

# 可压缩平面流中尖角处不定常涡 产生的初始阶段的数值模拟\*

黄敦 杨淳

(北京大学数学系) (北京师范大学数学系)

(1993年3月1日收到)

## 摘 要

本文采用有限体积法结合高分辨率的TVD(总变差不增)格式,对平面激波遇矩形、三角形障碍物问题进行数值模拟,采用Schwarz变换生成计算网格,可使网格线在尖角处较密集且网格设置符合流场物理特性。初始阶段的流场复杂且粘性影响的尺度很小,模型中可以忽略流体的粘性。计算结果描述了平面无粘可压流中,由于弓形激波后熵与温度的不均匀性引起的尖角下游不定常集中涡的产生过程。数值计算与应我们要求所做激波管实验的光测结果相符合。

**关键词** 激波 涡旋生成 有限体积TVD格式 网格生成

## 一、引 言

很多情况下,流场中物体边界的尖角附近会产生涡旋,根据Crocco定理<sup>[3]</sup>,在无粘可压流中,温度 $T$ 与熵 $S$ 的梯度导致涡量 $\Omega$ 的产生,定理为:

$$d\Omega/dt = (\Omega \cdot \nabla)u - \Omega(\nabla \cdot u) + \nabla T \times \nabla S$$

其中,  $\Omega = \nabla \times u$ ,  $u$ 为速度向量。

流体的粘性也会引起涡旋的产生,但在小时间段 $t$ 内,粘性影响范围的尺度与 $\sqrt{\nu t}$ 成正比( $\nu$ 为运动粘度),对下面计算的问题, $\sqrt{\nu t}$ 只是特征长度的千分之一量级,因此短时间 $t$ 内,本文讨论的集中涡生成可以忽略流体的粘性。

本文计算的物理问题为平面激波遇矩形、三角形障碍物的涡旋产生,因有激波的绕射与反射,流场与波系十分复杂,特别是障碍物的尖角附近。激波管实验的干涉仪照片得到的流场密度分布,可以作为数值结果的参照与检验。此外,数值模拟还可给出压力、速度、温度及熵的分布,从而使我们对这一非定常复杂现象有更深入的了解。

从数值计算的角度看,障碍物拐角处的处理是一个难点,因尖角附近有膨胀波及涡旋产生,流场的物理参量有剧烈变化,有些数值方法有可能局部失效。本文用有限体积法直接将[1]中TVD(总变差不增)格式推广到二维问题的计算,在网格生成上采用Schwarz变换,得到的计算网格适合障碍物形状及流场特点,可以克服计算中的困难,从而能给出复杂流场

\* 国家自然科学基金及国家科委资助课题

及局部细节的清晰描述。计算结果显示的扰动区温度、熵、压力及速度场的不均匀性，可加深对障碍物尖角附近初始阶段不定常集中涡产生机理的认识。在矩形挡板的头部，干涉仪照片显示有一个小扁平黑色区域，计算得到的等密度线可较好地描述并分析这一局部细节，因压力有峰值，挡板头部的速度向量有方向的变化，即左角点附近流体向左流动，右角处则向右。

1975年来，许多文章讨论非定常粘性流的分离条件，本文模拟的问题中，粘性影响很小，我们希望这一特殊的分离现象可对可压流非定常流场分离这一难点的研究有所贡献。

## 二、数值方法及网格生成

控制方程为经典的无粘气体力学非线性Euler方程组，以 $x, y, t$ 为自变量：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

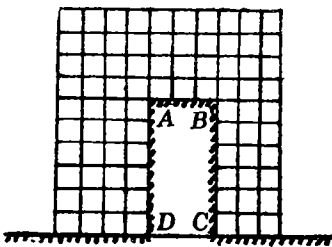
其中

$$\begin{aligned} U &= (\rho, \rho u, \rho v, E)^T \\ F(U) &= (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, u(p + E))^T \\ G(U) &= (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v(p + E))^T \\ p &= (\gamma - 1) \left( E - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right) \end{aligned}$$

