应用数学和力学，第15卷第6期（1994年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

受约束控制系统中变分原理的应用*

邓子辰　钟万勰

（西安 西北工业大学）（大连理工大学）

摘　要

本文分别对LQ控制问题及非线性控制问题建立了约束变量的正则方程，进而讨论了等式约束和不等式约束时约束变量的极值原理．最后通过例题验证了本文所得到的结论．本文工作为受约束LQ控制系统及非线性控制系统的深入研究打下了基础．

关键词　变分原理　正则方程　参变量

一、引　言

计算结构力学与最优控制模拟理论的建立及其发展[1,2]，为两门学科的相互渗透打下了基础．变分原理，特别是一般变分原理[3,4]，为计算结构力学及有限元的发展提供了强有力的理论工具．同时应该注意到，最优控制理论也是密切地依赖于变分原理而发展起来的．因此从变分原理角度来研究和认识这两门学科很有必要．

本文讨论了变分原理在受约束控制系统中的应用．所得结论为LQ控制系统及非线性控制系统的深入研究打下了理论基础．

二、线性约束LQ控制问题

离散LQ控制系统的动力学方程为[5,6]

$$x_{k+1}=\Phi_k x_k+\Gamma_k u_k \qquad x_0=\text{给定向量} \tag{2.1}$$

价值泛函为

$$J=\frac{1}{2}x_f^T P_f x_f+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_f-1}(x_k^T Q_k x_k+u_k^T R_k u_k) \tag{2.2}$$

其中，$\Phi_k\in R^{n\times n}$；$\Gamma_k\in R^{n\times m}$；$R_k\in R^{m\times m}$为对称正定阵；$Q_k\in R^{n\times n}$为对称非负阵．

系统所受线性约束为

$$C_k(x_k,\ u_k)=C_{xk}x_k+C_{uk}u_k+C_{0k}\leqslant 0 \tag{2.3}$$

* 国家自然科学基金资助项目
1992年9月25日收到．

先讨论等式约束情况，价值泛函分别对方程(2.1)和(2.3)（取等号）引入 Lagrange 乘子 λ_{k+1}和γ_k，可建立扩展泛函

$$J_A=\frac{1}{2}x_f^TP_fx_f+C_f^T\gamma_f+\sum_{k=0}^{k_f-1}(H_k-\lambda_{k+1}^Tx_{k+1}+C_k^T\gamma_k) \tag{2.4}$$

其中，
$$H_k=\frac{1}{2}x_k^TQ_kx_k+\frac{1}{2}u_k^TR_ku_k+\lambda_{k+1}^T(\Phi_kx_k+\Gamma_ku_k)$$

J_A分别对u_k，λ_k和x_k取极值，得

$$u_k=-R_k^{-1}(\Gamma_k^T\lambda_{k+1}+C_{uk}^T\gamma_k) \tag{2.5}$$

$$x_{k+1}=\Phi_kx_k-G_k\lambda_{k+1}-\Gamma_kR_k^{-1}C_{uk}^T\gamma_k \tag{2.6}$$

$$\lambda_k=Q_kx_k+\Phi_k^T\lambda_{k+1}+C_{xk}^T\gamma_k \tag{2.7}$$

$$\lambda_f=P_fx_f+C_{xf}^T\gamma_f \tag{2.8}$$

将式(2.5)代入J_A中，这时

$$\begin{aligned}J_A'=\frac{1}{2}x_f^TP_fx_f+\sum_{k=0}^{k_f-1}\Big\{&-\lambda_{k+1}^Tx_{k+1}+\lambda_{k+1}^T\Phi_kx_k+\frac{1}{2}x_k^TQ_kx_k\\&-\frac{1}{2}\lambda_{k+1}^TG_k\lambda_{k+1}+x_k^TC_{xk}^T\gamma_k-\lambda_{k+1}^T\Gamma_kR_k^{-1}C_{uk}^T\gamma_k+C_{0k}^T\gamma_k\\&-\frac{1}{2}\gamma_k^TC_{uk}R_k^{-1}C_{uk}^T\gamma_k\Big\}+\gamma_f^T(C_{xf}x_f+C_{0f})\end{aligned} \tag{2.9}$$

对于确定的约束变量γ_k，J_A'的极值性质为

$$\max_{\lambda}\min_{x}J_A' \quad 或 \quad \min_{x}\max_{\lambda}J_A' \tag{2.10}$$

将式(2.10)展开，γ_k为参变量，而 x_k 和λ_k将是γ_k的线性函数．将式(2.5)代入约束方程，得

$$C_{xk}x_k-C_{uk}R_k^{-1}\Gamma_k^T\lambda_{k+1}-C_{uk}R_k^{-1}C_{uk}^T\gamma_k+C_{0k}=0 \tag{2.11}$$

