具凸结构的概率度量空间中的重合点定理*

朴维达　朴根生　赵烈济　金钟圭

（韩国庆尚大学教育学院数学系）　　（韩国庆南大学数学系）

（张石生推荐，1993年9月17日收到）

摘　要

本文在具凸结构的概率度量空间中，对非线性混合压缩映象得出了几个重合点和公共不动点定理。

关键词　概率度量空间　凸结构　交换映象　重合和公共不动点

一、引　　论

K. Menger[20] 引入了概率度量空间（或统计度量空间）的概念。概率度量空间是度量空间的推广，这一空间的理论的研究随着B. Schweizer和A. Sklar的开创性工作[26~28]而得到迅速的发展。概率度量空间理论特别在概率分析中起着重要的作用。有关这些空间的详细讨论和应用请参考文献[2,9,23,29,37]。

近年来，概率度量空间中的某些不动点定理已被许多数学家证明，见A. F. Bharucha-Reid[1]，G. Bocsan[2,3]，张石生[5]，O. Hadzic[10～16]，V. Radu[22～24]，S. L. Singh[31]，M. Stojakovic[32]，D. H. Tan[36]以及[4,7,8,17]等。

因每一度量空间都是一概率度量空间，故可以用概率度量空间中的许多结果去证明度量空间和Banach空间中的许多结果。

另外，W. Takahashi[34] 在度量空间中引入了凸性的概念，并在具凸结构的度量空间中证明了几个不动点定理。以后许多作者给出凸度量空间中的很多不动点定理和凸度量空间的特性，见丁协平[8]，O. Hadzic[14～16]，H. V. Machado[19]，S. A. Naimpally等[21]，B. E. Rhoades等[25]，K. L. Singh等[30]及L. A. Tallman[35]。

在本文中，在某些条件下，我们对概率度量空间和度量空间中的非线性混合压缩映象（即涉及单值和多值的压缩型映象）证明几个重合和公共不动点定理。

二、预　备　知　识

设R表数集，R^+为非负实数集。映象F：$R\to R^+$称为分布函数，如果它是不减的，左连续

* 本文原文为英文，由张石生译为中文。

的且$\inf F=0$，$\sup F=1$．我们用$\mathscr{L}$表一切分布函数的集合．

概率度量空间（简称PM-空间）是一个二元组$(X,\mathscr{F})$，其中X是一非空集，$\mathscr{F}$是$X\times X\to\mathscr{L}$的映象．当$(u,v)\in X\times X$时，分布函数$\mathscr{F}(u,v)$被记为$F_{u,v}$，而且满足下面的条件：

(P1)　$F_{u,v}(x)=1$，$\forall x>0$当且仅当$u=v$；

(P2)　$F_{u,v}(0)=0$，$\forall u,v\in X$；

(P3)　$F_{u,v}(x)=F_{v,u}(x)$，$\forall u,v\in X$；

(P4)　如果$F_{u,v}(x)=1$，$F_{v,w}(y)=1$，则$F_{u,w}(x+y)=1$，$\forall u,v,w\in X$．

在度量空间(X,d)中，度量d可导出一映象$\mathscr{F}:X\times X\to\mathscr{L}$，使得$\mathscr{F}(u,v)(x)=F_{u,v}(x)=H(x-d(u,v))$，$\forall u,v\in X$，这里$H$是由下式定义的分布函数：

$$H(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

函数$t:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$称为T-范数，如果它满足下面的条件：

(t1)　$t(a,1)=a$，　$\forall a\in[0,1]$且$t(0,0)=0$，

(t2)　$t(a,b)=t(b,a)$，$\forall a,b\in[0,1]$，

(t3)　如果$c\geqslant a$，$d\geqslant b$，则$t(c,d)\geqslant t(a,b)$，

(t4)　$t(t(a,b),c)=t(a,t(b,c))$，$\forall a,b,c\in[0,1]$．

Menger空间是一个三元组$(X,\mathscr{F},t)$，其中$(X,\mathscr{F})$是一PM-空间，t是一T-范数且满足条件：

(P5)　$F_{u,w}(x+y)\geqslant t(F_{u,v}(x),\ F_{v,w}(y))$，$\forall u,v,w\in X$，及$\forall x,y\in\mathbf{R}^+$

PM-空间中的邻域概念由B. Schweizer及K. Sklar[26]引入．当$u\in X$，$\varepsilon>0,\lambda\in(0,1)$时，$u$的$(\varepsilon,\lambda)$-邻域，记之以$U_u(\varepsilon,\lambda)$，由下式定义：

$$U_u(\varepsilon,\lambda)=\{v\in X:F_{u,v}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

如果$(X,\mathscr{F},t)$是具连续T-范数t的Menger空间，则邻域族$\{U_u(\varepsilon,\lambda):u\in X,\ \varepsilon>0,\ \lambda\in(0,1)\}$在$X$中诱导出Hausdorff拓朴．

概率赋范空间是一三元组$(X,\mathscr{F},t)$，其中X是实或复空间，t是一T-范数其强于T-范数$t_m(a,b)=\max\{a+b-1,0\}$，且映象$\mathscr{F}:X\to\mathscr{L}$满足下列条件：

(R1)　$F_u(x)=H(x)$当且仅当$u=0$，其中

$$H(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}\quad,\ \mathscr{F}(u)=F_u$$

