

# Mindlin 板几何非线性分析的 附加内部剪应变法\*

焦兆平 吴长春 卞学镛

(广州 华南建设学院(西院)) (中国科技大学) (美国麻省理工学院)  
(1993年 7 月20日收到)

## 摘 要

本文在几何非线性分析的 Mindlin 板元中引入单元附加内部剪应变, 有效地解决了薄板情况下的剪切自锁问题。文中导出了相应的能量相容条件, 给出了有限元非线性列式的全过程及有关薄板及中厚板大挠度问题的数值结果。

**关键词** 内部剪应变 几何非线性 剪切自锁 相容条件

## 一、引 言

以横向挠度  $w$  和转角  $\theta$  作为独立变量的 Mindlin 板元由于其有限元列式简单, 精度高以及可通用于厚、薄板等优点而在结构分析中得到广泛运用。但在薄板情况下 Mindlin 板元一般会出现剪切自锁 (shear locking) 现象。关于剪切自锁的机理以及如何解决已有很多讨论<sup>[1~4]</sup>。本文作者的工作表明, 附加单元内部自由度不仅可以构造出品质优秀的非协调元, 而且可以有效地用来克服 Mindlin 板元的剪切自锁。本文将这一方法实施于 Mindlin 板的大挠度分析, 导出了相应的能量相容条件并给出有限元非线性列式的全过程。

## 二、大挠度 Mindlin 板的基本方程与薄板的剪切自锁

采用 Total Lagrange 型描述方法, 与 Mindlin 板相应的 Green 应变为:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= u_{,x} + [(u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2]/2 \\ e_y &= v_{,y} + [(u_{,y})^2 + (v_{,y})^2 + (w_{,y})^2]/2 \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} + u_{,x}u_{,z} + v_{,x}v_{,z} + w_{,x}w_{,z} \\ \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y} + u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z} + w_{,y}w_{,z} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

\* 国家教委优秀教师基金和博士点基金资助课题。

在Mindlin板理论中,板内任一点的位移可由五个独立的中面位移 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \theta_x, \theta_y$  (正向规定见图1)表示成:

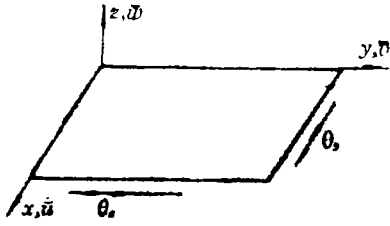


图 1

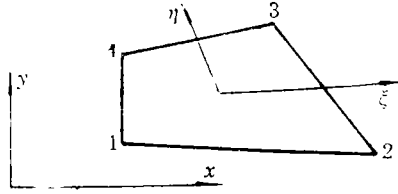


图 2

$$u = \bar{u} - z\theta_x; \quad v = \bar{v} - z\theta_y; \quad w = \bar{w} \quad (2.2)$$

另一方面,参照von Kármán大挠度理论,(2.1)式中所有 $u, v$ 的导数二次项均可略去不计<sup>[6]</sup>,于是将(2.2)代入(2.1)后得:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} \\ \bar{v}_{,x} + \bar{u}_{,y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\bar{w}_{,x})^2 \\ (\bar{w}_{,y})^2 \\ 2\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{y,x} + \theta_{x,y} \end{Bmatrix} = \epsilon^p + \epsilon^b \quad (2.3a)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_{,x} - \theta_x \\ \bar{w}_{,y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \epsilon^s \quad (2.3b)$$

单元应变能可表示为:

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_{A_1} \int_{-t/2}^{t/2} \left\{ \begin{matrix} \epsilon^p + \epsilon^b \\ \epsilon^s \end{matrix} \right\}^T \mathbf{s} \left\{ \begin{matrix} \epsilon^p + \epsilon^b \\ \epsilon^s \end{matrix} \right\} dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{A_1} (\mathbf{e}_1^T \mathbf{s}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^T \mathbf{s}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3^* \mathbf{s}_3 \mathbf{e}_3^*) dA \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中膜应变 $\mathbf{e}_1$ 、弯扭应变 $\mathbf{e}_2$ 和横向剪切应变 $\mathbf{e}_3^*$ 分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} \\ \bar{v}_{,x} + \bar{u}_{,y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (\bar{w}_{,x})^2 \\ (\bar{w}_{,y})^2 \\ 2\bar{w}_{,x}\bar{w}_{,y} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{e}_2 &= - \begin{Bmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{y,x} + \theta_{x,y} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^* = \begin{Bmatrix} \bar{w}_{,x} - \theta_x \\ \bar{w}_{,y} - \theta_y \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