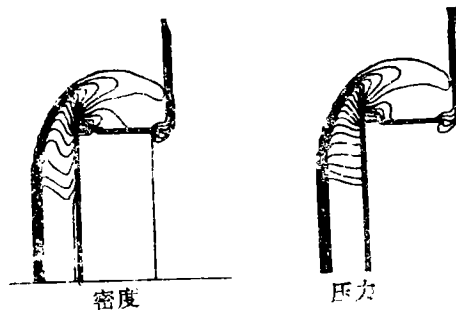
$\rho, p, E$ 为气体的密度、压力及单位体积的总能， $u, v$ 分别为 $x, y$ 方向的速度分量， $\gamma$ 为绝热系数。

近年来，出现许多高分辨率格式且应用较广，其中[1]中的TVD格式，虽略费机时，但在常用的二阶精度格式中，有较高的分辨率。针对本文所计算的有尖角障碍物问题，有限体积法比算子分裂更具优越性，我们将[1]中单个方程数值通量的构造法推广到求解二维偏微分方程组的有限体积格式，时间方向采用Runge-Kutta法，得到的格式时间，空间方向除光滑区个别极值点外均为二阶精度。

我们首先计算了平面激波遇矩形障碍物的问题。最初我们很自然地在物理平面采用如图<sup>1</sup>所示的矩形网格，但遇到了一些困难。如果网格较密，如特征长度 $AB$ （矩形障碍物宽）分10个网格以上，由于误差的累积，会如图2所示在角点 $A$ 附近算出膨胀激波及压力负值等非物理



■ 1



$M_1=2.5, \text{ time}=0.4561, \text{ grid}, 60 \times 60$

■ 2

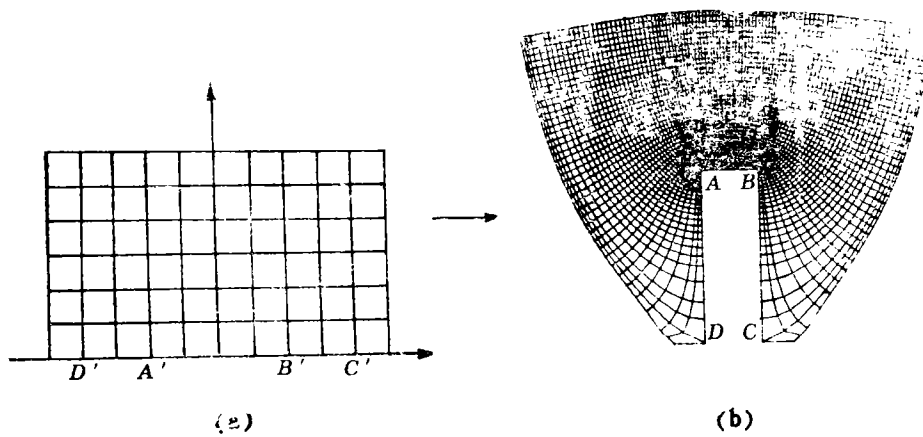


图 3

结果. 网格较少时(如 $AB$ 分5格), 格式粘性大, 抹光严重, 算不出如[2]中激波管实验的密度分布照片所显示的尖角处, 产生集中涡的物理现象.

为避免这一问题的产生, 我们采用了复变函数理论中的 Schwarz 变换生成网格, 将计算空间的上半平面变换到物理空间一多角形的外部区域, 即除去矩形障碍物的上半平面, 图3显示了网格变换的对应区域及对应边界点. 图3a为计算平面网格示意图.

对三角形障碍物的情况, 我们也作了 Schwarz 变换, 图4为相应的计算及物理区域网格图.

### 三、计算结果与分析

我们对入射激波马赫数  $M_\infty = 2.5$  的情况进行了计算, 所用网格数为  $100 \times 40$ .

矩形障碍物的高与宽度之比为  $3:1$ , 为显示拐角处涡的生成, 挡板头部  $AB$  段分44个网格, 侧边  $AD, BC$  各分27个网格, 如图3b所示.

三角形障碍物的情况我们计算了等边三角形, 每边各分45个网格(图4b).

图5、图6为激波绕两种障碍物的流场密度、压力、温度及熵函数  $p/\rho^\gamma$  的等值线分布, 后三者不易由实验手段获得. 图7、图8为瞬时速度矢量图, 为清晰起见,  $x$  方向每5个网格点,  $y$  方向每2个网格点标出一速度向量. 图9、图10为尖角附近的局部放大速度矢量场.

