

带有微弱章动的圆球在粗糙水平面上的运动*

杨霁英

(上海技术师范学院应用物理系, 1993年4月5日收到)

摘 要

对于圆球在粗糙水平面上的运动, 在文[1]中, 作者忽略了章动, 得到了近似解析解。本文在此基础上给出了有章动情况下的控制方程。通过求解这些方程, 证明文[1]关于接触点速度的结论在有章动时仍然正确。还得到其它一些有趣的结果, 例如: 球心和接触点的速度与球的自转角速度和章动角速度有一定联系; 球心和接触点的速度的方向具有不变性。在进一步假设微弱章动的情况下, 文中得到近似解析解, 从而证明文[1]结果的正确性。

关键词 章动 圆球运动 粗糙平面 接触点

一、引 言

文[1]在忽略章动的情况下, 给出了圆球在粗糙水平面上运动的解析解。曾有一些评论者和学者指出: 由摩擦力引起的球的章动运动是相当大的, 建议作者继续这方面的工作, 本文就是在这方面的一个尝试。

二、圆球在粗糙水平面上的运动微分方程

设圆球在粗糙水平面上运动。所考虑的位形如图1所示。 $O-\xi\eta\zeta$ 为随圆球质心 O 一起平动的坐标系。 $O-xyz$ 为不随圆球自转的动坐标系。则圆球的角速度 ω 为

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\theta} + \dot{\psi} = -\dot{\theta}i - \dot{\varphi}\sin\theta j + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})k \quad (2.1)$$

式中 φ , θ 和 ψ 分别是圆球的进动角、章动角和自转角。而运动系 $O-xyz$ 的角速度 Ω 为

$$\Omega = \dot{\varphi} - \dot{\theta} = -\dot{\theta}i - \dot{\varphi}\sin\theta j + \dot{\varphi}\cos\theta k \quad (2.2)$$

接触点 P 的向径为

$$\mathbf{r}_P = \overrightarrow{OP} = \rho\sin\theta j - \rho\cos\theta k \quad (2.3)$$

式中 ρ 为圆球的半径。因此 P 点的速度是

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_O + \omega \times \mathbf{r}_P \quad (2.4)$$

* 戴世强推荐。

其中 V_P 和 V_O 分别是 P 点和 O 点相对于一固定坐标系的速度, (2.4) 式在 O - xyz 坐标系中的投影是

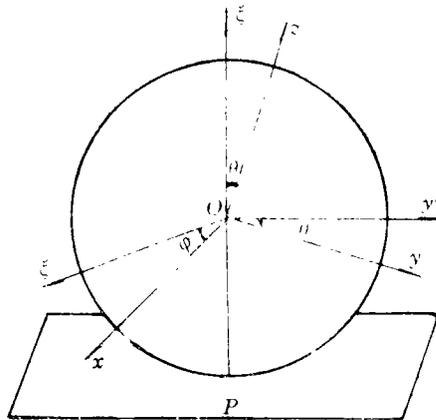


图1 圆球在平面上

$$V_{Px} = V_{Ox} - \rho \dot{\psi} \sin \theta \quad (2.5)$$

$$V_{Py} = V_{Oy} - \rho \dot{\theta} \cos \theta \quad (2.6)$$

$$V_{Pz} = V_{Oz} - \rho \dot{\theta} \sin \theta \quad (2.7)$$

利用动量定理

$$M \frac{d}{dt} V_O = W + N + F$$

其中 W 是重力, N 是法向反作用力, 而 F 是摩擦力, 又利用关系式

$$\frac{d}{dt} V_O = \frac{\tilde{d}}{dt} V_O + \Omega \times V_O$$

我们可得到圆球运动的下列微分方程

$$M(\dot{V}_{Ox} - V_{Oz} \dot{\theta} \sin \theta - V_{Oy} \dot{\psi} \cos \theta) = -\mu N V_{Px} / V_P \quad (2.8)$$

$$M(\dot{V}_{Oy} + V_{Oz} \dot{\theta} + V_{Ox} \dot{\psi} \cos \theta) = -\mu N V_{Py} / V_P + (W - N) \sin \theta \quad (2.9)$$

$$M(\dot{V}_{Oz} - V_{Oy} \dot{\theta} + V_{Ox} \dot{\psi} \sin \theta) = -\mu N V_{Pz} / V_P + (N - W) \cos \theta \quad (2.10)$$