以及:

$$\mathbf{s}_1 = \frac{Et}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{t^2}{12} \mathbf{s}_1, \quad \mathbf{s}_3 = \frac{kEt}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

式中 $E$ 为杨氏弹性模量, $\mu$ 为泊松比, $t$ 为板厚, $k$ 为剪应力修正系数,本文计算中取 $k=5/6$ .

为简化书写,以下讨论中将 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 改记为 $u, v, w$ .另外我们还约定在单元分析中 $\mathbf{q}$ 连

解为单元结点位移向量 $q^{(e)}$ ，而在整体分析中 $q$ 理解为结构的总结点位移向量。

图2所示四结点等参元的 $u, \theta, w$ 可用双线性场表示成：

$$u = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q_i = N_u q \quad (2.7a)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} q_i = N_\theta q \quad (2.7b)$$

$$w = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} q_i = N_w q \quad (2.7c)$$

式中： $N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)/4$ ， $q_i = [u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T$

在极薄板情况下，(2.4)式中的剪切刚度系数远大于弯扭刚度系数，如下的Kirchhoff约束条件将得以实现：

$$e_i^* = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = dw - \theta = 0 \quad (2.8)$$

对于(2.7)式所给 $w, \theta$ 场，Kirchhoff约束将迫使包括常曲率在内的 $\theta$ 场中的许多转角位移模式（以下称这些模式为自锁转角模式——LRM）趋于零值，即单元出现自锁现象。

### 三、附加内部剪应变的大挠度Mindlin板元列式

为避免在薄板情况下出现自锁，我们引入单元内部剪应变 $\gamma_\lambda$ ，相应地将Kirchhoff约束条件表示为：

$$dw - \theta + \gamma_\lambda = 0 \quad (3.1)$$

显然，若 $\gamma_\lambda$ 包含 $\theta$ 场中某一个LRM，则(3.1)式约束将不会导致 $\theta$ 场中该模式系数趋于零值。于是为了将薄板情况下 $\theta$ 场中某些转角模式从自锁状态下“释放”出来，只需在 $\gamma_\lambda$ 中包含有相应的LRM即可。对应于双线性试解组(2.7)，不难证明，为释放 $\theta$ 场中全部剪切不相容自由度，一般情况下必须取：

$$\gamma_\lambda = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \lambda = N_\lambda \lambda \quad (3.2)$$

为减少凝聚 $\lambda$ 的计算量，在某些情况下可以减少(3.2)式自由度而不影响自由度的释放。对于矩形元， $\gamma_\lambda$ 可简化为：

$$\gamma_\lambda = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \eta & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \lambda = N_\lambda \lambda \quad (3.3)$$

记：

$$A = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 & w_{,y} \\ 0 & w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix}^T, \quad c = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = (d \ N_w) q = pq \quad (3.4)$$

则可将各类应变表示成：

解为单元结点位移向量 $q^{(e)}$ ，而在整体分析中 $q$ 理解为结构的总结点位移向量。

图2所示四结点等参元的 $u$ ,  $\theta$ ,  $w$ 可用双线性场表示成:

$$u = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q_i = N_u q \quad (2.7a)$$

$$\theta = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} q_i = N_\theta q \quad (2.7b)$$

$$w = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} q_i = N_w q \quad (2.7c)$$

式中:  $N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)/4$ ,  $q_i = [u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T$

在极薄板情况下, (2.4)式中的剪切刚度系数远大于弯扭刚度系数, 如下的Kirchhoff约束条件将得以实现:

$$e_i^* = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = dw - \theta = 0 \quad (2.8)$$

对于(2.7)式所给 $w$ ,  $\theta$ 场, Kirchhoff约束将迫使包括常曲率在内的 $\theta$ 场中的许多转角位移模式(以下称这些模式为自锁转角模式——LRM)趋于零值, 即单元出现自锁现象。