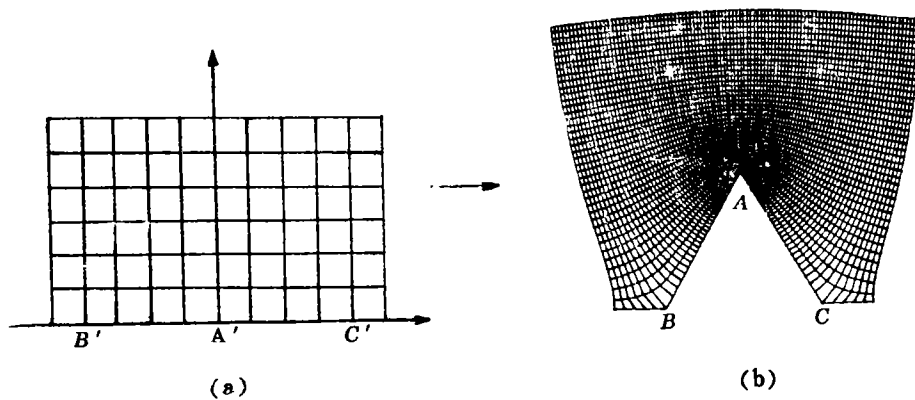


图 4

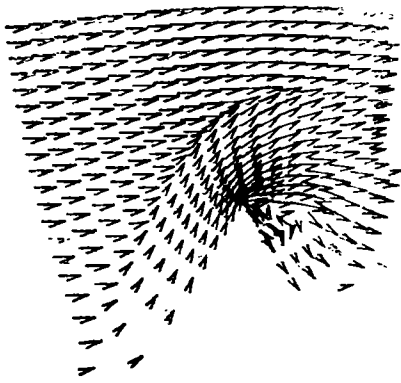
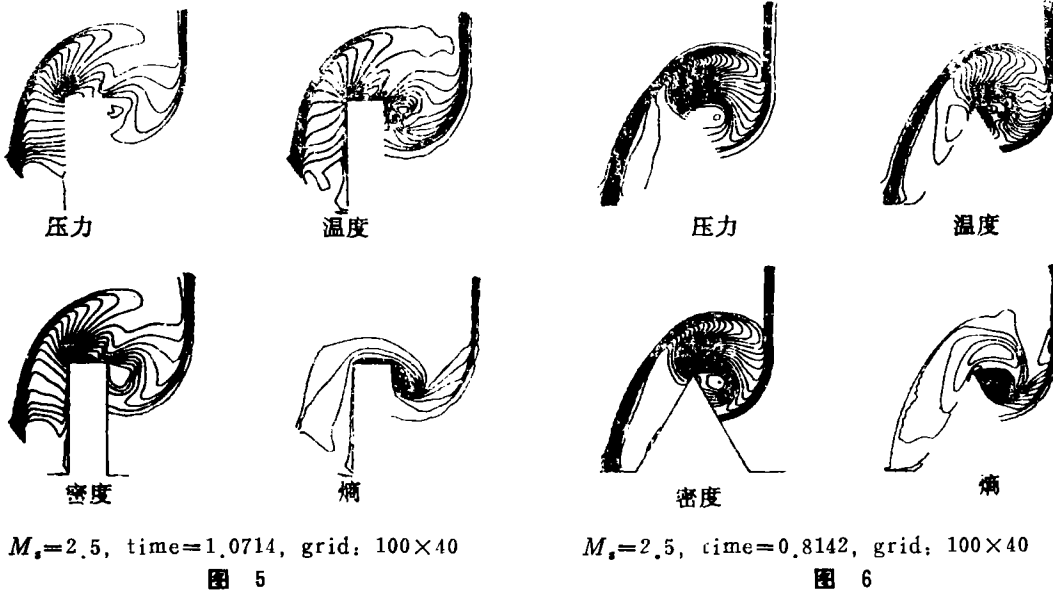


图7 速度场(time=1.0714)

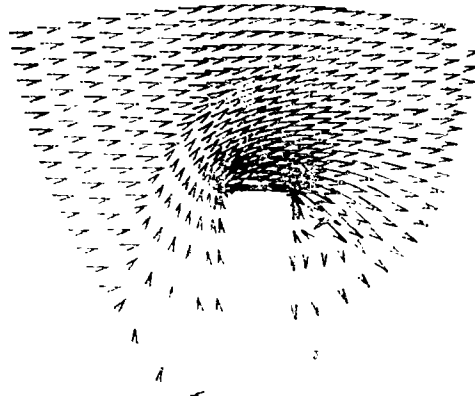


图8 速度场(time=0.8142)