在(2.8)~(2.10)式中, 由于球的质心不可能在铅垂方向有运动, 因而 $W = N$, N 可用 W 代替, 即

$$M(\dot{V}_{Ox} - V_{Oz} \dot{\psi} \sin \theta - V_{Oy} \dot{\psi} \cos \theta) = -\mu W V_{Px} / V_P \quad (2.8)'$$

$$M(\dot{V}_{Oy} + V_{Oz} \dot{\theta} + V_{Ox} \dot{\psi} \cos \theta) = -\mu W V_{Py} / V_P \quad (2.9)'$$

$$M(\dot{V}_{Oz} - V_{Oy} \dot{\theta} + V_{Ox} \dot{\psi} \sin \theta) = -\mu W V_{Pz} / V_P \quad (2.10)'$$

而且接触点 P 和球心 O 在铅垂方向的速度应为零, 即

$$\begin{aligned} V_{Pz} &= -V_{Py} \sin \theta + V_{Px} \cos \theta \stackrel{(2.6), (2.7)}{=} - (V_{Oy} - \rho \dot{\theta} \cos \theta) \sin \theta \\ &\quad + (V_{Ox} - \rho \dot{\psi} \sin \theta) \cos \theta \\ &= -V_{Oy} \sin \theta + V_{Ox} \cos \theta = V_{Oz} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

现在从相对于质心的动量矩定理, 可得到另外三个微分方程. 球相对于 O 的动量矩 G_O 是

$$G_O = J \omega = -J \dot{\theta} i - J \dot{\psi} \sin \theta j + J(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\psi}) k \quad (2.12)$$

此处 J 是球相对于直径的转动惯量, 且等于 $2M\rho^2/5$. 类似地

$$\frac{d}{dt} G_O = \frac{\tilde{d}}{dt} G_O + \Omega \times G_O = \overrightarrow{OP} \times (F + N)$$

那么导出另外三个方程:

$$-J\ddot{\theta} - J\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta = -\mu W\rho(V_{Pz}\sin\theta + V_{Py}\cos\theta)/V_P \quad (2.13)$$

$$-J\ddot{\phi}\sin\theta - J\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + J\dot{\theta}\dot{\psi} = \mu W\rho(V_{Pz}\cos\theta)/V_P \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt}J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \mu W\rho(V_{Pz}\sin\theta)/V_P \quad (2.15)$$

(2.8)'~(2.10)', (2.13)~(2.15) 诸式即为圆球在粗糙水平面上运动的控制方程.

(2.11)式是约束条件. 在解这些方程之前, 让我们先来考虑接触点 P 的速度分量 V_{Py}' , 它是垂直于 x 轴和 ζ 轴, 且在 Oyz 平面内, 如图1所示. 显然

$$\begin{aligned} V_{Py}' &= V_{Pz}\sin\theta + V_{Py}\cos\theta = (V_{Oz} - \dot{\theta}\rho\sin\theta)\sin\theta + (V_{Oy} - \dot{\theta}\rho\cos\theta)\cos\theta \\ &= V_{Oy}' - \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

式中 V_{Oy}' 为球心在 y' 方向的速度分量. 利用(2.11)式, 上式可改写为

$$\begin{aligned} V_{Py}' &= V_{Py}\sin\theta\tan\theta + V_{Pz}\cos\theta = V_{Py}\sec\theta \\ &= V_{Oy}\sec\theta - \rho\dot{\theta} = V_{Oy}' - \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.16)'$$

且

$$V_P = \sqrt{V_{Pz}^2 + V_{Py}^2 + V_{Pz}^2} = \sqrt{V_{Pz}^2 + V_{Py}^2 \sec^2\theta} = \sqrt{V_{Pz}^2 + V_{Py}'^2} \quad (2.17)$$

这样一来, 方程(2.13)简化为

$$-J\ddot{\theta} - J\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta = -\mu W\rho V_{Py}'/V_P \quad (2.13)'$$

