$$

$$\int_0^h Y_2(z)\cos m_s zdz=\frac{h}{2}m_s(A'_s\dot{I}_1(m_s R_0)+B'_s\dot{K}_1(m_s R_0)) \tag{2.15}$$

由以上两式可解得

$$A'_s=f_s(\dot{K}_1(m_s R_0)G_{1s}-\dot{K}_1(m_s r_0)G_{2s}) \tag{2.16}$$

$$B'_s=f_s(\dot{I}_1(m_s r_0)G_{2s}-\dot{I}_1(m_s R_0)G_{1s}) \tag{2.17}$$

其中

$$f_s=\frac{2}{hm_s(\dot{I}_1(m_s r_0)\dot{K}_1(m_s R_0)-\dot{K}_1(m_s r_0)\dot{I}_1(m_s R_0))} \tag{2.18}$$

$$G_{1s}=\int_0^h Y_1(z)\cos m_s zdz \tag{2.19}$$

$$G_{2s}=\int_0^h Y_2(z)\cos m_s zdz \tag{2.20}$$

因而可得

$$\begin{aligned}\phi_2=\dot{T}(t)\sum_{s=1}^{\infty}f_s\{&(\dot{K}_1(m_s R_0)G_{1s}-\dot{K}_1(m_s r_0)G_{2s})I_1(m_s r)\\&+(\dot{I}_1(m_s r_0)G_{2s}-\dot{I}_1(m_s R_0)G_{1s})K_1(m_s r)\}\cos m_s z\cos\theta\end{aligned} \tag{2.2\ }$$

将（2.6）代入（2.3）得到

$$\begin{aligned}&-\omega^2\sum_{s=1}^{\infty}A_sQ_1(\lambda_s r)\mathrm{ch}\lambda_s h+g\sum_{s=1}A_sQ_1(\lambda_s r)\lambda_s\mathrm{sh}\lambda_s h\\&\quad-\omega^2\sum_{s=1}^{\infty}f_s\{(\dot{K}_1(m_s R_0)G_{1s}-\dot{K}_1(m_s r_0)G_{2s})I_1(m_s r)\\&\quad+(\dot{I}_1(m_s r_0)G_{2s}-\dot{I}_1(m_s R_0)G_{1s})K_1(m_s r)\}\cos m_s h\\&\quad-g\sum_{s=1}^{\infty}f_s\{(\dot{K}_1(m_s R_0)G_{1s}-\dot{K}_1(m_s r_0)G_{2s})I_1(m_s r)\\&\quad+(\dot{I}_1(m_s r_0)G_{2s}-\dot{I}(m_s R_0)G_{1s})K_1(m_s r)\}m_s\sin m_s h=0\end{aligned} \tag{2.22}$$

利用贝塞尔函数的正交关系可得

$$A_s=L_s\sum_{j=1}^{\infty}(M_{1sj}G_{1j}+M_{2sj}G_{2j}) \tag{2.23}$$

其中

$$L_s=\frac{2\lambda_s^2}{[(\lambda_s^2R_0^2-1)Q_1^2(\lambda_s R_0)-(\lambda_s^2r_0^2-1)Q_1^2(\lambda_s r_0)](g\lambda_s\mathrm{sh}\lambda_s h-\omega^2\mathrm{ch}\lambda_s h)} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}M_{1sj}=gm_j(-1)^{j-1}f_j\Big\{&\dot{K}_1(m_j R_0)\int_{r_0}^{R_0}I_1(m_j r)Q_1(\lambda_s r)rdr\\&-\dot{I}_1(m_j R_0)\int_{r_0}^{R_0}K_1(m_j r)Q_1(\lambda_s r)rdr\Big\}\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$M_{2sj}=gm_j(-1)^{j-1}f_j\left\{\dot{I}_1(m_jr_0)\int_{r_0}^{R_0}K_1(m_jr)Q_1(\lambda_sr)rdr\right.$$

$$\left.-\dot{K}_1(m_jr_0)\int_{r_0}^{R_0}I_1(m_jr)Q_1(\lambda_sr)rdr\right\} \tag{2.26}$$

最后可得到

$$\phi=\dot{T}(t)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}L_s\sum_{j=1}^{\infty}(M_{1sj}G_{1j}+M_{2sj}G_{2j})Q_1(\lambda_sr)\mathrm{ch}\lambda_sz\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}f_s[(\dot{K}_1(m_sR_0)G_{1s}-\dot{K}_1(m_sr_0)G_{2s})I_1(m_sr)$$

$$\left.+(\dot{I}_1(m_sr_0)G_{2s}-\dot{I}_1(m_sR_0)G_{1s})K_1(m_sr)]\cos m_sz\cos\theta\right\} \tag{2.27}$$

三、内外筒体的振动方程

由（2.27）可得沿内外筒体单位高度上液体动压力在y方向的合力.