(R2)　$\forall u\in X$，$x\in R^+$，$\lambda\in K-\{0\}$（K是X的数域），

$$F_{\lambda u}(x)=F_u\left(\frac{x}{|\lambda|}\right)$$

(R3)　$\forall u,v\in X$，　$\forall x,y\in\mathbf{R}^+$

$$F_{u-v}(x+y)\geqslant t(F_u(x),F_v(y))$$

B. Schweizer和A. Sklar[26]已经证明在众多可供选择的T-范数中，“$t(a,\ b)=\min\{a,b\}$”是最强的．

令$F_{u,v}(x)=F_{u-v}(x)$，$u,v\in X$，则知每一概率赋范空间是一Menger空间．

另外，在[33]中，W. Takahashi引入了具凸结构的度量空间的概率．

设(X,d)是一度量空间，I是单位区间$[0,1]$．一映象$W:X\times X\times I\to X$称为X上的凸结

构，如果对任意的$x,y,u\in X$及任意的$\lambda\in I$

$$d(u,W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y)$$

具凸结构W的度量空间(X,d)称为凸度量空间。

如果X是一Banach空间，其作为具$d(x,y)=\|x-y\|$的度量空间而言，由$W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$所定义的映象$W:X\times X\times I\to X$就是一凸结构。更一般而言，如果$X$是一线性空间且具有满足下述条件

$$d(\lambda x+(1-\lambda)y,0)\leqslant\lambda d(x,0)+(1-\lambda)d(y,0)$$

的平移不变度量，则X是一凸度量空间。

O. Hadzic[15]把这一概念推广到Menger空间。

设$(X,\mathscr{F},t)$是一Menger空间，一映象$W:X\times X\times I\to X$称为凸结构，如果对一切$x,y\in X$，$W(x,y,0)=y$，$W(x,y,1)=1$，而且对任意的$\lambda\in(0,1)$，$\forall\varepsilon\in\mathbf{R}^+$及$\forall u,x,y\in X$

$$F_{u,W(x,y,\lambda)}(2\varepsilon)\geqslant t\left(F_{u,x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{u,y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)$$

每一具W. Takahashi意义下的凸结构的度量空间(X,d)是一具O. Hadzic意义下的凸结构的Menger空间，另外每一概率赋范空间是一由$W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$，$\forall x,y\in X$，$\lambda\in I$所定义的凸结构的Menger空间。

三、完备概率赋范空间中的重合及不动点定理

设(X,d)是一度量空间，我们将用到以下的符号和定义：

$$CL(X)=\{A\subset X:A\text{是}X\text{的非空闭子集}\}$$

$$CB(X)=\{A\subset X:A\text{是}X\text{的非空有界闭子集}\}$$

$$C(X)=\{A\subset X:A\text{是}X\text{的非空紧子集}\}$$

对每一$A,B\in CL(X)$及$\varepsilon>0$

$$N(\varepsilon,A)=\{x\in X:d(x,a)<\varepsilon\text{对某一}a\in A\}$$

$$E_{A,B}=\{\varepsilon>0:A\subseteq N(\varepsilon,B),\ B\subset N(\varepsilon,A)\}$$

且

$$H(A,B)=\begin{cases}\inf E_{A,B}, & \text{当}E_{A,B}\neq\phi\\ +\infty, & \text{当}E_{A,B}=\phi\end{cases}$$

定义在$CL(X)$上的H称为由度量d导出的广义Hausdorff距离函数；定义在$CB(X)$上的H称为由度量d导出的Hausdorff度量。

设$(X,\mathscr{F},t)$是具连续T-范数t的概率赋范空间，如果X赋以(ε,λ)-拓扑，则X是一Hausdorff空间[11]。如果函数族$\{\Phi_n(t,x)\}_{n\in N}$在$x=1$处等度连续，其中

$$\Phi_n(t,x)=\underbrace{t(t(\cdots t}_{n\text{次}}(t(x,x),x),\cdots,x)$$

对每一$n\in N$，且$x\in[0,1]$，则X是(ε,λ)-拓扑的局部凸拓扑向量空间[11]。

设X是一拓扑向量空间，$A\subset X$。由A到其自身的映象f称为半紧的[38]，如果A中每一有界序列$\{x_n\}$使得$\{x_n-f(x_n)\}$收敛，则存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$。

下面的定义是半紧性概念推广到集值映象的情形。

定义3.1 设X是一拓扑向量空间，$A\subseteq X$。多值映象$T:A\to 2^A$称为f-半紧的，如果对A

中的每一序列$\{x_n\}$其使得对某一$y_n\in Tx_n$，$\{fx_n-y_n\}$收敛，则存在$\{fx_n\}$的收敛子列$\{fx_{n_k}\}$，其中f是由A到其自身的映象。

如果$f=i_X$（X上的恒等映象），则定义3.1中的多值映象T称为半紧的而不称i_X-紧的。

定义3.2 设X是一拓朴向量空间，$A\subseteq X$。一多值映象$T:A\to 2^A$称为在$x_0\in A$是闭的，如果对A中的每一序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$y_n\in Tx_n$，它们分别收敛于x_0和y_0，则有$y_0\in Tx_0$。

定义3.3[18] 设X是一拓扑空间，$f:X\to X$是一单值映象，$T:X\to 2^X$是一多值映象。映象f和T称为在$x_0\in X$处是可交换的，如果$fTx_0\subseteq Tfx_0$。称f和T在X上是可交换的，如果对每一$x\in X$，$fTx\subseteq Tfx$。