### 三、附加内部剪应变的大挠度Mindlin板元列式

为避免在薄板情况下出现自锁, 我们引入单元内部剪应变 $\gamma_\lambda$ , 相应地将Kirchhoff约束条件表示为:

$$dw - \theta + \gamma_\lambda = 0 \quad (3.1)$$

显然, 若 $\gamma_\lambda$ 包含 $\theta$ 场中某一个LRM, 则(3.1)式约束将不会导致 $\theta$ 场中该模式系数趋于零值。于是为了将薄板情况下 $\theta$ 场中某些转角模式从自锁状态下“释放”出来, 只需在 $\gamma_\lambda$ 中包含有相应的LRM即可。对应于双线性试解组(2.7), 不难证明, 为释放 $\theta$ 场中全部剪切不相容自由度, 一般情况下必须取:

$$\gamma_\lambda = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \xi & 0 & \eta & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \lambda = N_\lambda \lambda \quad (3.2)$$

为减少凝聚 $\lambda$ 的计算量, 在某些情况下可以减少(3.2)式自由度而不影响自由度的释放。对于矩形元,  $\gamma_\lambda$ 可简化为:

$$\gamma_\lambda = \begin{bmatrix} \xi & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \eta & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \lambda = N_\lambda \lambda \quad (3.3)$$

记:

$$A = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 & w_{,y} \\ 0 & w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix}^T, \quad c = \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = (d \ N_w) q = pq \quad (3.4)$$

则可将各类应变表示成:

其中:

$$\mathbf{K}_T = \sum_{(\sigma)} \mathbf{K}_T^{(\sigma)} = \sum_{(\sigma)} (\bar{\mathbf{K}}^{(\sigma)} + \mathbf{K}_\sigma^{(\sigma)}) \quad (3.15)$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(\sigma)} = \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{s}_i \bar{\mathbf{B}}_i dA \quad (3.16)$$

$$\mathbf{K}_\sigma^{(\sigma)} d\mathbf{q} = \sum_{i=1}^3 \int_{A_i} d\bar{\mathbf{B}}_i^T \sigma_i dA = \int_{A_i} d\bar{\mathbf{B}}_i^T \sigma_i dA \quad (3.17)$$

不难求出:

$$\mathbf{K}_\sigma^{(\sigma)} = \int_{A_i} \mathbf{p}^T \mathbf{M} \mathbf{p} dA \quad (3.18)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} N_x \mathbf{l}_2 & N_{xy} \mathbf{l}_2 \\ N_{xy} \mathbf{l}_2 & N_y \mathbf{l}_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{l}_2$ 为 $2 \times 2$ 单位矩阵。在迭代过程中, 收敛判据取为:

$$(\Delta \mathbf{q}_n^T \Delta \mathbf{q}_n)^{1/2} / [(\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)^T (\mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_n)]^{1/2} < 0.01$$

#### 四、附加内部剪应变的大挠度Mindlin板元的收敛条件

将总势能表达式(3.6)改用张量表示, 记:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij}^1 &= (u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i} w_{,j}) / 2, \quad \varepsilon_{ij}^2 = (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) / 2 \\ \varepsilon_i^3 &= w_{,i} - \theta_i + \gamma_{\lambda i}, \quad N_{ij} = s_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^1 \\ M_{ij} &= -s_{ijkl}^2 \varepsilon_{kl}^2, \quad Q_i = [kEt/2(1+\mu)] \varepsilon_i^3 = \alpha \varepsilon_i^3 \end{aligned} \right\} \quad (i, j=1, 2) \quad (4.1)$$

则对满足了全部几何边界条件的弹性系统, 其总势能为:

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} \int_{A_i} (\varepsilon_{ij}^1 s_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^1 + \varepsilon_{ij}^2 s_{ijkl}^2 \varepsilon_{kl}^2 + \varepsilon_i^3 \alpha \varepsilon_i^3 - 2 p_x \cdot w) dA \right. \\ \left. + \int_{S_\sigma} (M_{ij} l_j \theta_i - \bar{Q}_i l_i w) dS \right] \quad (4.2) \end{aligned}$$

式中 $p_x$ 为横向分布荷载密度,  $M_{ij}$ ,  $\bar{Q}_i$ 为单元应力边界 $S_\sigma$ 上的已知外力,  $l_i$ 为 $S_\sigma$ 的外法矢方向余弦。为简单起见, (4.2)式中没有对不同应力边界作具体划分, 但在以下导出的欧拉方程中并不难看出各自对应的是哪种应力边界。

