应用数学和力学，第15卷 第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶非线性时滞微分方程的振动定理*

靳 明 忠

（云南省应用数学研究所，云南工学院，1994年4月2日收到）

摘 要

本文给出一类高阶非线性时滞微分方程振动的充要条件．对强迫时滞微分方程给出若干充分条件或必要条件．

关键词 非线性 时滞微分方程 振动

一、引 言

考虑偶数阶非线性微分方程

$$[a(t)x^{(2n-1)}(t)]'+b(t)\phi[x(t)]p[x'(t)]$$

$$+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)g_i[x'(t-\sigma_i(t))]f_i[x(t-\sigma_i(t))]=e(t) \tag{E}$$

这里 a，b，q_i，$\sigma_i(1\leqslant i\leqslant m)$：$I\to R_0^+=[0,\infty)$，$I=[t_0,\infty)$；$p$，$f_i(1\leqslant i\leqslant m)$：$R\to R=(-\infty,\infty)$；$\phi$，$g_i(1\leqslant i\leqslant m)$：$R\to R^+=(0,\infty)$；$e$：$I\to R$．上述函数均为连续函数且 $xf_i(x)>0(x\neq 0)$，$yp(y)>0(y\neq 0)$．令

$$\max\{\sigma_i(t),\ 1\leqslant i\leqslant m,\ t\in I\}=\alpha<\infty.$$

对任意函数 $u(t)\in C[t_0-\alpha,t_0]$ 和 $y_k\in R(k=1,2,\cdots,2n-1)$，方程(E)的初值问题的解意指函数$x(t)\in C[t_0-\alpha,\infty)$满足方程组(E)且

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=u(t) && (t\in[t_0-\alpha,t_0])\\&x^{(k)}(t_0)=y_k && (k=1,2,\cdots,2n-1)\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

方程(E)的解称为振动的，如果它有任意大的零点；否则称为不振动的．方程(E)称为振动的，如果其任意初值问题(1.1)的解都是振动的．

记$N=\{1,2,\cdots,m\}$．设方程(E)的任一解均在I上有定义．

对于n阶非线性泛函微分方程振动性的研究已有大量结果（见文献[1，2，3，4]），但大多仅给出振动的充分条件．本文对高阶非线性时滞微分方程(E)的振动性，给出了必要条件．在某些条件下，本文还给出了振动的充要条件．

* 李骊推荐．云南省基础研究基金资助项目．1992年4月2日第一次收到

二、振动的充要条件

引理1 设$u(t)$是I上n次可微正值函数，$u^{(n)}(t)\leqslant 0$且不在任何区间$[T,\infty)$上恒等于零。则存在一个使$n+l$为奇数的整数$l(0\leqslant l\leqslant n-1)$和某个$T_u\in[t_0,\infty)$，使

(i)对任意$t\in[T_u,\infty)$，$u^{(k)}(t)>0\qquad(k=0,1,\cdots,l-1)$；

(ii)对任意$t\in[T_u,\infty)$，$(-1)^{l+k}u^{(k)}(t)>0\qquad(k=l,l+1,\cdots,n-1)$。

上述引理见[5]。

在方程(E)中，设$b(t)=e(t)\equiv 0$，得到方程

$$[a(t)x^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)g_i[x'(t-\sigma_i(t))]f_i[x(t-\sigma_i(t))]=0\tag{E_1}$$

定理2.1 设$t\in I$时$a'(t)\geqslant 0$且$0<a_0\leqslant a(t)\leqslant A$，$0<q_0\leqslant q_i(t)\leqslant Q$，$0\leqslant\sigma_i'(t)\leqslant\bar{\sigma}<1$，对$1\leqslant i\leqslant m$。如果对任意正数$M$和$1\leqslant i\leqslant m$，存在正数$G_1$和$G_2$，使当$M\leqslant|y|$时，$G_1\leqslant g_i(y)/|y|\leqslant G_2$，则方程$(E_1)$振动的充要条件是存在$k_1$，$k_2\in N$，使对$x_0>0$

$$\int_{x_0}^{+\infty}f_{k_1}(x)dx=+\infty,\qquad\int_{-x_0}^{-\infty}f_{k_2}(x)dx=+\infty\tag{2.1}$$