在证明我们的主要定理之先，我们给出下面的

定理3.1[6] 设$(X,\mathscr{F},t)$是一完备的概率赋范空间，t是连续的T-范数并使得$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$。设$A$是$X$之一非空闭子集，设$f:A\to A$是一连续映象，$S,T:A\to CL(f(A))$是满足下述条件的闭的多值映象：

(3.1) S和T在A上与f可交换，

(3.2) 对每一$u,v\in A$，$x\in Su$及$\delta>0$，存在$y\in Tv$使得对每一$\varepsilon>0$

$$F_{x-y}(\varepsilon)\geqslant F_{fu-fv}\left(\frac{\varepsilon-\delta}{q}\right)$$

其中$q\in(0,1)$。如果函数族$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处等度连续，则存在一点$z\in A$，使得$fz\in Sz$，$fz\in Tz$，即f,S,T有一公共的重合点$z\in A$。此外，如果z是f,S,T的重合点，且$f(z)$是f之一不动点。(a)如果f与S（相应地T）在z处可交换，则fz也是S（相应地T）之一不动点；(b)当f与S和T在z处可交换时，则fz是S和T的公共不动点。

定义3.4 设$(X,\mathscr{F},t)$是一Menger空间，$S,T:X\to 2^X$是多值映象。二元对(S,T)称为在$x_0\in X$处是渐近正则的，如果对X中的任一序列$\{x_n\}$及X中满足$y_n\in Sx_{n-1}\cup Tx_{n-1}$的序列$\{y_n\}$，对某一正整数$N$，当$n\geqslant N$时有

$$F_{y_n,y_{n+1}}(\varepsilon)>1-\lambda$$

在定理3.1中，如果函数族$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处的等度连续性被代之以二元对(S,T)的渐近正则性及S或T的半紧性，则有下面的定理：

定理3.2 设$(X,\mathscr{F},t)$是一完备的概率赋范空间，$t:t=\min\{a,b\}$是连续的T范数使得$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$。设$A$是$X$之一非空闭子集。设$f:A\to A$是一连续映象且$S,T:A\to CL(f(A))$是闭的多值映象满足条件(3.1)，(3.2)及下面的条件(3.3)：

(3.3) 存在一点$x_0\in X$，使得(S,T)在x_0是渐近正则的。

则存在公共的重合点$z\in A$，使得$fz\in Sz$且$f(z)\in Tz$。

定理3.3 设$(X,\mathscr{F},t)$是一完备的概率赋范空间，t是连续的T-范数使得$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$，$A$是$X$之一非空子集。设$f:A\to A$为一连续映象，$S,T:A\to CL(f(A))$为满足条件(3.1)和(3.2)的闭映象。如果$S$或$T$是$f$-半紧的，则存在公共重合点$z\in A$使得$fz\in Sz$，$fz\in Tz$。

四、具凸结构的PM-空间中的重合点定理

在本节中我们给出具如下凸结构W：

$$F_{W(x,z,\lambda),W(y,z,\lambda)}(\lambda\varepsilon)\geqslant F_{x,y}(\varepsilon) \tag{4.1}$$

$\forall x,y,z\in X$，$\varepsilon>0$，$\lambda\in(0,1)$，的PM-空间中的某些重合点定理．

如果$(X,\mathscr{F},t)$是一概率赋范空间，定义一凸结构W如下：对每一$x,y\in X$，$\lambda\in[0,1]$，

$$W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$$

因

$$F_{W(x,y,\lambda)-W(y,z,\lambda)}(\lambda\varepsilon)=F_{\lambda x+(1-\lambda)z-(\lambda y+(1-\lambda)z)}(\lambda\varepsilon)\geqslant F_{x-y}(\varepsilon)$$

故(4.1)满足．故每一概率赋范空间是具凸结构W（定义如上）的Menger空间．

事实上，下面的是一具凸结构W的PM-空间的非平凡的例子[16]：

例 设(M,d)是一可分的度量空间其具凸结构W使得对每一$\lambda\in[0,1]$，映象$(x,y)\to W(x,y,\lambda)$是连续的．设(Ω,A,P)是一概率测度空间．设S是一切由Ω到M的可测映象的空间．则$(S,\mathscr{F},T_m)$是一Menger空间[16]，其中

$$\{\omega\in\Omega:d(\xi(\omega),\eta(\omega))<\varepsilon\}\in A$$

$$F_{\xi,\eta}(\varepsilon)=P\{\omega\in\Omega:d(\eta(\omega),\xi(\omega))<\varepsilon\}$$

$$T_m(u,v)=\max\{u+v-1,0\},\quad \forall\xi,\eta\in S,\varepsilon>0,u,v\in[0,1]$$

设$\overline{W}:S\times S\times[0,1]\to S$是由$\overline{W}(\xi,\eta,\lambda)(\omega)=W(\xi(\omega),\eta(\omega),\lambda)$，$\omega\in\Omega,\xi,\eta\in S$，$\lambda\in(0,1)$所定义的映象，因$\xi$和$\eta$是可测的映象，而$W$关于$\xi,\eta\in S$是连续的映象，且$\overline{W}(\xi,\eta,\lambda)\in S$，故对每一$\varphi,\xi,\eta\in S$，$\varepsilon>0$，$\lambda\in(0,1)$有

$$F_{\varphi,\overline{W}(\xi,\eta,\lambda)}(2\varepsilon)\geqslant T_m\left(F_{\varphi,\xi}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{\varphi,\eta}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)$$