在内筒体上，有

$$p_1|_{r=r_0}=-\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{r=r_0}r_0\cos\theta d\theta$$

$$=\ddot{T}(t)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(V_{1sj}G_{1j}+V_{2sj}G_{2j})\mathrm{ch}\lambda_sz\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}(R_{1s}G_{1s}+R_{2s}G_{2s})\cos m_sz\right\} \tag{3.1}$$

其中

$$V_{1sj}=-\rho r_0\pi L_sM_{1sj}Q_1(\lambda_sr_0) \tag{3.2}$$

$$V_{2sj}=-\rho r_0\pi L_sM_{2sj}Q_1(\lambda_sr_0) \tag{3.3}$$

$$R_{1s}=\rho r_0\pi f_s(\dot{I}_1(m_sR_0)K_1(m_sr_0)-\dot{K}_1(m_sR_0)I_1(m_sr_0)) \tag{3.4}$$

$$R_{2s}=\rho r_0\pi f_s(\dot{K}_1(m_sr_0)I_1(m_sr_0)-\dot{I}_1(m_sr_0)K_1(m_sr_0)) \tag{3.5}$$

在外筒体上，有

$$p_2|_{r=R_0}=-\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{r=R_0}R_0\cos\theta d\theta$$

$$=-\ddot{T}(t)\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(V'_{1sj}G_{1j}+V'_{2sj}G_{2j})\mathrm{ch}\lambda_sz\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}(R'_{1s}G_{1s}+R'_{2s}G_{2s})\cos m_sz\right\} \tag{3.6}$$

其中

$$V'_{1sj}=\rho R_0\pi L_sM_{1sj}Q_1(\lambda_sR_0) \tag{3.7}$$

$$V'_{2sj}=\rho R_0\pi L_s M_{2sj} Q_1(\lambda_s R_0) \tag{3.8}$$

$$R'_{1s}=\rho R_0\pi f_s(\dot{K}_1(m_s R_0)I_1(m_s R_0)-\dot{I}_1(m_s R_0)K_1(m_s R_0)) \tag{3.9}$$

$$R'_{2s}=\rho R_0\pi f_s(\dot{I}(m_s r_0)K_1(m_s R_0)-\dot{K}_1(m_s r_0)I_1(m_s R_0)) \tag{3.10}$$

由此可得0～h段内外筒体的振动方程。内筒体的振动方程为

$$E_1J_1\frac{\partial^4 y_1}{\partial z^4}=-\rho_1F_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-p_1|_{r=r_0} \tag{3.11}$$

其中 E_1，$J_1=\frac{\pi}{4}(r_0^4-r_0'^4)$，$F_1=\pi(r_0^2-r_0'^2)$，$\rho_1$分别是内筒的弹性模量，截面惯性矩，截面积和密度。

外筒体的振动方程为

$$E_2J_2\frac{\partial^4 y_2}{\partial z^4}=-\rho_2F_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+p_2|_{r=R_0} \tag{3.12}$$

其中，E_2，$J_2=\frac{\pi}{4}(R_0'^4-R_0^4)$，$F_2=\pi(R_0'^2-R_0^2)$，$\rho_2$分别是外筒的弹性模量，截面惯性矩，截面积和密度。