证明 不失一般性，设$k_1=k_2=1$。下面利用反证法证明充分性。

设$x(t)$是方程(E_1)的不振动解。不妨设$t\geqslant t_0$时$x(t)>0$。令$t_1=t_0+\alpha$，则$t\geqslant t_1$时$x(t-\sigma_i(t))>0(1\leqslant i\leqslant m)$。当$t\geqslant t_1$时，由方程$(E_1)$得

$$[a(t)x^{(2n-1)}(t)]'=-\sum_{i=1}^{m}q_i(t)g_i[x'(t-\sigma_i(t))]f_i[x(t-\sigma_i(t))]<0\tag{2.2}$$

由(2.2)式知$a(t)x^{(2n-1)}(t)$单调减少，可证必有$x^{(2n-1)}(t)>0$对$t\geqslant t_1$成立。事实上，若$x^{(2n-1)}(t_2)\leqslant 0(t_2\geqslant t_1)$，则对$t_3>t_2$，有$a(t_3)x^{(2n-1)}(t_3)<a(t_2)x^{(2n-1)}(t_2)\leqslant 0$。因而当$t>t_3$时，利用微分中值定理，有$t_3<t_4<t$，使

$$\begin{aligned}x^{(2n-2)}(t)&=x^{(2n-2)}(t_3)+x^{(2n-1)}(t_4)(t-t_3)\\&\leqslant x^{(2n-2)}(t_3)+a(t_3)x^{(2n-1)}(t_3)(t-t_3)/A\to-\infty\quad(t\to\infty).\end{aligned}$$

这必导致$x(t)\to-\infty(t\to\infty)$，与$x(t)>0(t\geqslant t_0)$矛盾。

其次，由(2.2)式，当$t\geqslant t_1$时

$$[a(t)x^{(2n-1)}(t)]'=a'(t)x^{(2n-1)}(t)+a(t)x^{(2n)}(t)<0.$$

但$a'(t)\geqslant 0$且$x^{(2n-1)}(t)>0$，故$a(t)x^{(2n)}(t)<0$，进而$x^{(2n)}(t)<0$。

对$x(t)$应用引理1，知存在奇数$l(1\leqslant l\leqslant 2n-1)$和$T_0\geqslant T_1$，使当$t\geqslant T_0$时

$$x(t)>0,\ x'(t)>0,\ x(t-\alpha)>0,\ x'(t-\alpha)>0\tag{2.3}$$

当$l=1$时$x''(t)<0$；当$l>1$时$x''(t)>0$。

由于$t\geqslant T_0$时，$[a(t)x^{(2n-1)}(t)]'<0$，并且$a(t)x^{(2n-1)}(t)>0$，故$\lim\limits_{t\to\infty}a(t)x^{(2n-1)}(t)$存在非负。下分两种情况讨论。

(i). 当$l=1$时，$x''(t)<0\qquad(t\geqslant T_0)$。

如果$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$，从$T_0$到$T$积分$(E_1)$得

$$a(T_0)x^{(2n-1)}(T_0)-a(T)x^{(2n-1)}(T)$$

$$\geqslant\int_{T_0}^{T} q_1(t)g_1[x'(t-\sigma_1(t))]f_1[x(t-\sigma_1(t))]dt$$

$$\geqslant q_0\cdot\bar{g}_1\cdot[x'(T_0-\alpha)]^{-1}\int_{x(T_0)}^{x(T-\alpha)} f_1(x)dx \tag{2.4}$$

这那 $\bar{g}_1=\min\{g_1[x'(t-\sigma_1(t))],\ 0\leqslant x'(t-\sigma_1(t))\leqslant x'(T_0-\alpha)\}$.在(2.4)式中令$T\to\infty$，注意到(2.1)式，产生矛盾。