因而$(S,\mathscr{F},T_m)$是具凸结构$\overline{W}$的Menger空间．

与在赋范线性空间情形时一样，我们可以定义具凸结构W的Menger空间$(X,\mathscr{F},t)$的星形集的概念．

定义4.1 设$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的Menger空间，A是X的非空集．A称为X的星形集，如果存在一点$x_0\in A$，使得对每一$x\in X$，$\lambda\in[0,1]$，$W(x,x_0,\lambda)\in A$．点x_0称为A的星点．

定义4.2[9] 设$(X,\mathscr{F})$是一PM-空间，A是X之一非空子集．R上的由下式定义的函数D_A：

$$D_A(u)=\sup_{v<u}\ \inf_{p,q\in A}\ F_{p,q}(v)$$

称为A的概率直径．A称为概率有界的，如果$\sup\limits_{u\in R}D_A(u)=1$．

定义4.3[2] 一PM-空间$(X,\mathscr{F})$称为概率准紧的，如果对每一$\varepsilon>0$和每一$\lambda>0$，存在X之一有限覆盖$\{A_i\}_{i\in I}$，$X\subset\bigcup\limits_{i\in I}A_i$，$I$为有限集，使得$D_{A_i}(\varepsilon)>1-\lambda$，这里$D_{A_i}(\varepsilon)$为$A_i$的概率直径．

如所周知，如果$(X,\mathscr{F},t)$是具T-范数t的并使得$\sup\limits_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$的Menger空间，则集合

$$U(\varepsilon,\lambda)=\{(p,q)\in X\times X:F_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

的族ν是X上的一致性基$\mathscr{U}$．

定理4.1[2] 设$(X,\mathscr{F},t)$是一Menger空间，t是一T-范数，使得$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$．则$(X,\mathscr{F},t)$是概率准紧的，当且仅当$X$关于$X$上的一致基$\mathscr{U}$是准紧的．

定义4.4[16] 设$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的Menger空间，$x_0\in X$．一映象$f:X\to X$称为(W,x_0)-凸的，如果对每一$z\in X$及每一$\lambda\in(0,1)$，

$$f(W(z_0,x_0,\lambda))=W(fz,x_0,\lambda)$$

定理4.2 设$(X,\mathscr{F},t)$是一完备的Menger空间，其具有凸结构W，t是一连续的T-范数使得$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$．设$A$是$X$之一非空的闭星形子集．设$f:A\to A$是连续的$(W,x_0)$-凸映象，$S,T:A\to CL(f(A))$是一闭的多值映象满足条件(3.1)及下面的条件：

(4.2)　$S(A)$和$T(A)$是概率准紧的；

(4.3)　$\bigcup_{z\in Sx}fz=Sfx$，$\bigcup_{z\in Tx}fz=Tfx$，$\forall x\in A$；

(4.4)　对每一u，$v\in A$，$x\in Su$及$\delta>0$，存在$y\in Tv$使得对任意的$\varepsilon>0$

$$F_{x,y}(\varepsilon)\geqslant F_{fu,fv}(\varepsilon-\delta)$$

则f,S,T在X中有一公共的重合点z，而且当z是f,S和T之一公共重合点，fz是f之一不动点时，(a)如果f与S（相应地T）在z处可交换，则fz也是S（相应地T）之一不动点；(b)如果f与S和T在z都可交换，则fz是S和T之一公共不动点．

证　设x_0是A之一星点，$\{\lambda_n\}$是$(0,1)$中的当$n\to\infty$时收敛于1的序列．对每一$n\in N$，定义多值映象S_n，$T_n:A\to CL(A)$如下：

$$S_nx=\bigcup_{z\in Sx}W(z,x_0,\lambda_n)$$

$$T_nx=\bigcup_{z\in Tx}W(z,x_0,\lambda_n)$$

则对每一$x\in A$有

$$S_nx=\bigcup_{z\in Sx}W(z,x_0,\lambda_n)\subset A$$

且

$$T_nx=\bigcup_{z\in Tx}W(z,x_0,\lambda_n)\subset A$$

因$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的Menger空间，故映象$W:X\times X\times[0,1]\to X$关于第一变量连续．因$Sx$和$Tx$是闭的，故它们分别是$S(A)$和$T(A)$的紧子集，因而对每一$n\in N$，$W(Sx,x_0,\lambda_n)$和$W(Tx,x_0,\lambda_n)$是闭的．从而对每一$x\in A$，$S_nx$和$T_nx$都是闭的．

现证：对每一$n\in N$，映象S_n和T_n满足条件：

(1)　S_n和T_n在A上与f可交换；

(2)　S_n或T_n是f-半紧的；

(3)　对每一$u,v\in A$，$x\in S_nu$及$\varepsilon>0$，存在$y\in T_nv$使得对每一$\varepsilon>0$，

$$F_{x,y}(\varepsilon)\geqslant F_{fu,fv}\left(\frac{\varepsilon-\delta}{\lambda_n}\right)$$

事实上，因条件(5.3)成立，而且f是(W,x_0)凸的，故

$$\begin{aligned}fS_nx&=f\left(\bigcup_{z\in Sx}W(z,x_0,\lambda_n)\right)=\bigcup_{z\in Sx}f(W(z,x_0,\lambda_n))\\&=\bigcup_{z\in Sx}W(fz,x_0,\lambda_n)=\bigcup_{y\in fSx}W(y,x_0,\lambda_n)\\&=\bigcup_{y\in Sfx}W(y,x_0,\lambda_n)=S_nfx\end{aligned}$$