由于x_k和λ_k均为γ_k的线性函数，所以方程(2.11)建立起了关于参变量γ_k的线性方程组．

对于式(2.4)，如果动力方程得到满足，则

$$J_A\Big|_{式(2.1)满足}=J+\sum_{k=0}^{k_f-1}C_k^T\gamma_k \tag{2.12}$$

x_k，λ_k和u_k为γ_k的线性函数，它们求出后代入J_A中，可发现J_A为关于γ_k的二次式，约束变量能否正常求解完全取决于γ_k的二次齐次式部分．将求出的x_k和λ_k代入式(2.9)，J_A' 的 形式为

$$J_A'(\gamma_k)=\frac{1}{2}\gamma_k^T\Pi\gamma_k+D^T\gamma_k+b \tag{2.13}$$

式中Π是个对称阵，而D为一向量．在式(2.9)中应该注意到C_{0k}只在$C_{0k}^T\gamma_k$ 这一项出现，因此变动C_{0k}不会影响到x_k和λ_k的解对于γ_k的依赖．在式(2.5)～(2.7)中也不出现C_{0k}，这说明 C_{0k}不会影响γ_k的二次齐次式，即与Π阵无关．因此可以任意变动C_{0k}，而改变式(2.13)中的

向量D。

现在来看式(2.13)，J'_A对γ_k取极值，得$\Pi\gamma_k+D=0$，可求出$\gamma_k=-\Pi^{-1}D$（假定Π可逆），这时

$$J'_A(\gamma_k)=b-\frac{1}{2}D^T\Pi^{-1}D \tag{2.14}$$

现设法改变C_{0k}，使得向量D等于零，则由$\Pi\gamma_k+D=0$知$\gamma_k=0$，这时$J'_A(0)=b$。$\gamma_k=0$相当于无约束情况。不存在约束时，J的极小值一定小于施加约束情况的极小值。用公式表示$b-D^T\Pi^{-1}D/2\geqslant b$，即$D^T\Pi^{-1}D\leqslant 0$。这说明对于任意非零向量$D$，$\Pi$为负定。

根据Π阵的负定性，等式约束的极值原理可表示为

$$\max_{\gamma}\min_{x}\max_{\lambda}\min_{u} J_A \text{ 或 } \max_{\gamma}\max_{\lambda}\min_{x}\min_{u} J_A \tag{2.15}$$

对于不等式约束情况，处理方法完全一样。设不等式约束条件为

$$C_{xk}x_k+C_{uk}u_k+C_{0k}\leqslant 0 \tag{2.16}$$

扩展泛函仍为(2.4)，只是对参变量γ_k有要求$\gamma_k\geqslant 0$。实际上，有剩余互补条件[2,7]

$$\gamma_k\geqslant 0,\ C_k\leqslant 0,\ C_k^T\gamma_k=0 \tag{2.17}$$

在处理不等式约束时，除去条件$\gamma_k\geqslant 0$外，等式约束时的公式可不变动，因此Π阵仍要求为负定的，将约束条件的＝号换成≤号，就成为约束条件(2.16)。

三、一般约束下非线性控制问题

本节的讨论将以上节为基础。

设非线性系统的动力学方程为[8]

$$\dot{x}=f(x,\ u,\ t) \tag{3.1}$$

约束条件为

$$C(x,\ u,\ t)\leqslant 0 \tag{3.2}$$

价值泛函定义为

$$J=\int_0^{t_f}[X(x)+U(u)]dt+P(x_f) \tag{3.3}$$

在非线性迭代中，给出每一迭代步的扰动量q和p，设x_a和u_a为每步的近似值，则

$$x=x_a+q,\ u=u_a+p \tag{3.4}$$

式(3.4)分别代入(3.1)，(3.2)和(3.3)中，并进行 Taylor 展开

$$\dot{q}=F_aq+\Gamma_ap+r_a \tag{3.5}$$

$$C_xq+C_up+C_0\leqslant 0 \tag{3.6}$$

$$J=J_a+\int_0^{t_f}[X^T_{,a}q+U^T_{,a}p+\frac{1}{2}q^TX_{,aa}q+\frac{1}{2}p^TU_{,aa}p]dt$$
$$+P^T_{,a}q_f+\frac{1}{2}q_f^TP_{,aa}q_f \tag{3.7}$$

其中，

$$F_a=(\partial f/\partial x)_a,\ \Gamma_a=(\partial f/\partial u)_a,\ r_a=f(x_a,\ u_a)-\dot{x}_a \tag{3.8}$$

$$C_x=(\partial C/\partial x)_a,\quad C_u=(\partial C/\partial u)_a,\quad C_0=C(x_a,\ u_a) \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{,a}=(dX/dx)_a,\quad U_{,a}=(dU/du)_a,\quad X_{,aa}=(d^2X/dx^2)_a \\ U_{,aa}=(d^2U/du^2)_a \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