如果$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\beta<\infty$，从$T_0$到$T$积分$(\mathrm{E}_1)$得

$$a(T_0)x^{(2n-1)}(T_0)-a(T)x^{(2n-1)}(T)$$

$$\geqslant\int_{T_0}^{T} q_1(t)g_1[x'(t-\sigma_1(t))]f_1[x(t-\sigma_1(t))]dt$$

$$\geqslant q_0\bar{g}_1\int_{T_0}^{T} f_1[x(t-\sigma_1(t))]dt$$

$$\geqslant q_0\bar{g}_1 f_0(T-T_0) \tag{2.5}$$

其中 $f_0=\min\{f_1(x),\ x(T_0-\alpha)\leqslant x\leqslant\beta\}$. 在(2.5)式中令$T\to\infty$，又获得矛盾。

(ii). 当$l>1$时，$x''(t)>0\ (t\geqslant t_0)$。因为$x'(t)>0$，故$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=+\infty$，设$x'(T_0-\alpha)=M$，显然$M>0$且$x'(t-\sigma_1(t))\geqslant M$对$t\geqslant T_0$成立。从$T_0$至$T$积分$(\mathrm{E}_1)$得

$$a(T_0)x^{(2n-1)}(T_0)-a(T)x^{(2n-1)}(T)\geqslant q_0G_1\int_{x(T_0)}^{x(T-\alpha)} f_1(x)dx \tag{2.6}$$

在(2.6)式中令$T\to\infty$，也获得矛盾。

综合(i)和(ii)的证明，知$x(t)$必振动，充分性得证。

必要性的证明. 设对任意$i\in N$，$\int_{x_0}^{+\infty} f_i(x)dx<+\infty\ (x_0>0)$，则对充分大的$x_0$，$\int_{x^0}^{+\infty} f_i(x)dx$可以充分小.

考虑方程(E_1)满足初始条件(1.1)的解$x(t)$，其中$u(t)$在$[t_0-\alpha,\ t_0]$上$2n-1$阶可导，并且$u^{(k)}(t)>0\ (0\leqslant k\leqslant 2n-1)$，$u(t_0-\alpha)=X_0>0$，$y_k>0\ (1\leqslant k\leqslant 2n-1)$。因$x(t)$是振动的，故存在$t_1>t_0$，使当$t\in[t_0,\ t_1]$时$x^{(2n-1)}(t)>0$且$x^{(2n-1)}(t_1)=a_0y_{2n-1}/2A$。显然存在$M>0$，使$t_1\geqslant t\geqslant t_0$时$x'(t-\sigma_i(t))\geqslant M$，对一切$i\in N$成立。

从t_0至t_1积分(E_1)得

$$a(t_0)x^{(2n-1)}(t_0)-a(t_1)x^{(2n-1)}(t_1)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_1} q_i(t)g_i[x'(t-\sigma_i(t))]f_i[x(t-\sigma_i(t))]dt$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}QG_2(1-\bar{\sigma})^{-1}\int_{t_0}^{t_1} f_i[x(t-\sigma_i(t))]dx(t-\sigma_i(t))$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}QG_2(1-\bar{\sigma})^{-1}\int_{X_0}^{+\infty} f_i(x)dx \tag{2.7}$$

利用所设条件得

$$a(t_0)x^{(2n-1)}(t_0)-a(t_1)x^{(2n-1)}(t_1)\geqslant a_0y_{2n-1}/2$$

由(2.7)式得

$$a_0 y_{2n-1}/2 \leqslant QG_2(1-\bar{\sigma})^{-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{X_0}^{+\infty} f_i(x)dx \tag{2.8}$$

对充分大的$X_0>0$，(2.8)式右端可以任意小，我们获得矛盾。故(2.1)第一式是必要的。

同理可证(2.1)第二式是必要的。

本定理2.1将文[6]定理1的结果推广至高阶时滞微分方程。

三、强 迫 振 动

对于带有强迫项的时滞微分方程(E)，我们给出振动的必要条件。

定理3.1 设$t\in I$时$0<a(t)\leqslant A$，$b(t)\leqslant B$，$q_i(t)\leqslant Q$且$0\leqslant\sigma_i'(t)\leqslant\bar{\sigma}<1$对任意$i\in N$，$\frac{p(y)}{y}\leqslant P$，$\int_{t_0}^{\infty}|e(t)|dt=E<\infty$。如果对任意正数$M$和一切$i\in N$，存在正数$G$，使当$M\leqslant|y|$时，有$g_i(y)/|y|\leqslant G$，则方程(E)振动的必要条件是存在$k_1$，$k_2\in N$，使对$x_0>0$

$$\int_{x_0}^{+\infty}[\phi(x)+f_{k_1}(x)]dx=+\infty,\quad \int_{-x_0}^{-\infty}[-\phi(x)+f_{k_2}(x)]dx=+\infty \tag{3.1}$$