故S_n与f可交换．类似可证，T_n与f也可交换．这就完成结论(1)的证明．

下证结论(2)．因$S(A)$是概率准紧的，故对任意的$\varepsilon>0$和$\lambda\in(0,1)$，存在$S(A)$的有限覆盖$\{A_i\}_{i\in I}$，I为有限集，使得$D_{A_i}(\varepsilon)>1-\lambda$，$i\in I$，其中$D_A(x)=\sup_{t<x}\inf_{p,q\in A}F_{p,q}(t)$．由此得知$S(A)$是$X$的一概率有界集．类似可证$T(A)$也是$X$之一概率有界集．因$S(A)$和$T(A)$是概率准紧的，故由定理4.1知，它们关于度量$d$是准紧的，$d$度量化由$(\varepsilon,\lambda)$-拓朴生成的$X$的一致基$\mathscr{U}$．故$\overline{S(A)}$和$\overline{T(A)}$是紧的．因$W$关于第一变量连续，故$S_n(A)=W(S(A),x_0,\lambda_n)$，$T_n(A)=W(T(A),x_0,\lambda_n)$皆为相对紧的．

设$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是X中的序列，使得$y_n\in S_nx_n$且对每一$\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,y_n}(\varepsilon)=1$．于是存在

$\{y_n\}$的收敛子列$\{y_{n_k}\}$。设$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=z$。由不等式

$$F_{x_{n_k},z}(\varepsilon)\geqslant t\left(F_{x_{n_k},y_{n_k}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{y_{n_k},z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

得知$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=z$，此即$S_n$是$f$-半紧的。类似可证$T_n$也是$f$-半紧的。

最后，为了证明(3)，设u，$v\in A$，$x\in S_n u$且$\delta>0$，则存在一点$z\in Su$使得$x=W(z,\ x_0,\ \lambda_n)$。由条件(4.4)，存在点$y'\in Tv$使得对每一$\varepsilon'>0$

$$F_{z,y'}(\varepsilon')\geqslant F_{fu,fv}\left(\varepsilon'-\frac{\delta}{k}\right)$$

设$y=W(y',x_0,\ \lambda_n)\in T_n v$，则有

$$F_{x,y}(\varepsilon)=F_{W(z,x_0,\lambda_n),W(y',x_0,\lambda_n)}\left(k_n\frac{\varepsilon}{k_n}\right)$$

$$\geqslant F_{z,y'}\left(\frac{\varepsilon}{k_n}\right)\geqslant F_{fu,fv}\left(\frac{\varepsilon-\delta}{k_n}\right)$$

故完成(3)的证明。

于是由定理4.3，对每一$n\in N$，存在一点$x_n\in X$，使得$fx_n\in S_n x_n$且$fx_n\in T_n x_n$。

因 $fx_n\in S_n x_n=\bigcup_{z\in Sx_n}W(z,x_0,\lambda_n)$， $n\in N$

且对某一$z_n\in Sx_n$，$fx_n=W(z_n,x_0,\lambda_n)$，于是有

$$F_{fx_n,z_n}(\varepsilon)=F_{z_n,W(z_n,x_0,\lambda_n)}(\varepsilon)$$

$$\geqslant t\left(F_{z_n,z_n}\left(\frac{\varepsilon}{2\lambda_n}\right)\right),F_{z_n,x_0}\left(\frac{\varepsilon}{2(1-\lambda_n)}\right)$$

$$=F_{z_n,x_0}\left(\frac{\varepsilon}{2(1-\lambda_n)}\right) \tag{4.5}$$

因$S(A)$是概率有界的，故对每一$z\in S(A)$和$\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}F_{z_n,z}\left(\frac{\varepsilon}{4(1-\lambda_n)}\right)=1$$

对每一$\varepsilon>0$，因为

$$F_{z_n,x_0}\left(\frac{\varepsilon}{2(1-\lambda_n)}\right)\geqslant t\left(F_{z_n,z}\left(\frac{\varepsilon}{4(1-\lambda_n)}\right),F_{z,x_0}\left(\frac{\varepsilon}{4(1-\lambda_n)}\right)\right)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}F_{z,x_0}\left(\frac{\varepsilon}{4(1-\lambda_n)}\right)=1$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}F_{z_n,x_0}\left(\frac{\varepsilon}{2(1-\lambda_n)}\right)=1$$

可是由(4.5)有

$$\lim_{n\to\infty}F_{fx_n,z_n}(\varepsilon)=1 \tag{4.6}$$

因为$z_n\in Sx_n$且$\overline{S(A)}$是紧的，故存在$\{z_n\}$的收敛子列$\{z_{n_k}\}$。令$\lim\limits_{k\to\infty}z_{n_k}=z$。于是由 (4.5)及不等式

$$F_{fx_n,z}(\varepsilon)\geqslant t\left(F_{fx_{n_k},z_{n_k}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),F_{z_{n_k},z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

得知$\lim\limits_{k\to\infty}fx_{n_k}=z$。因$fz_{n_k}\in fSx_{n_k}\subseteq Sfx_{n_k}$，$f$连续且$S$是闭的，故$fz\in Sz$。同理可证$fz\in Tz$。