先来说明等式约束情况，分别对动力方程和约束条件引入 Lagrange 乘子α和β

$$J_A=\int_0^{t_f}[-\alpha^T\dot{q}+\alpha^T(F_aq+\Gamma_ap+r_a)+\beta^T(C_xq+C_up+C_0)+X^T_{,a}q$$
$$+U^T_{,a}p+\frac{1}{2}q^TQ_aq+\frac{1}{2}p^TR_ap]dt+P^T_{,a}q_f+\frac{1}{2}q_f^TP_{,aa}q_f \tag{3.11}$$

其中，$Q_a=X_{,aa}$，$R_a=U_{,aa}$. J_A分别对p和q取极值，得

$$p=-R_a^{-1}(\Gamma^T_a\alpha+U_{,a}+C^T_u\beta) \tag{3.12}$$

$$\dot{\alpha}=-Q_aq-F^T_a\alpha+C^T_x\beta+X_{,a} \tag{3.13}$$

式(3.12)代入式(3.5)，得

$$\dot{q}=F_aq-G_a\alpha-\Gamma_aR_a^{-1}U_{,a}-\Gamma_aR_a^{-1}C^T_u\beta \tag{3.14}$$

(3.13)和(3.14)构成了关于α和q的对偶方程，$G_a=\Gamma_aR_a^{-1}\Gamma^T_a$. 式(3.12)代入式(3.11)

$$J_A=\int_0^{t}[-\alpha^T\dot{q}+\alpha^TF_aq-\frac{1}{2}\alpha^TG_a\alpha-\alpha^T\Gamma_aR_a^{-1}U_{,a}-\alpha^T\Gamma_aR_a^{-1}C^T_u\beta$$
$$+\alpha^Tr_a+\beta^TC_xq-\beta^TC_uR_a^{-1}\Gamma^T_a-\beta^TC_uR_a^{-1}U_{,a}-\beta^TC_uR_a^{-1}C^T_u\beta$$
$$+\beta^TC_0+\frac{1}{2}q^TQ_aq+X^T_{,a}q-U^T_{,a}R_a^{-1}(\Gamma^T_a\alpha+U_{,a}+C^T_u\beta)]dt$$
$$+P^T_{,a}q_f+\frac{1}{2}q_f^TP_{,aa}q_f \tag{3.15}$$

式(3.12)代入约束方程(3.6)（只考虑等式）

$$C_xq-C_uR_a^{-1}\Gamma^T_a\alpha-C_uR_a^{-1}C^T_u\beta-C_uR_a^{-1}U_{,a}+C_0=0 \tag{3.16}$$

采用上节的方法，当动力方程满足时，有

$$J_A=J+\int_0^{t_f}\beta^T(C_xq+C_up+C_0)dt \tag{3.17}$$

而J_A关于β的二次式的一般形式为

$$J_A(\beta)=\int_0^{t_f}\left[\frac{1}{2}\beta^T\Pi\beta+D^T\beta+b\right]dt+\varphi \tag{3.18}$$

Π仍为对称阵.

这样可得出结论，方程(3.16)可解，要求二次型矩阵Π负定.

对于不等式约束情况，结果自明. 这里就不赘述.

四、例　　题

为简明而又能说明问题，本节采用线性约束下的LQ控制问题来说明上两节的结论.

首先给出一个最简单的例子. 设约束条件为$x_f=A$，其中A为一给定向量.

这个问题可当成一个约束问题来求解，不过只是一个时刻有约束. 先讨论(2.4)和(2.9)

中P_f降为零的情况，此时J_A总能表示成下列形式

$$J_A=-\left[\lambda_f^T x_f+\frac{1}{2}\lambda_f^T G\lambda_f-\lambda_f^T\Phi x_0-\frac{1}{2}x_0^T Q x_0\right] \tag{4.1}$$

其中G，Φ和Q均可用G_k，Φ_k和$Q_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ k_f)$来表示。

在处理约束之前，先要将λ_f消去，这一步要求先对λ_f取极大，然后才是对于状态x_f在条件$x_f=A$之下取极小。这样便可得到

$$G\lambda_f+x_f-\Phi x_0=0 \tag{4.2}$$

即

$$\lambda_f=G^{-1}(\Phi x_0-x_f) \tag{4.3}$$

λ_f代回J_A中，这时

$$J_A=\frac{1}{2}x_0^T Q x_0+\frac{1}{2}(\Phi x_0-x_f)^T G^{-1}(\Phi x_0-x_f) \tag{4.4}$$

