应用数学和力学，第15卷 第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

KdV孤波解的稳定性*

吕咸青

（山东教育学院，1993年6月18日收到）

摘　要

本文探讨了KdV孤波解在无穷小扰动下的稳定性，证明KdV孤波解在李亚普诺夫意义下是不稳定的。

关键词　KdV孤波解　不稳定　无穷小扰动　李亚普诺夫直接方法

KdV方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial z}+\mu\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=0 \qquad (\mu>0) \tag{1}$$

是个典型方程，Alan Jeffrey 和 Tsunehiko Kakutani[1] 曾研究过此方程的稳态激波解的稳定性。他们所用方法是对非线性问题进行线性化处理，所得到的结果表明KdV稳态孤波解在李亚普诺夫意义下是稳定的。本文只用到李亚普诺夫直接方法证明 KdV 孤波解是不稳定的。稳态孤波解作为一种特殊情形也是不稳定的。这改正了 A. Jeffrey 和 T. Kakutani 的结论[1]。

我们的目的是方程(1)的解。设$u=u(x)=u(z-\lambda t)$，这里λ是常数。将$u=u(x)$代入方程(1)中，并对x积分，我们得到

$$-\lambda u+u^2/2+\mu u_{xx}=A \tag{2}$$

这里A是积分常数。

方程(2)有孤波解[2]

$$u_0=u_\infty^+ +\tilde{a}\mathrm{sech}^2[(\tilde{a}/12\mu)^{1/2}(z-\lambda t)]$$

这里$\tilde{a}=3(u_\infty^- -u_\infty^+)/2>0$，$\lambda=u_\infty^+ +\tilde{a}/3=(u_\infty^- +u_\infty^+)/2$

根据通常的稳定性理论，我们给孤波解$u_0(x)$一个小扰动$v(x)$，设

$$u=u_0+v \qquad |v|\ll|u_0| \tag{3}$$

将(3)式代入方程(2)并化简得到关于v的方程

$$-\lambda v+u_0 v+v^2/2+\mu v_{xx}=0 \tag{4}$$

设$w=v_x$，则$w_x=v_{xx}$，我们得到关于v，w的方程

$$\left.\begin{aligned}&v_x=w\\&\mu w_x=[\lambda-u_0(x)]v-v^2/2\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

* 钱伟长推荐。

$$\lambda-u_0=\tilde{a}\{1-3\mathrm{sech}^2[(\tilde{a}/12\mu)^{1/2}(z-\lambda t)]\}/3$$
$$=\tilde{a}\{1-3\mathrm{sech}^2[(\tilde{a}/12\mu)^{1/2}x]\}/3$$

构造李亚普诺夫函数$V=vw$，则

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(5)}=\tilde{a}\{1-3\mathrm{sech}^2[(\tilde{a}/12\mu)^{1/2}x]\}v^2/3\mu+w^2-v^3/2\mu$$

很明显当 $v<0$，$w<0$ 时，我们有 $V=vw>0$，当 $v<0$，$x\geqslant(12\mu/\tilde{a})^{1/2}\ln 5$ 时，我们有

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(5)}>\tilde{a}v^2/6\mu+w^2$$

根据 Четаев 不稳定性定理[3]，我们说 KdV 孤波解关于无穷小扰动是不稳定的.

稳态孤波解[2]

$$\tilde{u}_0=-u_\infty[1-3\mathrm{sech}^2(u_\infty/4\mu)^{1/2}z] \qquad (u_\infty>0)$$

与变量t没有关系，显然它只是孤波解$u_0(x)$的特殊情形. 因此我们说稳态孤波解关于无穷小扰动也是不稳定的.

参 考 文 献

[1] Jeffrey, Alan and Tsunehiko Kakutani, Stability of the Burgers shock wave and the Korteweg-de Vries soliton, *Indiana University Mathematics*, 20(5) (1970), 463—468.

[2] Jeffrey, Alan and Tsunehiko Kakutani, Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg-de Vries equation, *SIAN Rev.*, 14 (1972), 528—643.

[3] 廖晓昕, 《稳定性的数学理论及应用》, 华中师范大学出版社(1988), 57—59.

Stability of the Korteweg-de Vries Solitary Wave Solution

Lü Xian-qing

(*Shandong Education College, Ji'nan*)

Abstract

This paper considers the stability of the Korteweg-de Vries solitery wave solution with respect to infinitesmal disturbance. It is found that the Korteweg-de Vries solitary wave solution is unstable in the Liapunov sense.

Key words Korteweg-de Vries solitary wave solution, unstable, infinitesmal disturbance, Liapunov direct method