证明 设对任意$i\in N$，(3.1)第一式不成立，则对充分大的$x_0>0$，$\int_{x_0}^{+\infty}[\phi(x)+f_i(x)]dx$可以充分小。

考虑方程(E)满足初始条件(1.1)的解$x(t)$，其中$u(t)$在$[t_0-\alpha,t_0]$ $2n-1$阶可导并且$u^{(k)}(t)>0\ (0\leqslant k\leqslant 2n-1)$，$u(t_0-\alpha)=X_0>0$，$y_k>0\ (1\leqslant k\leqslant 2n-1)$，$y_{2n-1}=2(E+1)/a(t_0)$因为$x(t)$是振动的，故存在$t_1>t_0$，使当$t\in[t_0,t_1]$时$x^{(2n-1)}(t)>0$，且$x^{(2n-1)}(t_1)=a(t_0)y_{2n-}/2A$。显然存在$M>0$，使$t_1\geqslant t\geqslant t_0$时$x'(t-\sigma_i(t))\geqslant M$，$1\leqslant i\leqslant m$。

从t_0到t_1积分(E)得

$$\begin{aligned}
&a(t_0)x^{2n-1}(t_0)-a(t_1)x^{2n-1}(t_1)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\int_{t_2}^{t_1}q_i(t)g_i[x'(t-\sigma_i(t))]f_i[x(t-\sigma_i(t))]dt\\
&\quad+\int_{t_0}^{t}b(t)p[x'(t)]\phi[x(t)]dt-\int_{t_0}^{t_1}e(t)dt
\end{aligned}$$

利用所设条件得

$$\begin{aligned}
&\frac{a(t_0)y_{2n-1}}{2}=E+1\\
&\leqslant BP\int_{t_0}^{t_1}\phi[x(t)]dx(t)+QG(1-\bar{\sigma})^{-1}\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_1}f_i[x(t-\sigma_i(t))]dx(t-\sigma_i(t))\\
&\quad+E
\end{aligned} \tag{3.2}$$

由(3.2)式得

$$1\leqslant[BP+QG(1-\bar{\sigma})^{-1}]\sum_{i=1}^{m}\int_{X_0}^{+\infty}f_i[\phi(x)+f_i(x)]dx \tag{3.3}$$

但是对充分大的$X_0>0$，(3.3)右端可任意小，我们获得矛盾。从而(3.1)第一式是必要的。

同理可证(3.1)第二式的必要性.

在方程(E)中令$b(t)\equiv 0$，$g_i(y)\equiv 1(i\in N)$，我们得到方程

$$[a(t)x^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)f_i[x(t-\sigma_i(t))]=e(t) \tag{E_2}$$

设$h(t)$在I上$2n$次可导且振动，在(E_2)中作代换

$$x(t)=y(t)+h(t) \tag{3.4}$$

若$h(t)$满足下式，

$$[a(t)h^{(2n-1)}(t)]'=e(t) \tag{3.5}$$

则方程(E_2)化为

$$[a(t)y^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)f_i[y(t-\sigma_i(t))+h(t-\sigma_i(t))]=0 \tag{3.6}$$

以下设$t\in I$时有$0<a(t)\leqslant A$，$a'(t)\geqslant 0$，$q_i(t)>0(t\in[t_0,\infty)$，$i\in N)$. 为简单，假设以下论述中的不等式对充分大的$t$成立.

引理 2 设$x(t)>0$是方程(E_2)的不振动解，$y(t)$是方程(3.6)的解且满足(3.4)，则存在奇数l：$1\leqslant l\leqslant 2n-1$，使$t$充分大时

(i) $y^{(k)}(t)>0\quad(k=0,1,\cdots,l-1)$.