三、有章动情形的一些解析结果

1. $G_{O\zeta}$ 守恒

利用[(2.15) $\cos\theta$ - (2.14) $\sin\theta$], 我们得到

$$\begin{aligned} &J(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta)\cos\theta + J\dot{\phi}\sin^2\theta + J\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta - J\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta \\ &= J(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta + \ddot{\phi}) = J\frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}) = 0 \end{aligned}$$

或

$$J(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}) = \text{const}$$

或

$$\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi} = \dot{\psi}_0\cos\theta_0 + \dot{\phi}_0 = C_1 \quad (3.1)$$

(3.1)式表明 G_O 在 ζ 轴方向的分量 $G_{O\zeta}$ 守恒, 这是因为外力或平行于 ζ 轴, 或与 ζ 轴相交.

2. 接触点 P 的速度 V_P 的规律

现在我们来考虑 \dot{V}_P , 由

$$V_P\dot{V}_P = V_{Pz}\dot{V}_{Pz} + V_{Py}\dot{V}_{Py} + V_{Pz}\dot{V}_{Pz}$$

将(2.5)~(2.7), (2.8)'~(2.10)', (2.13)~(2.15)诸式代入上式得

$$\begin{aligned} V_P\dot{V}_P &= V_{Pz}(\dot{V}_{Oz} - \ddot{\theta}\rho\sin\theta - \rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) + V_{Py}(\dot{V}_{Oy} - \ddot{\theta}\rho\cos\theta + \dot{\theta}^2\rho\sin\theta) \\ &\quad + V_{Pz}(\dot{V}_{Oz} - \ddot{\theta}\rho\sin\theta - \dot{\theta}^2\rho\cos\theta) \\ &= V_{Pz}(V_{Oz}\dot{\phi}\sin\theta + V_{Oy}\dot{\phi}\cos\theta - \mu g V_{Pz}/V_P + \rho\dot{\phi}\sin\theta\cos\theta \\ &\quad - \rho\dot{\theta}\dot{\phi}\sin^2\theta - 5\mu g V_{Pz}\sin^2\theta/2V_P - \rho\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) + V_{Py}(-V_{Oz}\dot{\theta} \\ &\quad - V_{Oz}\dot{\phi}\cos\theta - \mu g V_{Py}/V_P + \rho\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta - \frac{5}{2}\mu g \frac{V_{Py}'\cos\theta}{V_P} \\ &\quad + \dot{\theta}\rho\sin\theta) + V_{Pz}\left(V_{Oy}\dot{\theta} - V_{Oz}\dot{\phi}\sin\theta - \mu g \frac{V_{Pz}}{V_P} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho \dot{\phi} \dot{\psi} \sin^2 \theta - \frac{5}{2} \mu g \frac{V_{P_y} \dot{\psi} \sin \theta}{V_P} - \dot{\theta} \rho \cos \theta) \\
= & -\mu g \frac{V_{P_x}^2 + V_{P_y}^2 + V_{P_z}^2}{V_P} - \frac{5}{2} \mu g \frac{V_{P_x}^2 \sin^2 \theta + V_{P_y}^2}{V_P} \\
& + V_{P_x} \left[\dot{\phi} \sin \theta (V_{O_x} - \rho \dot{\theta} \sin \theta) - V_{O_y} \dot{\phi} \cos \theta - \rho \dot{\phi} \dot{\theta} \cos^2 \theta \right. \\
& \left. + \rho \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta - \frac{5}{2} \mu g \frac{V_{P_x} \cos^2 \theta}{V_P} - \rho \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \right] \\
& + V_{P_y} \left[-\dot{\theta} (V_{O_z} - \dot{\theta} \rho \sin \theta) - \dot{\phi} \cos \theta (V_{O_x} - \dot{\psi} \rho \sin \theta) \right] \\
& + V_{P_z} \left[\dot{\theta} (V_{O_y} - \dot{\theta} \rho \cos \theta) - \dot{\phi} \sin \theta (V_{O_x} - \dot{\psi} \rho \sin \theta) \right] \\
= & -7 \mu g V_P / 2 + V_{P_x} [\dot{\phi} \sin \theta V_{P_x} + \dot{\phi} \cos \theta V_{P_y}] \\
& + V_{P_y} [-\dot{\theta} V_{P_x} - \dot{\phi} \cos \theta V_{P_x}] + V_{P_z} [\dot{\theta} V_{P_y} - \dot{\phi} \sin \theta V_{P_x}] \\
= & -7 \mu g V_P / 2
\end{aligned}$$