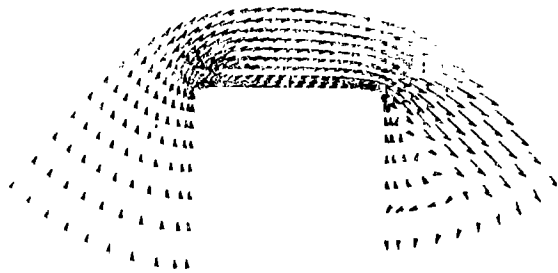


图 9

应用Schwarz变换生成网格，角点处的网格十分密集，且网格线的分布适合于流场的物理特性，故拐角处的膨胀波得到了较好的模拟，未出现图2中矩形网格引起的膨胀激波现象。

图5、6显示等值线，特别是熵等值线在尖角处出现封闭曲线，这是由于弓形激波引起温

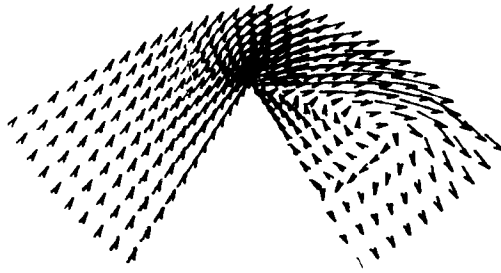


图 10

度与熵的梯度非零, 导致涡旋的产生, 还可见到如引言中最后提到的矩形障碍物头部有分离现象。在粘性尚未起显著作用的初始阶段, 数值模拟(分辨率高于文[2])有助于深入理解尖角附近集中涡生成和分离的机理。

为保证我们计算的可靠性与准确性, 我们也用了更粗的计算网格: 矩形障碍物中将  $AB$  分为 5 格及 26 格。任何稳定的差分格式都有一定的格式粘性, 对本文的二阶精度格式, 格式粘性与空间步长的 3 次方成正比。  $AB$  分为 5 格的情况, 格式粘性过大, 算不出涡旋生成现象, 而将  $AB$  分为 26 格的计算结果, 已与图 5、图 6 较为接近。为使计算结果更为可靠, 我们用其它三种高分辨率格式计算了矩形挡板问题, 计算情况将在另一文中介绍。下一步对 Navier-Stokes 方程进行数值模拟将进一步反映这一问题的实质。

## 参 考 文 献

- [1] Harten, A., High resolution schemes for hyperbolic conservative laws, *J. Comput. Phys.*, 49 (1983), 357—393.
- [2] 黄文生、胡永生, 关于平面激波在矩形障碍物上的绕射与反射, 《第六届全国激波与激波管学术会议论文集》(1992), 1—15.
- [3] Tsien, H. S., Equations of Gas Dynamics, Chapter I of *Fundamentals of Gas Dynamics*, ed. H. W. Emmons, Princeton Univ. Press (1958).
- [4] Bruneau, C. H., J.J. Chattot, J. Laminie and R. Teman, Computation of vortex flows past a flat plate at high angle of attack, *Lecture Notes in Physics*, 264 (1986), 134—140.

# Numerical Modeling of the Initial Stage of the Generation of Unsteady Vortices from Sharp Corner in Plane Compressible Flow

Huang Dun

*(Depart. of Math. , Peking University, Beijing)*

Yang Chun

*(Depart. of Math. , Beijing Normal University, Beijing)*

## Abstract

The impingement of a plane shock wave in air on a rectangular or triangular obstacle is simulated numerically with high resolution TVD (total variation diminishing) scheme in finite volume formulation with Schwarz transformation in mesh generation. The mesh lines are quite adaptive to the physical features of the unsteady flow field and concentrate locally near the corners. At the initial stage the flow field is complex, and the scale of viscous diffusion is very small and the viscosity of fluid in computation may be neglected. The unsteady generation of concentrated vortices downstream of the sharp corner as the result of the nonuniformity of both temperature and entropy fields in plane inviscid compressible fluid, induced by bow shock wave, is shown clearly and in accordance with optical measurements, performed by our request.

**Key words** shock wave, generation of vortices, finite volume TVD scheme, mesh generation