将(3.1)、(3.6)分别代入(3.11)、(3.12)可得到

$$E_1J_1\frac{d^4Y_1(z)}{dz^4}-\omega^2(\rho_1F_1+m_1(z))Y_1(z)=0 \tag{3.13}$$

$$E_2J_2\frac{d^4Y_2(z)}{dz^4}-\omega^2(\rho_2F_2+m_2(z))Y_2(z)=0 \tag{3.14}$$

其中

$$m_1(z)=\frac{1}{Y_1(z)}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(V_{1sj}G_{1j}+V_{2sj}G_{2j})\mathrm{ch}\lambda_s z\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}(R_{1s}G_{1s}+R_{2s}G_{2s})\cos m_s z\right\} \tag{3.15}$$

$$m_2(z)=\frac{1}{Y_2(z)}\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(V'_{1sj}G_{1j}+V'_{2sj}G_{2j})\mathrm{ch}\lambda_s z\right.$$
$$\left.+\sum_{s=1}^{\infty}(R'_{1s}G_{1s}+R'_{2s}G_{2s})\cos m_s z\right\} \tag{3.16}$$

从以上两式可看出，筒内液体对内外筒体振动的影响相当于在内外筒体上分别附着广义分布质量$m_1(z)$和$m_2(z)$，而(3.15)、(3.16)右边的第一部分则反映了液体表面波动对内外筒体振动的影响。

h～H段内外筒体的振动方程分别为

$$E_1J_1\frac{\partial^4 y_1'}{\partial z^4}=-\rho_1F_1\frac{\partial^2 y_1'}{\partial t^2} \tag{3.17}$$

$$E_2J_2\frac{\partial^4 y_2'}{\partial z^4}=-\rho_2F_2\frac{\partial^2 y_2'}{\partial t^2} \tag{3.18}$$

即

$$E_1J_1\frac{d^4Y_1'(z)}{dz^4}-\omega^2\rho_1F_1Y_1'(z)=0 \tag{3.19}$$

$$E_2J_2\frac{d^4Y_2'(z)}{dz^4}-\omega^2\rho_2F_2Y_2'(z)=0 \tag{3.20}$$

四、圆环形容器的振型函数及固有频率

(3.13)的齐次通解为

$$Y_{1,1}(z)=D_1\cos k_1z+D_2\sin k_1z+D_3\mathrm{ch}k_1z+D_4\mathrm{sh}k_1z \tag{4.1}$$

其中 $D_i(i=1, 2, 3, 4)$ 为待定常数，$k_1^4=\dfrac{\rho_1F_1}{E_1J_1}\omega^2$。

(3.13)的非齐次特解为

$$Y_{1,2}(z)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(V_{1sj}G_{1j}+V_{2sj}G_{2j})k_1^4}{\rho_1F_1(\lambda_s^4-k_1^4)}\mathrm{ch}\lambda_sz\right.$$
$$\left.+\frac{(R_{1s}G_{1s}+R_{2s}G_{2s})k_1^4}{\rho_1F_1(m_s^4-k_1^4)}\cos m_sz\right\} \tag{4.2}$$

(3.14)的齐次通解为

$$Y_{2,1}(z)=C_1\cos k_2z+C_2\sin k_2z+C_3\mathrm{ch}k_2z+C_4\mathrm{ch}k_2z \tag{4.3}$$

其中 $C_i(i=1, 2, 3, 4)$为待定常数，$k_2^4=\dfrac{\rho_2F_2}{E_2J_2}\omega^2$。

(3.14)的非齐次特解为

$$Y_{2,2}(z)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(V_{1sj}'G_{1j}+V_{2sj}'G_{2j})k_2^4}{\rho_2F_2(\lambda_s^4-k_2^4)}\mathrm{ch}\lambda_sz\right.$$
$$\left.+\frac{(R_{1s}'G_{1s}+R_{2s}'(G_{2s})k_2^4}{\rho_2F_2(m_s^4-k_2^4)}\cos m_sz\right\} \tag{4.4}$$

(3.19)的通解为

$$Y_1'(z)=D_1'\cos k_1z+D_2'\sin k_1z+D_3'\mathrm{ch}k_1z+D_4'\mathrm{sh}k_1z \tag{4.5}$$

其中 $D_i'(i=1, 2, 3, 4)$为待定常数。

(3.20)的通解为

$$Y_2'(z)=C_1'\cos k_2z+C_2'\sin k_2z+C_3'\mathrm{ch}k_2z+C_4'\mathrm{sh}k_2z \tag{4.6}$$

其中 $C_i'(i=1, 2, 3, 4)$为待定常数。

综合可得内外筒体振动方程的解

$$Y_{内}(z)=\begin{cases}Y_{1,1}(z)+Y_{1,2}(z) & (0\leqslant z\leqslant h)\\ Y_1'(z) & (h\leqslant z\leqslant H)\end{cases} \tag{4.7}$$

$$Y_{外}(z)=\begin{cases}Y_{2,1}(z)+Y_{2,2}(z) & (0\leqslant z\leqslant h)\\ Y_2'(z) & (h\leqslant z\leqslant H)\end{cases} \tag{4.8}$$