所以得

$$\dot{V}_P = -7 \mu g / 2 \quad (3.2)$$

$$V_P = -7 \mu g t / 2 + V_{P_0} \quad (3.3)$$

这说明拙文[1]的这个结果, 对于有章动的情况同样是正确的。

3. 球速和球角速度之间的关系

由(2.8)'式我们有

$$\dot{V}_{O_x} - \dot{\phi} (V_{O_z} \sin \theta + V_{O_y} \sin \theta) = \dot{V}_{O_x} - \dot{\phi} V_{O_y} = -\mu g V_{P_x} / V_P \quad (3.4)$$

由[(2.9)'cosθ + (2.10)'sinθ]得

$$\begin{aligned}
& \dot{V}_{O_y} \cos \theta + V_{O_z} \dot{\theta} \cos \theta + V_{O_x} \dot{\phi} \cos^2 \theta + \dot{V}_{O_x} \sin \theta - V_{O_y} \dot{\theta} \sin \theta + V_{O_x} \dot{\phi} \sin^2 \theta \\
= & (\dot{V}_{O_y} \cos \theta - V_{O_y} \dot{\theta} \sin \theta) + (\dot{V}_{O_x} \sin \theta + V_{O_z} \dot{\theta} \cos \theta) + \dot{\phi} V_{O_x} \\
= & \frac{d}{dt} (V_{O_y} \cos \theta + V_{O_z} \sin \theta) + \dot{\phi} V_{O_x} = \dot{V}_{O_y} + \dot{\phi} V_{O_x} = -\mu g V_{P_y} / V_P
\end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.4)式和(3.5)式同样表明, 有章动和无章动, 结果是一样的。

下面我们来考虑文[1]中没有的一些结果。由(2.13)'式我们有

$$2 \rho \dot{\theta} / 5 + \dot{\phi} ((2 \rho \dot{\psi} \sin \theta) / 5) = \mu g V_{P_y} / V_P \quad (3.6)$$

由[(2.14)cosθ + (2.15)sinθ]得

$$\begin{aligned}
& -J \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta - J \dot{\theta} \cos^2 \theta + J \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta + J \ddot{\psi} \sin \theta + J \dot{\phi} \sin \theta \cos \theta - J \dot{\phi} \dot{\theta} \sin^2 \theta \\
= & J \frac{d}{dt} (\dot{\psi} \sin \theta) - J \dot{\phi} \dot{\theta} = \mu W \rho V_{P_x} / V_P
\end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2}{5} \rho \dot{\psi} \sin \theta \right) - \dot{\phi} \left(\frac{2}{5} \rho \dot{\theta} \right) = \mu g V_{P_x} / V_P \quad (3.7)$$

对比(3.4)式与(3.7)式, (3.5)式与(3.6)式, 应该有

$$V_{O_x} = -2(\rho \dot{\psi} \sin \theta) / 5 \quad (3.8)$$

$$V_{O_y} = -2 \rho \dot{\theta} / 5 \quad (3.9)$$

例如对于初始条件: $V_o(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, 式(3.8)和式(3.9)总是满足的。而上述初始条件是一类相当广泛的条件。另一方面, 由(2.5)式、(2.16)式、(3.8)式和(3.9)式可得