(ii) $(-1)^{l+k}y^{(k)}(t)>0\quad(k=l,l+1,\cdots,2n-1)$

证明 因$x(t)>0$，由方程(3.6)得

$$[a(t)y^{(2n-1)}(t)]'=-\sum_{i=1}^{m}q_i(t)f_i[x(t-\sigma_i(t))]<0 \tag{3.7}$$

可以证明，$y^{(2n-1)}(t)>0$. 事实上，若$y^{(2n-1)}(t_1)\leqslant 0$，由(3.7)式知当$t_2>t_1$时$a(t_2)y^{(2n-1)}(t_2)<a(t_1)y^{(2n-1)}(t_1)\leqslant 0$. 于是，由微分中值定理，有$t_2<t_3<t$，使

$$\begin{aligned}y^{(2n-2)}(t)&=y^{(2n-2)}(t_2)+y^{(2n-1)}(t_3)(t-t_2)\\&\leqslant y^{(2n-2)}(t_2)+a(t_2)y^{(2n-1)}(t_2)(t-t_2)/A.\end{aligned}$$

令$t\to\infty$，根据上式知$y(t)\to-\infty$. 这与(3.4)式及$x(t)>0$和$h(t)$振动矛盾.

其次，由(3.7)式得

$$[a(t)y^{(2n-1)}(t)]'=a(t)y^{(2n)}(t)+a'(t)y^{(2n-1)}(t)<0,$$

所以

$$y^{(2n)}(t)<-a'(t)y^{(2n-1)}(t)/a(t)\leqslant 0,$$

从而$y(t)$不振动. 注意到$x(t)>0$，$h(t)$振动，故由(3.4)式知$y(t)>0$.

再利用引理1，可知引理2结论成立.

定理3.2 设$h(t)$满足

$$\left.\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} h(t)/t^{2n-1}&=-\infty\\ \limsup_{t\to\infty} h(t)/t^{2n-1}&=+\infty\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

则方程(E_2)是振动的.

证明 设$x(t)>0$是方程(E_2)的非振动解，由引理2知，存在奇数l：$1\leqslant l\leqslant 2n-1$，使当$t$充分大时$y^{(k)}(t)>0(0\leqslant k\leqslant l)$，$y^{(l+1)}(t)<0$. 故存在正数$M$，使对充分大的$t$有$0<y(t)\leqslant Mt^l$. 由此得

$$\limsup_{t\to\infty} y(t)/t^l \leqslant M \tag{3.9}$$

注意到(3.4)式，即$y(t)=x(t)-h(t)>-h(t)$，由(3.9)式得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{-h(t)}{t^l}<\limsup_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t^l} \leqslant M \tag{3.10}$$

但由(3.8)式第一式得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{-h(t)}{t^l}=-t^{2n-1-l}\liminf_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t^{2n-1}}=+\infty \tag{3.11}$$

(3.11)式与(3.10)式矛盾．定理得证．记

$$\left.\begin{aligned} &h_+(t)=\max\{h(t),0\}\\ &h_-(t)=-\min\{h(t),0\}\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

定理3.3 设$0\leqslant\sigma_i'(t)\leqslant\bar\sigma<1$ $(i\in N)$，存在$k_1,k_2\in N$，使$f_{k_1}(x)$，$f_{k_2}(x),q_{k_1}(t)$，$q_{k_2}(t)$均为不减函数，并且有

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_0}^{+\infty} q_{k_1}(t)f_{k_1}[h_+(t)]dt=+\infty\\ &\int_{t_0}^{+\infty} q_{k_2}(t)f_{k_2}[h_-(t)]dt=+\infty\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