此即z是f,S和T之一公共重合点．

最后，如果假定$u=fz$是f之一不动点，则有$u=fu=ffz\in fSz$．如果f与S在z处可交换，则$fSz\subseteq Sfz=Su$，故$u\in Su$．同理，如果f与T在z处可交换，则$u\in Tu$．证毕．

在定理4.2中，如果$f=i_X$，则有下面的

推论4.3　设$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的完备的Menger空间，t是满足$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$的连续T-范数．设$A$是$X$之一非空闭的星形子集，设$S,T:A\to CL(A)$是满足条件(4.2)和(4.4)的闭的多值映象．则S和T在X中有公共不动点．

利用定理4.2我们有下面的定理

定理4.4　设$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的完备的Menger空间，t是一连续的T-范数使得$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处是等度连续的，而且$\sup\limits_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$．设$A$是$X$之一非空闭的星形集．设$f:X\to X$是一连续的$(W,x_0)$-凸映象．设$S,T:A\to C(f(A))$是一闭的多值映象且满足条件(3.1)，(4.3)，(4.4)及下面的条件(4.7)：

(4.7)　$\overline{S(A)}$和$\overline{T(A)}$是有界的．

如果S或T是f-半紧的，则f,S和T在X中有一公共的重合点．

证　与在定理4.2的证明中一样，对每一$n\in N$，及对每一$x\in A$，我们定义

$$S_n(x)=\bigcup_{z\in Sx}W(z,x_0,k_n)$$

$$T_n(x)=\bigcup_{z\in Tx}W(z,x_0,k_n)$$

因Sx和Tx是紧的，故S_nx和T_nx是闭的．因函数族$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处是等度连续的，故S_n和T_n满足定理4.2的所有条件．因而对每一$n\in N$，存在$x_n\in A$使得$fx_n\in S_nx_n$且$fx_n\in T_nx_n$．因$S(A)$是有界的，故得

$$\lim_{n\to\infty}F_{fx_n,z_n}(\varepsilon)=1,\qquad \forall\varepsilon>0$$

其中$z_n\in Sx_n$．

因映象S是f-半紧的，故存在$\{z_n\}$之一收敛子序列$\{z_{n_k}\}$．若$\lim\limits_{k\to\infty}z_{n_k}=z$，则如在定理4.2的证明中一样，有$\lim\limits_{k\to\infty}fx_{n_k}=z$．因$fz_{n_k}\in fSx_{n_k}\subseteq Sfx_{n_k}$，$f$连续且$S$是闭的，故有$fz\in Sz$．同理可证$fz\in Tz$．此即$z$是$f,S,T$之一公共的重合点．定理证毕．

利用$f=i_X$时的定理4.4，可得下面的

推论4.5　设$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的完备的Menger空间，t是一连续的T-范数使得函数族$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处是等度连续的且$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$．设$A$是$X$的非空闭的星形子集．设$S,T:A\to C(A)$是满足条件(4.4)和(4.7)的多值映象．如果$S$或$T$是半紧的，则$S$和$T$在$X$中有公共的不动点．

在定理4.4中，如果我们代$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处的高度连续性以二元对(S,T)的渐近正则性，则定理4.4也是对的．

定理4.6　设$(X,\mathscr{F},t)$是具凸结构W的完备的Menger空间，t是一连续的T-范数使得$\sup_{x<1}t(x,x)\leqslant 1$．设$A$是$X$之一非空闭的星形集．设$f:X\to X$是一连续的$(W,x_0)$-凸映象，设$S,T:A\to C(f(A))$是闭的多值映象且满足条件(3.1)，(3.3)，(4.3)，(4.4)及(4.7)．如果S或T是f-半紧的，则f,S和T在X中有公共的重合点．

五、度量空间中的重合点定理

在本节中，我们利用第四节中的某些结果，在度量空间和Banach空间中证明几个重合点定理。

注 (1)每一具凸结构的度量空间是一具凸结构的Menger空间。事实上，设(X,d)是具凸结构$W:X\times X\times[0,1]\to X$的度量空间。设$W$满足条件：

对任意的$x,y,u\in X$，$\lambda\in[0,1]$

$$d(u,W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y) \tag{5.1}$$

如果我们有

$$F_{u,v}(x)=\begin{cases}0, & \text{当} d(u,v)\geqslant x\\ 1, & \text{当} d(u,v)<x\end{cases}$$

则$(X,\mathscr{F},t)$是一Menger空间，其中$t(a,b)=\min\{a,b\}$。下面我们证明对任意的$x,y,u\in X$，$\varepsilon>0$，$\lambda\in(0,1)$

$$F_{u,W(x,y,\lambda)}(2\varepsilon)\geqslant t\left(F_{u,x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{u,y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)$$

设 $F_{u,x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)=1$，$F_{u,y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)=1$

则有 $d(u,x)<\frac{\varepsilon}{\lambda}$，$d(u,y)<\frac{\varepsilon}{1-\lambda}$

故由(5.1)可得

$$d(u,W(x,y,\lambda))<\lambda\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}+(1-\lambda)\cdot\frac{\varepsilon}{1-\lambda}=2\varepsilon$$

上式表明

$$F_{u,W(x,y,\lambda)}(2\varepsilon)=1=t\left(F_{u,x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{u,y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)$$

如果 $t\left(F_{u,x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{u,y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)=0$

由 $F_{u,W(x,y,\lambda)}(2\varepsilon)\geqslant 0$

得知：对任意的$x,y,u\in X,\varepsilon>0$，$\lambda\in(0,1)$有

$$F_{u,W(x,y,\lambda)}(2\varepsilon)\geqslant t\left(F_{u,x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{u,y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)$$