$$V_{P_x} = -7(\rho\dot{\psi}\sin\theta)/5 = 7V_{O_x}/2 \quad (3.10)$$

$$V_{P_y} = -7\rho\dot{\theta}/5 = 7V_{O_y}/2 \quad (3.11)$$

由此得

$$V_P = 7V_O/2 \quad (3.12)$$

和

$$\dot{V}_O = -\mu g \quad (3.13)$$

(3.13)式是一个显而易见的结果,因此(3.8)式和(3.9)式的正确性是毋庸置疑的。它们就是球速和球角速之间的关系。

4. 球心和接触点的速度的方向不变性

现在我们设

$$V_{O_x} = V_O \cos\alpha, \quad V_{O_y} = V_O \sin\alpha$$

则显然有

$$V_{P_x} = V_P \cos\alpha, \quad V_{P_y} = V_P \sin\alpha$$

将它们代入(3.4)式和(3.5)式得

$$\dot{V}_O \cos\alpha - V_O \dot{\alpha} \sin\alpha - \dot{\phi} V_O \sin\alpha = -\mu g \cos\alpha \quad (3.14)$$

$$\dot{V}_O \sin\alpha + V_O \dot{\alpha} \cos\alpha + \dot{\phi} V_O \cos\alpha = -\mu g \sin\alpha \quad (3.15)$$

由[(3.14)sin α - (3.15)cos α]得

$$-V_O \dot{\alpha} - \dot{\phi} V_O = 0$$

或

$$\dot{\alpha} + \dot{\phi} = 0 \quad (3.16)$$

这是一个很奇妙的结果!它说明矢量 V_O 和 V_P 以负的进动角在旋转,同样 $\rho\dot{\psi}\sin\theta\mathbf{i} + \rho\dot{\theta}\mathbf{j}'$ 矢量也以负的进动角在旋转,换句话说,矢量 V_O 和 V_P 在 $O-\xi\eta\zeta$ 系中或固定坐标系中是不旋转的,因为 $O-xyz$ 系以 $\dot{\phi}$ 相对于 $O-\xi\eta\zeta$ 旋转。这就是球心和接触点速度方向的不变性。文[1]中所述玻璃球在水平桌面上的旋进实验,证实玻璃球心的轨迹是一直线,特别是前期,说明了这一结果是正确的。

四、有微弱章动时的解

尽管上节得出了解的一些定性结果,但要进一步求解仍存在着巨大的困难。为此在以下我们作微弱章动的假定,即假设

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \ll 1, \quad \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \ll 1 \quad (4.1)$$

现在我们来考虑[(3.6)² + (3.7)²],且把(3.1)式 $\dot{\phi} = C_1 - \dot{\psi}\cos\theta$ 代入此式,得

$$[\dot{\psi}\sin\theta - \dot{\theta}(C_1 - 2\dot{\psi}\cos\theta)]^2 + [\dot{\theta} + \dot{\psi}\sin\theta(C_1 - \dot{\psi}\cos\theta)]^2 = (\rho\mu W/J)^2 \quad (4.2)$$

在微弱章动的情况下,(4.2)式的左端可分为两部分:一部分是不带小量的项,另一部分是带有小量的项。显然所有左端不带小量的项之和应该等于右端,即

$$\dot{\psi}^2 \sin^2\theta_0 + \dot{\psi}^2 \sin^2\theta_0 [C_1 - \dot{\psi}\cos\theta_0]^2 = (\rho\mu W/J)^2 \quad (4.3)$$

此式与拙文[1]的(20)式是一样的,因此我们有

$$\dot{\psi} = C_1/2\cos\theta_0 + bcn(\sqrt{a^2 + b^2}\cos\theta_0/J\sin\theta_0) (t_0 - t), \\ b/\sqrt{b^2 + b^2} / \sqrt{J\sin\theta_0\cos\theta_0} \quad (4.4)$$

式中

$$a = \sqrt{\rho\mu W - (JC_1^2 \sin\theta_0 / 4\cos\theta_0)}$$

$$b = \sqrt{\rho\mu W + (JC_1^2 \sin\theta_0 / 4\cos\theta_0)}$$

$\text{cn}(z, k)$ 是Jacobi椭圆余弦函数

式中 t_0 值的含意是：当 $t=t_0$ 时，

$$u = b \text{cn}(\sqrt{(a^2 + b^2) \cos\theta_0 / J \sin\theta_0} (t_0 - t), b / \sqrt{a^2 + b^2}) = b$$