则方程(E_2)是振动的．

证明 设 $x(t)$ 是方程 (E_2) 的非振动解且 $x(t)>0$，由引理 2 知，$y(t)>0$，$y'(t)>0$，$y^{(2n-1)}(t)>0$，$y^{(2n)}(t)<0$．于是$\lim\limits_{t\to\infty}y^{(2n-1)}(t)$存在非负．从$T_0$到$T$积分(3.6)式，

$$\begin{aligned} &a(T)y^{(2n-1)}(T)-a(T_0)y^{(2n-1)}(T_0)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{m}\int_{T_0}^{T} q_i(t)f_i[y(t-\sigma_i(t))+h(t-\sigma_i(t))]=0\end{aligned} \tag{3.14}$$

在(3.14)式中令$T\to\infty$，可知

$$\int_{T_0}^{+\infty} q_{k_1}(t)f_{k_1}[y(t-\sigma_{k_1}(t))+h(t-\sigma_{k_1}(t))]dt<\infty \tag{3.15}$$

另方面，因$y(t)+h(t)=y(t)+h_+(t)-h_-(t)$，故当$h_+=0$时，$y+h=y-h_-=x>0=h_+$；当$h_-=0$时，$y+h=y+h_+>h_+$．所以$y(t)+h(t)>h_+(t)$．注意到$q_{k_1}(t),f_{k_1}(t)$均为不减函数，再利用(3.13)第一式，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{T_0}^{T} q_{k_1}(t)f_{k_1}[y(t-\sigma_{k_1}(t))+h(t-\sigma_{k_1}(t))]dt\\ &\geqslant\int_{T_0}^{T} q_{k_1}(t)f_{k_1}[h_+(t-\sigma_{k_1}(t))]dt\\ &\geqslant\int_{T_0-\sigma_{k_1}(T)}^{T-\sigma_{k_1}(T)} q_{k_1}(t)f_{k_1}[h_+(t)]dt\to+\infty\quad(T\to\infty)\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.16)与(3.15)矛盾．定理得证．

记$h(t)\in H$，如果$h(t)$振动且存在数列$\{S_n\}$和$\{\bar S_n\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\bar S_n=\infty$，满足

$$h(S_n)=\inf\{h(t),t\geqslant S_n\},\qquad h(\bar S_n)=\sup\{h(t),t\geqslant\bar S_n\}$$

定理3.4 设$h(t)\in H$．如果存在$k\in N$，使$f_k(x)$是不减函数并且$\int_{t_0}^{+\infty}q_k(t)dt=+\infty$．则方程($E_2$)是振动的．

证明 设$x(t)$ 是方程 (E_2) 的不振动解且 $x(t)>0$．由引理 2 知，$y(t)>0$，$y'(t)>0$，

$y^{(2n-1)}(t)>0$，$y^{(2n)}(t)<0$。

取S_{n_0}充分大，使当$t\geqslant S_{n_0}$时

$$y(t)+h(t)\geqslant y(t)+h(S_{n_0})=z(t). \tag{3.17}$$

由(3.17)式知$z^{(k)}(t)=y^{(k)}(t)(k=1,2,\cdots,2n)$．由方程(3.6)及$f_k(x)$不减可得到，当$t\geqslant S_{n_0}$时

$$\begin{aligned}&[a(t)z^{(2n-1)}(t)]'+q_k(t)f_k[z(t-\sigma_k(t))]\\&\leqslant[a(t)y^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)f_i[y(t-\sigma_i(t))+h(t-\sigma_i(t))]\\&=0.\end{aligned}$$

但是，由于$f_k[z(t-\sigma_k(t))]\geqslant f_k[z(t-a)]$，故

$$[a(t)z^{(2n-1)}(t)]'+q_k(t)f_k[z(t-a)]\leqslant 0 \tag{3.18}$$

由$t\geqslant S_{n_0}$时，

$$z(t)=y(t)+h(S_{n_0})\geqslant y(S_{n_0})+h(S_{n_0})=x(S_{n_0})>0.$$

从$S_{n_0}+a$到T积分(3.18)式得

$$\begin{aligned}&a(T)z^{(2n-1)}(T)-a(S_{n_0})z^{(2n-1)}(S_{n_0})\\&\leqslant-\int_{S_{n_0}+a}^{T}q_k(t)f_k[z(t-a)]dt\\&\leqslant-f_k[z(S_{n_0})]\int_{S_{n_0}+a}^{T}q_k(t)dt\to-\infty\qquad(T\to\infty).\end{aligned}$$