注意到除 $\gamma_{\lambda i}$ 外, 位移场 $u_i$ ,  $w$ 及 $\theta_i$ 对相邻单元都是协调的, 于是对(4.2)式进行变分运算后得到:

$$\delta \Pi = \sum_{\sigma} \left[ \int_{A_i} (N_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^1 - M_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^2 + Q_i \delta \varepsilon_i^3 - p_x \delta w) dA \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{S_\sigma} (\bar{M}_{i,j} l_j \delta \theta_i - \bar{Q}_i l_i \delta w) dS \Big] \\
= & \sum_{(a)} \int_{A_i} [(-N_{i,j})_{,j} \delta u_i - (N_{i,j} w_{,i})_{,j} \delta w + M_{i,j} \delta \theta_i \\
& - Q_{i,i} \delta w - Q_i \delta \theta_i + Q_i \delta \gamma_{\lambda i} - p_z \delta w] dA \\
& + \sum_{(a)} \left[ \oint (N_{i,j} l_j \delta u_i + N_{i,j} w_{,i} l_j \delta w - M_{i,j} l_j \delta \theta_i + Q_i l_i \delta w) dS \right. \\
& \left. + \int_{S_\sigma} (\bar{M}_{i,j} l_j \delta \theta_i - \bar{Q}_i l_i \delta w) dS \right] \\
= & \sum_{(a)} \int_{A_i} \{ -N_{i,j} \delta u_i - [(N_{i,j} w_{,i})_{,j} + Q_{i,i} + p_z] \delta w \\
& + (M_{i,j,j} - Q_i) \delta \theta_i \} dA + \sum_{(a)} \int_{A_i} Q_i \delta \gamma_{\lambda i} dA \\
& + \sum_{(a)} \int_{S_\sigma} [N_{i,j} l_j \delta u_i - (M_{i,j} - \bar{M}_{i,j}) l_j \delta \theta_i + (N_{i,j} w_{,i} + Q_j - \bar{Q}_j) l_j \delta w] dS \\
& + \sum_{(a,b)} \int [N_{i,j} l_j \delta u_i - M_{i,j} l_j \delta \theta_i + (N_{i,j} w_{,i} + Q_j) l_j \delta w] dS \quad (4.3)
\end{aligned}$$

若附加剪应变 $\gamma_{\lambda i}$ 满足约束条件:

$$\sum_{(a)} \int_{A_i} Q_i \delta \gamma_{\lambda i} dA = 0 \quad (4.4)$$

则驻值条件 $\delta \Pi = 0$ 将获得大挠度Mindlin板的全部平衡关系:

$$N_{i,j,j} = 0 \quad \text{在 } A_a \text{ 内} \quad (4.5a)$$

$$(N_{i,j} w_{,i})_{,j} + Q_{i,i} + p_z = 0 \quad \text{在 } A_a \text{ 内} \quad (4.5b)$$

$$M_{i,j,j} - Q_i = 0 \quad \text{在 } A_a \text{ 内} \quad (4.5c)$$

$$N_{i,j} l_j = 0 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (4.5d)$$

$$M_{i,j} l_j - \bar{M}_{i,j} l_j = 0 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (4.5e)$$

$$(N_{i,j} w_{,i} + Q_j) l_j - \bar{Q}_j l_j = 0 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \quad (4.5f)$$

$$(N_{i,j} l_j)^{(a)} + (N_{i,j} l_j)^{(b)} = 0 \quad \text{在单元 } (a), (b) \text{ 交界面上} \quad (4.5g)$$

$$(M_{i,j} l_j)^{(a)} + (M_{i,j} l_j)^{(b)} = 0 \quad \text{在单元 } (a), (b) \text{ 交界面上} \quad (4.5h)$$

$$[(N_{i,j} w_{,i} + Q_j) l_j]^{(a)} + [(N_{i,j} w_{,i} + Q_j) l_j]^{(b)} = 0 \quad \text{在单元 } (a), (b) \text{ 交界面上} \quad (4.5j)$$