即 $\text{cn}(0, k) = 1$ 。利用初始条件： $t=0$ 时 $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0$ ，可由(4.4)式确定 t_0 的值。

当 $\dot{\psi}_0$ 很大， $\dot{\theta}$ 很小时，得到(4.4)式的解是不奇怪的。但其它物理量与文[1]的结果不一样，现推导如下。由 $[(3.8)^2 + (3.9)^2]$ ，忽略平方以上小量，我们得到

$$(2\rho/5)^2 [\dot{\psi}^2 (\sin^2\theta_0 + 2\varepsilon \sin\theta_0 \cos\theta_0)] = V_0^2 \quad (4.5)$$

或

$$\varepsilon = \left(\frac{25V_0^2}{4\rho^2 \dot{\psi}^2} - \sin^2\theta_0 \right) / \sin 2\theta_0 \quad (4.6)$$

由(3.1)式，我们得到

$$\dot{\psi} = C_1 - \dot{\psi} (\cos\theta_0 - \varepsilon \sin\theta_0) \quad (4.7)$$

利用(3.8)式和(3.9)式，我们求得

$$V_{Ox} = -2\rho\dot{\psi} (\sin\theta_0 + \varepsilon \cos\theta_0) / 5 \quad (4.8)$$

$$V_{Oy} = -2\rho\dot{\psi} / 5 \quad (4.9)$$

因为(4.6)~(4.9)式的右端的所有项都是已知量，因此 ε ， ε ， $\dot{\psi}$ ， V_{Ox} 和 V_{Oy} 都已能求出。问题得到最后解决。

为比较文[1]的解和本文的解之间的差别，特以下列实例进行计算。设球质量 $M=0.02$ kg， $\theta_0=5^\circ$ ， $\mu=0.01$ ，球半径 $\rho=0.015$ m， $\dot{\psi}_0=25\text{s}^{-1}$ ， $g=9.8\text{m/s}^2$ 。椭圆余弦函数按截断公式^[2]

$$\begin{aligned} \text{cn}(z, k) = & 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1+4k^2}{4!} z^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!} z^6 \\ & + \frac{1+408k^2+912k^4+64k^6}{8!} z^8 \end{aligned} \quad (4.10)$$

计算之。计算结果如图2~图5所示。由图2和图3可见，文[1]和本文的结果符合得相当好。但

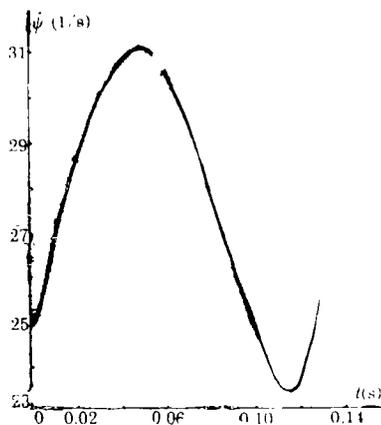


图2 $\dot{\psi}$ 与 t 的关系

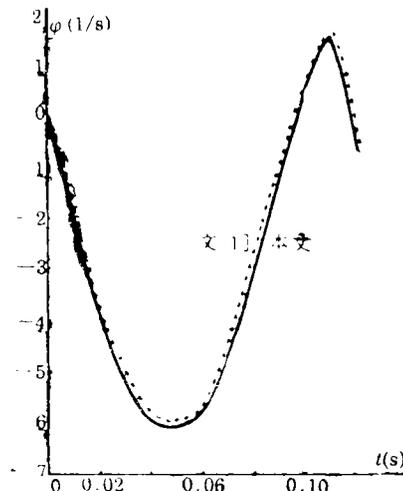
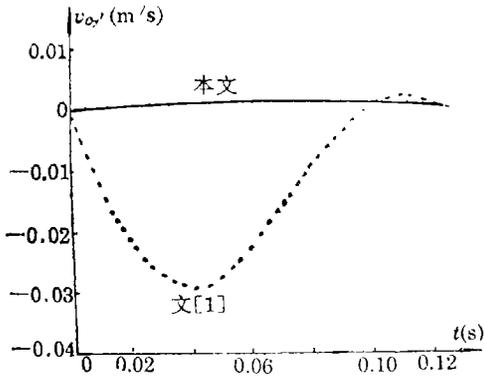
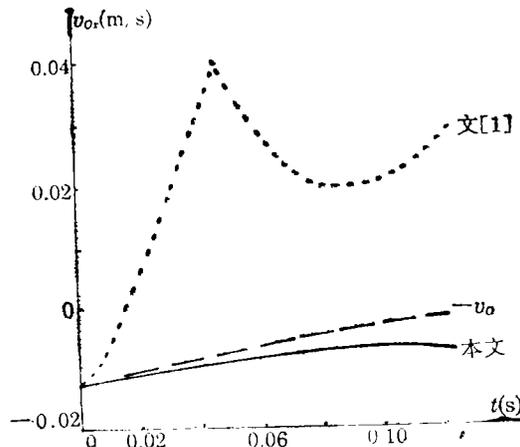