这与$\lim\limits_{T\to\infty}z^{(2n-1)}(T)=\lim\limits_{T\to\infty}y^{(2n-1)}(T)$存在非负，矛盾。

定理3.5 设$|h(t)|\leqslant M$，$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)$不存在，如果存在$k\in N$，使$f_k(x)$是不减函数且$\int_{t_0}^{+\infty}q_k(t)dt=+\infty$。则方程($E_2$)的任一解的导数振动，一切无界解必振动。

证明 设$x(t)$是方程(E_2)的不振动解且$x(t)>0$，则$y(t)>0$，$y'(t)>0$，$a(t)y^{(2n-1)}(t)>0$，$[a(t)y^{(2n-1)}(t)]'<0$。因此，$\lim\limits_{t\to\infty}a(t)y^{(2n-1)}(t)$存在有限。

(i) 如果$x(t)$无界，由$|h(t)|\leqslant M$知$y(t)=x(t)-h(t)$无界，设t充分大时$y(t-\sigma)\geqslant 2M$，则

$$\begin{aligned}x(t-\sigma_k(t))&=y(t-\sigma_k(t))+h(t-\sigma_k(t))\\&\geqslant y(t-a)+h(t-\sigma_k(t))\\&\geqslant 2M-M=M.\end{aligned}$$

因此，当t充分大时，由$f_k(x)$不减知

$$f_k[x(t-\sigma_k(t))]\geqslant f_k(M)$$

T_0取足够大，从T_0到T积分(3.6)式得

$$\begin{aligned}&a(T_0)y^{(2n-1)}(T_0)-a(T)y^{(2n-1)}(T)\\&\geqslant f_k(M)\int_{T_0}^{T}q_k(t)dt\to+\infty\qquad(T\to\infty).\end{aligned}$$

这与$\lim\limits_{t\to\infty}a(t)y^{(2n-1)}(t)$存在有限矛盾。故$x(t)$必振动。

(ii) 若$x(t)$有界，因$|h(t)|\leqslant M$，故$y(t)$也必有界。从而$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=c<+\infty$。若$x'(t)$最终为负，由于$y'(t)+h'(t)=x'(t)<0$及$h'(t)$振动，$y'(t)$必最终为负，这与$y'(t)>0$矛盾。若

$x'(t)$最终为正，则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=b$存在有限，从而

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)-\lim_{t\to\infty}y(t)=b-c.$$

这又与$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)$不存在矛盾。因而$x'(t)$必振动。

本文定理将文[7]中的结果推广到高阶时滞微分方程。

参 考 文 献

[1] Dahiya, R. S. and O. Akinyele, Oscillation theorems of nth order functional differential equations with fo·cing terms, *J. Math. Anal. Appl.*, 109 (1985), 325—332.

[2] Foster, K. E. and R. C. Grimmer, Nonoscillatory solutions of higher order delay equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 77(1980), 150—164.

[3] Grace, S. R. and B. S. Lalli, Oscillation theorems for *n*th order delay differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 91(1983), 352—366.

[4] Grace, S. R. and B. S. Lalli, Asymptotic and oscillatory behavior of *n*th order forced functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 140(1989), 10—25.

[5] Žilina, R. O., Oscillation of linear retarded differential equation, *Czech. Math. J.* 34(1984), 371—377.

[6] Liang Zhong-chao, Asymptotically periodic solutions of a class of second order nonlinear differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc*, 99(1987), 693—699.

[7] James S. W. Wong, Second order nonlinear forced oscillations, *SIAM. J. Math. Anal*, 19(1988), 667—675.

Oscillation Theorems of Higher Order Nonlinear Delay Differential Equations

Jin Ming-zhong

(Departmnet of Basic Courses, Yunnan Institute of Technology, Kunming)

Abstract

This paper gives necessary and sufficient conditions for oscillation of a class of higher order nonliear delay differential equations, and some sufficient conditions or necessary conditions for a forced delay differential equation.

Key words nonlinear, delay differential equation, oscillation