由(4.4)式可见,为使 $\delta \Pi = 0$ 的驻值条件对应于(4.5)式欧拉方程且 $Q_i \rightarrow 0$ ,约束条件(4.4)是不可少的。按文[7]的提法,该条件即为具有非协调位移的有限元的能量相容条件。当单元无限细分时,单元横向剪力 $Q_i$ 将趋于常量 $Q_i^c$ ,因此为保证有限元解的收敛, $\gamma_{\lambda i}$ 需满足:

$$\sum_{(a)} \int_{A_i} Q_i^c \delta \gamma_{\lambda i} dA = 0 \quad (4.6)$$

为方便实施, 可将上式换为单个元的强形式:

$$\int_{A_i} Q_i \delta \gamma_{\lambda i} dA = 0 \quad \text{或} \quad \int_{A_i} \gamma_{\lambda i} dA = 0 \quad (i=1, 2) \quad (4.7)$$

利用虚参数法<sup>[6]</sup>并针对(3.2)式 $\mathbf{Y}_\lambda$ 的具体形式, 易获得满足(4.7)约束条件的修正 $\mathbf{Y}_\lambda$ 模式:

$$\mathbf{Y}_\lambda = \begin{bmatrix} \xi - a_1/2 & 0 & \eta - a_2/2 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \xi - a_1/2 & 0 & \eta - a_2/2 & 0 & \xi\eta \end{bmatrix} \lambda \quad (4.8)$$

式中:

$$a_1 = \frac{2B}{3A}, \quad a_2 = \frac{2C}{3A}, \quad A = a_1 b_3 - a_3 b_1, \quad B = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad C = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

其中 $x_i, y_i$ 为整体坐标下单元结点坐标值。

容易验证, 对矩形单元的(3.3)式 $\mathbf{Y}_\lambda$ , 约束条件(4.7)式将自动满足, 无须对 $\mathbf{Y}_\lambda$ 作任何修改。

应指出, 修正后的附加剪应变模式(4.8)完全不影响自锁转角模式(LRM)的释放。根据(4.8)式及(3.3)式 $\mathbf{Y}_\lambda$ 建立的单元本文分别称为NLQ<sub>6</sub>及NLQ<sub>4</sub>元。

## 五、算 例

以下各算例中, 单元NLQ<sub>6</sub>、NLQ<sub>4</sub>全部采用 $2 \times 2$ 高斯积分(满积分)。作为比较, 也给出了使用降阶积分技巧的八结点等参Mindlin板元QS的结果。QS元的应力值是按高斯积分点外推的结果, 而NLQ<sub>6</sub>、NLQ<sub>4</sub>元的应力均为直接在结点处取值。对于前三个例子, 因为都是矩形元剖分, NLQ<sub>6</sub>元几乎给出和NLQ<sub>4</sub>元一致的结果, 故NLQ<sub>6</sub>元的结果表中没有再列出。

各算例均取不可移动边界条件, 简支边界条件取中面位移,  $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \theta_s = 0$ , 固支边界条件取 $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \theta_n = \theta_s = 0$ 。表中位移、荷载、应力的无量纲量分别为:

$$w = \bar{w}/t; \quad p = p_z l^4 / (Et^4); \quad \sigma_t = \sigma_{t, \max} l^2 / (Et^2)$$

其中 $l$ 为方板边长,  $\sigma_{t, \max}$ 为所求点最外纤维处应力。对于圆板, 将 $p, \sigma_t$ 中 $l$ 换为半径 $R$ 。

**例1** 四边简支方板受分布荷载作用,  $\mu = 0.3, E = 10.92 \times 10^9$ 。由对称性取 $1/4$ 板计算(图3)。对 $t/l = 0.01$ (薄板)及 $t/l = 0.05$ (中厚板), 表1、2分别列出不同网格下用NLQ<sub>4</sub>元计算的板中点最大挠度及最大应力 $\sigma_{s, \max}$ 的系数。对照解取自文[9], 该理论解是用Rayleigh-Ritz法按假设级数形式的位移场所求的结果(每个独立变量场用了36个自由度)。可以看出, 采用满积分的NLQ<sub>4</sub>元在薄板情况下没有自锁现象。无论是薄板还是厚板, 随着网格加密NLQ<sub>4</sub>元都迅速收敛于对照解并在较粗网格下获得很好的位移和应力结果。