将(4.7)代入(2.19)得到

$$G_{1s}=D_1I_{1s}+D_2I_{2s}+D_3I_{3s}+D_4I_{4s}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(V_{1nj}G_{1j}+V_{2nj}G_{2j})k_1^4}{\rho_1F_1(\lambda_n^4-k_1^4)}P_{ns}$$

$$+\frac{hk_2^4(R_{1s}G_{1s}+R_{2s}G_{2s})}{2\rho_1F_1(m_s^4-k_1^4)} \qquad (s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{4.9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
I_{1s}&=\int_0^h \cos m_s z\cos k_1 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\cos k_1 h}{m_s^2-k_1^2}\\
I_{2s}&=\int_0^h \cos m_s z\sin k_1 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\sin k_1 h-k_1}{m_s^2-k_1^2}\\
I_{3s}&=\int_0^h \cos m_s z\,\mathrm{ch}k_1 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\mathrm{ch}k_1 h}{m_s^2+k_1^2}\\
I_{4s}&=\int_0^h \cos m_s z\,\mathrm{sh}k_1 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\mathrm{sh}k_1 h-k_1}{m_s^2+k_1^2}\\
P_{ns}&=\int_0^h \mathrm{ch}\lambda_n z\cos m_s z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\mathrm{ch}\lambda_n h}{\lambda_n^2+m_s^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

将(4.8)代入(2.20)得到

$$G_{2s}=C_1I'_{1s}+C_2I'_{2s}+C_3I'_{3s}+C_4I'_{4s}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(V'_{1nj}G_{1j}+V'_{2nj}G_{2j})k_2^4}{\rho_2F_2(\lambda_n^4-k_2^4)}P_{ns}$$

$$+\frac{hk_2^4(R'_{1s}G_{1s}+R'_{2s}G_{2s})}{2\rho_2F_2(m_s^4-k_2^4)} \qquad (s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{4.11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
I'_{1s}&=\int_0^h \cos m_s z\cos k_2 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\cos k_2 h}{m_s^2-k_2^2}\\
I'_{2s}&=\int_0^h \cos m_s z\sin k_2 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\sin k_2 h-k_2}{m_s^2-k_2^2}\\
I'_{3s}&=\int_0^h \cos m_s z\,\mathrm{ch}k_2 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\mathrm{ch}k_2 h}{m_s^2+k_2^2}\\
I'_{4s}&=\int_0^h \cos m_s z\,\mathrm{sh}k_2 z dz=\frac{(-1)^{s-1}m_s\mathrm{sh}k_2 h-k_2}{m_s^2+k_2^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

截断(4.9)和(4.11)，取s, j, $n=1$, 2, 3, …, N, 可解出 $G_{1s}=G_{1s}(D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4)$, $G_{2s}=G_{2s}(D_1,\ D_2,\ D_3,\ D_4,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4)$ $(s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N)$，它们均是$D_i$, $C_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$的线性函数．将G_{1s}, $G_{2s}(s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N)$代回(4.7)、(4.8)可知，$Y_{内}(z)$是$D_i$, D'_i, $C_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, $Y_{外}(z)$是D_i, C_i, C'_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$的线性函数．

$Y_1(z)$与$Y'_1(z)$，$Y_2(z)$与$Y'_2(z)$的连接条件分别为

$$\left.\begin{aligned}
&Y_1|_{z=h}=Y'_1|_{z=h},\quad \left.\frac{dY_1}{dz}\right|_{z=h}=\left.\frac{dY'_1}{dz}\right|_{z=h}\\
&\left.\frac{d^2Y_1}{dz^2}\right|_{z=h}=\left.\frac{d^2Y'_1}{dz^2}\right|_{z=h},\quad \left.\frac{d^3Y_1}{dz^3}\right|_{z=h}=\left.\frac{d^3Y'_1}{dz^3}\right|_{z=h}
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&Y_2|_{z=h}=Y'_2|_{z=h},\quad \left.\frac{dY_2}{dz}\right|_{z=h}=\left.\frac{dY'_2}{dz}\right|_{z=h}\\
&\left.\frac{d^2Y_2}{dz^2}\right|_{z=h}=\left.\frac{d^2Y'_2}{dz^2}\right|_{z=h},\quad \left.\frac{d^3Y_2}{dz^3}\right|_{z=h}=\left.\frac{d^3Y'_2}{dz^3}\right|_{z=h}
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