图3 ϕ 与 t 的关系

由图4, 5可见 $V_{Oy'}$ 和 V_{Oz} 两个结果符合得不好. 本文的结果较符合实验, 但也比实验稍大. 这说明忽略章动时, 所求得的速度分量误差较大. 同时也说明在微弱章动及不考虑摩擦力偶的影响时, 自转角速度 $\dot{\psi}$ 只是随时间周期变化, 而没有衰减 (尽管实验证明这种衰减是很微弱的), 这是造成计算所得的速度分量偏大的主要原因. 另外截断误差也是原因之一.

图4 $V_{Oy'}$ 与 t 的关系图5 U_{Oz} 与 t 的关系

五、结 论

1. 文[1]和本文都得到接触点速度按线性规律衰减, 说明此结果与有否章动无关.
2. 速度和角速度的关系为

$$V_{Oz} = -2(\rho\dot{\psi}\sin\theta)/5, \quad V_{Oy'} = -2\rho\dot{\theta}/5$$

3. 球心和接触点速度方向具有不变性, 这已为本文所论证, 且为实验所证实.
4. 通过具体算例的计算, 证实文[1]和本文所得的自转角速度 $\dot{\psi}$ 和进动角速度 $\dot{\phi}$ 符合得很好.

由结论1和结论4可以认为文[1]的结果是一相当好的近似解. 实验和理论都证实周期性现象是这种旋进运动的主要现象. 但由于微弱章动的假设, 以及不考虑摩擦力偶的影响, 所得的 $\dot{\psi}$ 不随时间衰减. 这固然与实验能较好地符合, 但影响了速度分量的计算精度.

5. 通过具体算例的计算, 证实文[1]的速度分量公式误差较大, 说明忽略章动会造成较大的误差. 由于本文是在微弱章动和忽略摩擦力偶影响的假设下, 以及使用了截断公式(4.10)下, 得到的速度分量公式, 因此算得的速度分量仍较速度模量的实验值和计算值为大.

致谢 在此向张存端教授、上海交通大学的吴镇教授和上海市应用数学和力学研究所的戴世强教授致谢. 感谢他们对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

- [1] Yang, J. -Y., The motion of a sphere on a rough horizontal plane, *Journal of Applied Mechanics*, 58(1) (1991), 296—298.
- [2] 王梓坤主编, 《常用数学公式大全》, 重庆出版社 (1991), 469—471.

The Motion of a Sphere with Weak Nutation on a Rough Horizontal Plane

Yang Ji-ying

(Department of Applied Physics, Shanghai Teachers College of Technology, Shanghai)

Abstract

For the motion of a sphere on a rough horizontal plane, in the previous paper [1], the author aimed at providing approximate analytical solutions while the nutation is neglected. In this paper, the control equations for the sphere with nutation have been deduced on the basis of paper [1]. Through the medium of solving these equations, the conclusion for the velocity of contact point in paper [1] is still proved true for the case with nutation. What is more, some interesting results are gained, for example, the velocity of centre and contact point is relative to the angular velocity of spin and nutation, the direction of velocity of centre and contact point is constant. Under the condition which is supposed to be weak nutation, the approximate analytical solutions are obtained, so that the results of paper [1] is proved to be true.

Key words nutation, motion of a sphere, rough plane, contact point