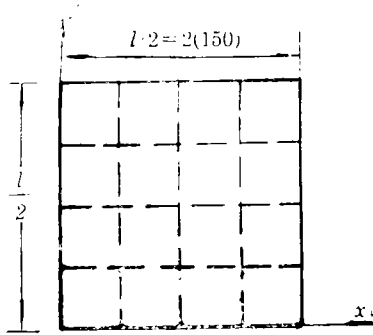


图 3

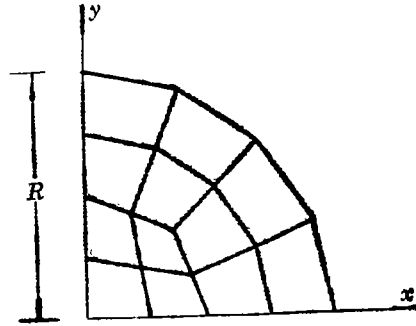


图 4

表1 均布荷载作用下四边简支薄方板( $t/l=0.01$ )的中点挠度及应力系数

荷载 $p/9.1575$	1×1网格		2×2网格		4×4网格		对照解	
	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$
1	0.2991	1.9634	0.3502	2.6965	0.3480	2.6087	0.3467	2.5708
4	0.8406	6.8187	0.8695	8.0590	0.8301	7.1827	0.8154	6.8915
16	1.6746	17.574	1.6032	18.355	1.4968	15.292	1.4628	14.498
64	2.8736	40.000	2.6476	38.606	2.4439	31.437	2.3890	29.850
200	4.3077	77.120	3.8568	71.011	3.5738	59.090	—	—
500	5.9090	133.50	5.1870	118.23	4.8439	100.78	—	—

表2 均布荷载下四边简支中厚方板( $t/l=0.05$ )的中点挠度及应力系数

荷载 $10.92p$	1×1网格		2×2网格		4×4网格		对照解	
	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$
10	0.0325	0.1851	0.0402	0.2667	0.0410	0.2685	0.0405	0.2672
50	0.1597	0.9665	0.1931	1.3756	0.1953	1.3671	0.1929	1.3542
75	0.2344	1.4685	0.2777	2.0518	0.2786	2.0144	0.2750	1.9898
100	0.3041	1.9661	0.3528	2.6896	0.3513	2.6087	0.3467	2.5708
150	0.4283	2.9214	0.4790	3.8392	0.4714	3.6455	—	—
200	0.5345	3.8076	0.5813	4.8421	0.5672	4.5216	—	—

例2 对边简支 ( $x = \pm l/2$ ) 另对边固支 ( $y = \pm l/2$ ) 方板 (SCSC) 受分布荷载作用,  $\mu = 0.3$ ,  $E = 10.92 \times 10^8$ , 取1/4板4×4网格计算(图3)。表3给出NLQ<sub>4</sub>元计算的薄板 ( $t/l = 0.01$ ) 及中厚板 ( $t/l = 0.05$ ) 中点挠度及应力系数。对照解系数  $w^*$ ,  $\sigma_y^*$  取自文[9], 其计算方法同例1的说明。

表3 分布荷载下SCSC方板中点挠度及应力系数

$p/9.1575$	$t/l=0.01$				$t/l=0.05$				
	$w$	$\sigma$	$w^*$	$\sigma^*$	$10.92p$	$w$	$\sigma_y$	$w^*$	$\sigma_y^*$
1	0.1838	1.8804	0.1867	1.8462	10	0.0195	0.1833	0.0192	0.1803
4	0.6046	6.7599	0.6018	6.4450	50	0.0969	0.9329	0.0951	0.9172
16	1.3403	16.422	1.3034	15.050	75	0.1443	1.4079	0.1416	1.3823
64	2.3406	32.210	2.2728	30.185	100	0.1904	1.8817	0.1867	1.8462
200	3.4956	58.338	—	—	150	0.2781	2.8102	—	—
500	4.7801	100.49	—	—	200	0.3588	3.6952	—	—

例3 四边固支方板受均布荷载作用,  $\mu = 0.316$ ,  $E = 3 \times 10^7$ ,  $l = 300$ ,  $t = 3$ (薄板), 取



1/4板 $4 \times 4$ 网格计算(图3), 结果列于表4, 其中 $N$ ,  $M$ 分别为约束前、后的自由度数目。对照解为Levy按von Karman方程用双Fourier级数计算的结果, QS元及对照解取自文[8]。由比较可见, 采用本文的NLQ<sub>4</sub>元可用较少的自由度获得较满意的计算结果。