如果没有约束，则J_A达到最小的条件为

$$x_f=\Phi x_0 \tag{4.5}$$

可现在讨论的是有约束问题，对约束$x_f=A$引入 Lagrange 乘子γ_k，相应的扩展泛函为

$$J'_A=\frac{1}{2}x_0^T Q x_0+\frac{1}{2}(\Phi x_0-x_f)^T G^{-1}(\Phi x_0-x_f)+\gamma_k^T(x_f-A) \tag{4.6}$$

J'_A对于x_f取极小，有

$$x_f=\Phi x_0-G\gamma_k \tag{4.7}$$

式(4.7)代入J'_A

$$J'_A=\frac{1}{2}x_0^T Q x_0+\frac{1}{2}\gamma_k^T G\gamma_k+\gamma_k^T(\Phi x_0-G\gamma_k-A)$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma_k^T G\gamma_k+\gamma_k^T(\Phi x_0-A)+\frac{1}{2}x_0^T Q x_0 \tag{4.8}$$

对比式(2.13)，可知$\Pi=-G$，$D=(\Phi x_0-A)^T$。Π显然为一负定阵。同时由$\max\limits_{\gamma} J'_A(\gamma_k)$得到的方程$G\gamma_k=\Phi x_0-A$可解。

现在来考虑$P_f>0$时的情况，在推导式(4.4)时与P_f项无关，因此只需简单地加上这一项就可以。

$$J_A=\frac{1}{2}x_f^T P_f x_f+\frac{1}{2}x_0^T Q x_0+\frac{1}{2}(\Phi x_0-x_f)^T G^{-1}(\Phi x_0-x_f) \tag{4.9}$$

同样按$P_f=0$时的方法，可方便地求出

$$x_f=(P_f+G^{-1})^{-1}(G^{-1}\Phi x_0-\gamma_k) \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}J'_A=&\frac{1}{2}x_0^T[Q+\Phi^T(P_f^{-1}+G)^{-1}\Phi]x_0-\frac{1}{2}\gamma_k^T(P_f+G^{-1})^{-1}\gamma_k\\&+\gamma_k^T[(I+P_fG)^{-T}\Phi x_0-A]\end{aligned} \tag{4.11}$$

根据上式可得

$$\Pi=-(P_f+G^{-1})^{-1},\quad D=[(I+P_fG)^{-T}\Phi x_0-A]^T \tag{4.12}$$

Π显然也是负定阵。同时方程

$$(P_f+G^{-1})^{-1}\gamma_k=(I+P_fG)^{-T}\Phi x_0-A \tag{4.13}$$

可解.

如果是等式约束，就按 $G\gamma_k=\Phi x_0-A$或式(4.13)列出代数联立方程组求解 γ_k. 如果约束为不等式，就成为二次规划问题，γ_k一定有解. 这就验证了前两节所得到的结论.

五、结 束 语

本文利用变分原理，对受约束的LQ控制系统及非线性控制系统约束变量的可解性进行了分析，得到了很有意义的结论，并通过实际例题说明了结论的正确性。变分原理有广泛的应用基础，在这方面还有大量的工作可做。

参 考 文 献

[1] Zhong Wan-xie and Zhong Xiang-xiang, Computational structure mechanics optimal control and semi-analytical method for PDE, *Computers & Structures*, 37(6) (1990), 993—1004.

[2] 邓子辰, 计算结构力学与最优控制模拟理论的研究, 大连理工大学博士论文 (1992).

[3] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社 (1980).

[4] 胡海昌, 《弹性力学的变分原理及其应用》, 科学出版社 (1981).

[5] 解学书, 《最优控制理论与应用》, 清华大学出版社 (1986).

[6] Stengel, R. F., *Stochastic Optimal Control*, John Wiley & Sons (1986).

[7] 钟万勰, 离散LQ控制问题线性约束的变分原理及二次规划解法, 《计算结构力学与最优控制的模拟论文集》, 大连理工大学工程力学研究所 (1990,7), 155—168.

[8] 高为炳, 《非线性控制系统导论》, 科学出版社 (1988).

The Application of the Variational Principle in the Constrained Control System

Deng Zi-chen

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Zhong Wan-xie

(Dalian University of Technology, Dalian)

Abstract

The regular equations on the constraint variables are established for LQ and nonlinear control problems in this paper, then the extreme-value principles of the constraint variables are discussed for the equality and unequality constraint cases respectively. At last, the given example verifies the conclusion of this paper. The work in this paper will lay the foundation for the further study about the constrained LQ and nonlinear control systems.

Key words variational principle, regular equation, parametric variable