由(5.1)，如果令$\lambda=0$，$u=y$；$\lambda=1$，$u=x$，则我们分别有$W(x,y,0)=y$，$W(x,y,1)=x$。

(2) 每一概率赋范空间是一具由下式定义的凸结构W的Menger空间，$W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$，$\forall x,y\in X$，$\lambda\in[0,1]$。事实上，

$$\begin{aligned}F_{u,W(x,y,\lambda)}(2\varepsilon)&=F_{u-(\lambda x+(1-\lambda)y)}(2\varepsilon)\\&=F_{\lambda(u-x)+(1-\lambda)(u-y)}(2\varepsilon)\\&\geqslant t\left(F_{u-x}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right),\ F_{u-y}\left(\frac{\varepsilon}{1-\lambda}\right)\right)\end{aligned}$$

定理5.1 设(X,d)是具满足下述条件的凸结构W的完备度量空间：对任意的$x,y,z\in X$及$\lambda\in[0,1]$，$d(W(x,z,\lambda),W(y,z,\lambda))\leqslant\lambda d(x,y)$。设$A$是$X$之一非空闭的星形子集；$f:A$

$\to A$是一连续的(W,x_0)-凸映象，$S,T:A\to C(A)$是一闭的多值映象，其满足条件(4.3)及下面的条件：

(5.2) $S(A)$和$T(A)$是有界的；

(5.3) S和T与f可交换；

(5.4) 对任意的$u,v\in A$，$H(Su,Tv)\leqslant d(fu,fv)$.

如果S或T是f-半紧的，则f,S和T在X中有一公共的重合点.

证 设(X,d)是一完备的度量空间，其具凸结构W满足条件：对任意的$x,y,z\in X$，$\lambda\in[0,1]$，

$$d(W(x,z,\lambda),\ W(y,z,\lambda))\leqslant\lambda d(x,y)$$

则$(X,\mathscr{F},t)$是一完备的Menger空间，则具凸结构W满足条件(4.1)，这里

$$t(a,b)=\min\{a,b\}$$

且

$$F_{x,y}(e)=\begin{cases}1, & \text{当}d(x,y)<e\\ 0, & \text{当}d(x,y)\geqslant e\end{cases}$$

另外，对T-范数$t=\min$，函数族$\{\Phi_n(t,x)\}$在$x=1$处是等度连续的，由Hausdorff度量H的定义，得知对任意的$u,v\in A$，$\delta>0$及$x\in Su$，存在$y\in Tv$使得$d(x,y)<d(fu,fv)+\delta$. 此式表明：如果$d(fu,fv)<e-\delta$，则$d(x,y)<e$. 故由上面关于映象F的定义知条件(4.4)成立. 故由定理4.4，f，S和T在X中有公共的重合点.

引用$f=i_X$时的定理5.1，我们有下面的

推论5.2 设X是一Banach空间，A是X之一非空闭的星形集. 设$S,T:A\to C(A)$是满足下述条件的闭的多值映象：

(5.5) $S(A)$，$T(A)$是有界的；

(5.6) 对任意的$x,y\in A$，$H(Sx,Ty)\leqslant\|x-y\|$.

如果$(I-S)(A)$或$(I-T)(A)$是闭的，则S和T在X中有一公共的不动点.

证 因X是一Banach空间，故可把它看成具度量$d(x,y)=\|x-y\|$的完备度量空间(x,d). X上的凸结构$W:X\times X\times I\to X$由$W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$定义. 在每一赋范空间$X$中，条件$d(W(x,z,\lambda),\ W(y,z,\lambda))\leqslant\lambda d(x,y)$总是满足的. 故由定理5.1 S和T在X中有一公共的不动点.

推论5.3 设X是一Banach空间，A是X之一弱闭的星形子集. 设$S:A\to C(A)$是满足下述条件的多值映象：

(5.7) $S(A)$是有界的；

(5.8) 对任意的$x,y\in A$，$H(Sx,Sy)\leqslant\|x-y\|$. 如果$(I-S)(A)$是闭的，则S在X中有不动点.

致谢 第三、四位作者感谢1990年度韩国教育部基础科学研究学会基金的资助.

参 考 文 献

[1] Bharucha-Reid, A. T., Fixed point theorems in probabilistic analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82 (1976), 641—657.

[2] Bocsan, Gh. and Gh. Constantin, The Kuratowski function and some application to probabilistic metric spaces, *Atti Acad. Naz. Lincei*, 55 (1973), 235—240.

[3] Bocsan, Gh., On some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, *Math. Balkanica*, 4 (1974), 67—70.

[4] Cain, G. L., Jr. and R. H. Kasricl, Fixed and periodic points of local contraction mappings on probabilistic metric spaces, *Math. Systems Theory*, 9 (1976), 289—297.

[5] Chang, S. S., Fixed point theorem of mappings on probabilistic metric spaces with application, *Scientia Sinica (Series A)*, 26 (1983), 1144—1155.

[6] Cho, Y. J., W.T. Park, K. S. Park and J. K. Kim, Coïndence point theorems in probabilistic metric spaces, *Kobe Math. J.* (to appear)

[7] Ciric, Lj. B., On fixed points of generalized contraction on probabilistic metric spaces, *Publ. Inst. Math. (Beograd)(N. S.)*, 18(32) (1975), 71—78.