表4 分布荷载作用下周边固支方板的中点挠度及应力系数

$p$	NLQ <sub>4</sub> ( $N=125, M=72$ )		QS( $N=325, M=224$ )		对照解	
	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$
17.79	0.2349	2.6291	0.2351	2.6571	0.237	2.6
38.3	0.4702	5.5452	0.4673	5.5137	0.471	5.2
63.4	0.6985	8.5598	0.6887	8.3528	0.695	8.0
95.0	0.9187	11.581	0.9003	11.115	0.912	11.1
134.9	1.1314	14.576	1.1041	13.817	1.121	13.3
184	1.3347	17.506	1.2990	16.461	1.323	15.9
245	1.5345	20.462	1.4913	19.160	1.521	19.2
318	1.7270	23.412	1.6774	21.902	1.714	21.9
402	1.9096	26.327	1.8682	24.805	1.902	25.1

例4 周边固支圆板受分布荷载作用,  $\mu=0.3$ ,  $E=10^7$ ,  $R=100$ ,  $t=2$  (薄板)。取1/4板12个单元计算(图4)。表5给出了板中点挠度及应力系数, 其中 $N$ ,  $M$ 含意同上例, QS元及薄板理论解均取自文[8]。可以看出, 即使对于畸变单元, NLQ<sub>6</sub>元也不出现自锁且以很小的计算代价获得了较满意的结果。

表5 分布荷载作用下周边固支圆板中点挠度及应力系数

$p$	NLQ <sub>6</sub> ( $N=95, M=54$ )		QS( $N=245, M=168$ )		薄板理论解	
	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$	$w$	$\sigma_x$
1	0.1562	0.4887	0.1614	0.5018	0.169	0.502
2	0.3030	0.9861	0.3116	1.0044	0.323	0.986
3	0.4353	1.4609	0.4453	1.4724	0.457	1.421
6	0.7491	2.6605	0.7566	2.6070	0.761	2.471
10	1.0389	3.8324	1.0417	3.6774	1.035	3.542
15	1.2963	4.9118	1.2950	4.6595	1.279	4.622

致谢 作者衷心感谢黄茂光教授给予本课题的热情支持和重要建议。

### 参 考 文 献

- [1] Hughes, T. J. R., R. L. Taylor and S. Kanonukulchai, A simple and efficient finite element for bending, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11 (1977), 1529—1543.
- [2] Lee, S. W. and T. H. H. Pian, Improvement of plate and shell finite element by mixed formulations, *AIAA J.*, 16 (1978), 29—34.
- [3] Hinton, E. and H. C. Huang, A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields, *Computers & Structures*, 23 (1986), 409—431.
- [4] Papadopoulo, P. and R. L. Taylor, A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30 (1990), 1029—1049.
- [5] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社 (1980).
- [6] Wu Chang-chun, Huang Mac-guang and T. H. H. Pian, Consistency condition

- and convergence criteria of incompatible elements general formulation of incompatible functions and its application, *Computers & Structures*, 27 (1987), 639—644.
- [7] 吴长春, H. Bufler, 多变量有限元, 相容性与模式优化, 中国科学(A辑), 9 (1990), 946—956.
- [8] Pica, A., R. D. Wood and E. Hinton, Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behavior using a Mindlin formulation, *Computers & Structures*, 11 (1980), 203—215.
- [9] Azizan, E. G. and D. J. Dawe, Geometrically nonlinear analysis of rectangular Mindlin plates using the finite strip method, *Computers & Structures*, 21 (1985), 423—436.

## Geometrically Nonlinear Analysis of Mindlin Plate Using the Incompatible Bending Elements with Internal Shear Strain

Jiao Zhao-ping

(*South China Construction University, West Campus, Guangzhou*)

Wu Chang-chun

(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

T. H. H. Pian

(*Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA*)

### Abstract

An approach of the incompatible elements with additional internal shear strain is suggested and applied to geometrically nonlinear analysis of Mindlin plate bending problem. It provides a quite convenient way to avoid the shear locking troubles. An energy consistency condition for this kind of  $C^0$  elements is offered. The nonlinear element formulations and some numerical results are presented.

**Key words** internal shear strain, geometrically nonlinear, shear locking, consistency condition