内外筒的两端各可分别提四个支撑条件，如一端（$z=0$）固支，另一端（$z=H$）刚性封盖，有

$$\left.\begin{aligned} &Y_1|_{z=0}=0, \qquad \left.\frac{dY_1}{dz}\right|_{z=0}=0 \\ &Y_2|_{z=0}=0, \qquad \left.\frac{dY_2}{dz}\right|_{z=0}=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

$$\left.\begin{aligned} &Y'_1|_{z=H}=Y'_2|_{z=H}, \qquad \left.\frac{dY'_1}{dz}\right|_{z=H}=\left.\frac{dY'_2}{dz}\right|_{z=H} \\ &\left.\frac{d^2Y'_1}{dz^2}\right|_{z=H}=\left.\frac{d^2Y'_2}{dz^2}\right|_{z=H}, \qquad \left.\frac{d^3Y'_1}{dz^3}\right|_{z=H}=\left.\frac{d^3Y'_3}{dz^3}\right|_{z=H} \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

其它情况下两端的支撑条件就不一一列举了。

由支撑条件(4.15)、(4.16)和连接条件(4.13)、(4.14)共可得到16个关于D_i，D'_i，C_i，C'_i（$i=1$，2，3，4）的齐次线性代数方程组，令其系数行列式的值为零，可解出各阶固有频率及与其相应的D_i，D'_i，C_i，C'_i（$i=1$，2，3，4）诸常数的比值，将结果代回(4.7)、(4.8)，即得到内外筒的各阶振型函数。限于篇幅，由(4.9)～(4.16)诸方程求解各阶固有频率和D_i，D'_i，C_i，C'_i（$i=1$，2，3，4）诸常数比值的具体计算方法就不再介绍了。

五、结　束　语

由以上分析可知

1．液体对内外筒体振动的影响可等效于在内外筒体上分别附着一不同的广义分布质量，因而贮液时圆环形容器的自振频率比无液时的自振频率要低。

2．本文研究考虑了表面波的作用，容器的振型函数及固有频率的计算是精确的，求解的数学公式较为复杂，但可借助于计算机数值计算。

3．本文的研究结果可很容易地退化到不考虑表面波的情况，还可很容易地退化到水中圆柱杆和贮液圆筒的振动情况。

参　考　文　献

[1] 居荣初、曾心传，《弹性结构与液体的耦联振动理论》，地震出版社(1983).

[2] Eischer, D., Dynamic fluid effects in liquid-filled flexible cylindrical tank, *Earthq. Engng. and Struct. Dynamics*, 7(6)(1979), 587—601.

[3] Epstein, H. I., Seismic design of liquid-storoge tanks, *Journal of the Structural Division, Proc. of the ASCE*, Vol. 102, №S. T.9(1976), 1659—1674.

[4] 郑哲民、马宗魁，悬臂梁一侧有液体作用时的自主振动，力学学报，3(2)(1959)，111—119.

[5] 张悉德，部分埋入水中悬臂圆柱体的弯曲自由振动，应用数学和力学，3(4)(1982)，537—546.

[6] 朱永谊、翁智远、吴家龙，部分潜入水中圆柱壳的振动分析，同济大学学报，4(1987)，431—441.

[7] 周叮，贮液圆筒在水中的弯曲自由振动，应用数学和力学，11(5)(1990)，469—477.

[8] 梁昆淼，《数学物理方法》，人民教育出版社(1979).

Free Bending Vibration of Annular Cylindrical Tank Partially Filled With Liquid in the Consideration of Surface Wave

Zhou Ding

(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing)

Abstract

This paper studies the problem of free bending vibration of annular cylindrical tank partially filled with liquid in the consideration of the surface wave. The exact formulae of the mode shape functions and frequencies are deduced. Results can be obtained by means of computer. The analysis shows that the effect of liquid on vibration of annular cylindrical tank is equivalent to different generalized distributive masses attached to inner and outer cylinders respectively.