[8] Ding Xie-ping, Common fixed points non-expansive type mappings in convex and probabilistic convex metric spaces, *Review of Research, Faculty of Science, Mathematics Series, Univ. of Novi Sad*, 16(1) (1986), 73—84.

[9] Egbert, R. J., Products and quotients of probabilistic metric spaces, *Pacific J. Math.*, 24 (1968), 437—455.

[10] Hadzic, O. and M. Budincevic, A class of T-norm in the fixed point theory on probabilistic metric spaces, *Zb. rad. Prir. -mat. fak., Univ. of Novi Sad*, 9 (1979), 37—41.

[11] Hadzic, O., A fixed point theorem in probabilistic locally convex spaces, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, 23 (1978), 735—744.

[12] Hadzic, O., On common fixed points in metric and probabilistic metric spaces with convex structures, *Zb. rad., Prir.-mat. fak., Univ. of Novi Sad*, 14 (1980), 13—24.

[13] Hadzic, O.,Some fixed point and almost fixed point theorems for multi-valued mapping sin topological vector space, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 5 (1981), 1009—1019.

[14] Hadzic, O., Some theorems on the fixed points in probabilistic metric and random normed spaces, *Boll. Un Mat. Ital.*, *B*18(5) (1981), 1—11.

[15] Hadzic, O., On coincidence points in metric and probabilistic metric spaces with a convex structure, *Zb. rad., Prir.-mat. fak., Univ. of Novi Sad*, 15(1) (1985), 11—22.

[16] Hadzic, O., Fixed point theorems for multi-valued mappings in probabilistic metric spaces with a convex structure, *Zb. rad., Prir. -mat. fak., Univ. of Novi Sad*, 17(1) (1987), 39—51.

[17] Istratescu, V.I. and I. Sacuiu, Fixed point theorems for contraction mappings on probabilistic metric spaces, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 18 (1973), 1375—1380.

[18] Itoh, S. and W. Takahashi, Single-valued mappings, multi-valued mappings and fixed point theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, 59 (1977), 514—521.

[19] Machado, H.V., A characterization of convex subsets of normed spaces, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 25 (1973), 307—320.

[20] Menger, K., Statistical metric, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 28 (1942), 535—537.

[21] Naimpally, S. A., K. L. Singh and J. H.M. Whitfield, Common fixed points for nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings, *Comm. Math. Univ. Carolinae*, **24**(2) (1983), 287—300.

[22] Radu, V., On the t-norms of Hadzic type and fixed points in probabilistic metric spaces, *Sem. Teoria Prob. Apl., Timisoara*, (66) (1983).

[23] Radu, V., On the t-norms of Hadzic type and locally convex random normal spaces, *Sem. Teoria Probl. Apl., Timisoara*, (70) (1984).

[24] Radu, V., On some fixed points theorems in probabilistic metric spaces, *Sem. Teoria Prob. Apl., Timisora*, (74) (1985).

[25] Rhoades, B. E., K. L. Singh and J. H. M. Whitfield, Fixed points for generalized nonexpansive mappings, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **23**(3) (1982), 443—451.

[26] Schweizer, B. and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 313—334.

[27] Schweizer, B., A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metrics spaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 673—675.

[28] Schweizer, B. and A. Sklar, Probabilistic metric spaces, *Noth-Holland Series in Probability and Applied Mathematics*, **5** (1983).

[29] Sherwood, H., Complete probabilistic metric spaces 2, *Wahrsch. Verw Gebiete*, **29** (1971), 117—128.

[30] Singh, K. L. and J. H. M. Whitfield, Fixed points for left reversible semigroups in convex metric spaces. (Preprint).

[31] Singh, S. L. and B. D. Pant, Coincidence and fixed point theorems for a family of mappings on Menger spaces and extension to uniform spaces, *Math. Japon*, **33**(6) (1988), 957—973.

[32] Stojakovic, M., Common fixed point theorems in complete metric and probabilistic metric spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **36** (1987), 73—88.

[33] Takahashi, W., Fixed point theorems for amenable semigroup of nonexpansive mappings, *Kodai Math. Sem. Rep*, **21** (1969), 383—386.

[34] Takahashi, W., A convexity in metric space and nonexpansive mappings I, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **22** (1970), 142—149.

[35] Tallman, L. A., Fixed points for condensing multi-functions in metric spaces with convex structures, *Kodai Math. Sem. Rep*, **29** (1977), 62—70.

[36] Tan, D. H., On probabilistic densifying mappings, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **26** (1981), 1305—1317.

[37] Tan, N. X., Generalized probabilistic metric spaces and fixed point theorems, *Math. Nachr.*, **129** (1986), 205—218.

[38] Zeidler, E., *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I*, Fixepunktsätze, Teubner-Texte zur Mathematik (1976).

Coincidence Point Theorems in Probabilistic Metric Spaces with a Convex Structures

Wee Tae Park Keun Saeng Park Yeol Je Cho

(*Department of Mathematics, Gyeongsang National University, Chinju* 660—701, *Korea*)

Jong Kyu Kim

(*Department of Mathematics, Kyungnam University, Masan* 630—701, *Korea*)

Abstract

In this paper, we draw some coincidence and common fixed point theorems for nonlinear hybrid contraction mappings on probabilistic metric spaces with a convex structure.

Key words probabilistic metric spaces, a convex structure, commuting mappings, coincidence and common fixed points