应用数学和力学，第15卷第6期（1994年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一个离散型淋病数学模型的解的稳定性*

金 均

（上海师范大学，1993年3月29日收到）

摘 要

本文采用标量李雅普诺夫函数的方法，研究了一个三维离散型淋病数学模型的解的稳定性，同时给出了稳定域的参数估计，并从理论上解释了这个模型的合理性.

关键词 淋病 离散数学模型 参数估计 稳定域

一、引 言

淋病是一种传染病，最近几年来，由各种原因，此病传播较广，得病人数急增．为此，若能建立合理的淋病模型，从理论上进行研究乃是十分必要．文[1]建立了一个二维的淋病数学模型，并作了简要的讨论．本文研究了一个三维离散型淋病模型的解的稳定性．

考虑三个不同的人群，我们假定一个种群的受传染者不仅能把疾病传染给同一种群的人，而且还能传染给其它种群的易感者．我们还假设病人恢复健康是可能的，但他没有免疫力，且人口是一个常数．用x_i表示种群的N_i被感染率，则$1-x_i$是易感染率，一个简单、合理的离散型模型是

$$\left.\begin{aligned}
x_1(k+1)&=(1-b_1)x_1(k)+a_1x_2(k)(1-x_1(k))+c_1x_3(k)(1-x_1(k))\\
x_2(k+1)&=(1-b_2)x_2(k)+a_2x_1(k)(1-x_2(k))+c_2x_3(k)(1-x_2(k))\\
x_3(k+1)&=(1-b_3)x_3(k)+a_3x_1(k)(1-x_3(k))+c_3x_2(k)(1-x_3(k))
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$0\leqslant a_i\leqslant 1$，$0\leqslant b_i\leqslant 1$，$0\leqslant c_i\leqslant 1$，$0\leqslant x_i\leqslant 1$，$i=1,2,3$．$k=0,1,2,3,\cdots$．为了方便，把(1.1)改写成

$$x(k+1)=Ax(k)+f(x(k))\tag{1.2}$$

其中

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\\x_3(k+1)\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1-b_1 & a_1 & c_1\\ a_2 & 1-b_2 & c_2\\ a_3 & c_3 & 1-b_3\end{bmatrix}$$

$$f(x(k))=\begin{bmatrix}f_1(x_1(k),x_2(k),x_3(k))\\f_2(x_1(k),x_2(k),x_3(k))\\f_3(x_1(k),x_2(k),x_3(k))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1x_1(k)x_2(k)-c_1x_1(k)x_3(k)\\-a_2x_1(k)x_2(k)-c_2x_2(k)x_3(k)\\-a_3x_1(k)x_3(k)-c_3x_2(k)x_3(k)\end{bmatrix}$$

* 蔡树棠推荐．
上海市自然科学基金资助项目

我们采用标量李雅普诺夫函数的方法研究系统(1.1)的零解的稳定性，但是我们改变了习惯的分析增量$\Delta v=v(k+1)-v(k)$的做法，而是采用$v(k+1)$与$v(k)$的关系来研究(1.1)的零解的稳定性，这样显得更为简单、方便.

二、引　理

为了研究系统(1.1)，我们先证明几条引理.

定义　设$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$. 若它们所有元素都满足$a_{ij}\geqslant b_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵$A$不小于矩阵$B$，记作$A\geqslant B$，特别地，若$A$的每一个元素$a_{ij}\geqslant 0$，则称$A$为非负矩阵，记$A\geqslant 0$.

引理1　若$B\geqslant 0$，且$x(k+1)$与$y(k+1)$分别是差分方程

$$x(k+1)\leqslant Bx(k),\ y(k+1)=By(k) \tag{2.1}$$

的解，又$x(0)=y(0)$，则对于任意的$k=0,1,2\cdots$，都有

$$x(k+1)\leqslant y(k+1)$$

证明　设

$$x(k+1)=Bx(k)-u_k \tag{2.2}$$

显然，$u_k\geqslant 0$，由[2]知(2.1)的解可表为

$$y(k+1)=B^{k+1}y(0)=B^{k+1}x(0)$$

而方程(2.2)的解可表为

$$x(k+1)B^{k+1}x(0)-\sum_{i=0}^{k}B^{k-i}u_i=y(k+1)-\sum_{i=0}^{k}B^{k-i}u_i$$

由于$B\geqslant 0$，$u_i\geqslant 0$，所以$x(k+1)\leqslant y(k+1)$. □

引理2　若系统

$$x(k+1)=Ax(k) \tag{2.3}$$

的所有解当$k\to\infty$时有$x(k+1)\to 0$，则系统(2.3)的零解渐近稳定.

证明　由于$x(0)$可以任意选取，(2.3)的所有解都可表示为

$$x(k+1)=Ax(k)=A^k x(0)\triangleq\Phi(k)x(0)$$

因为$\lim\limits_{k\to\infty}x(k+1)=0$，故必存在$M>0$，使得$\|\Phi(k)\|\leqslant M$，$(\forall k=0,1,2,\cdots)$. 则$\|x(k+1)\|\leqslant\|\Phi(k)\|\,\|x(0)\|\leqslant M\|x(0)\|$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta=\varepsilon/M$，当$\|x(0)\|<\delta$时，都有$\|x(k+1)\|\leqslant M\|x(0)\|<\varepsilon$. 于是引理得证. □

引理3　设r是非负矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的极大特征根（即模为最大，且为正的特征根）则

$$r\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$$

证明　见文[3].

三、零解的稳定性

现在我们研究系统(1.1)

$$x(k+1)=Ax(k)+f(x(k)) \tag{3.1}$$

的零解的稳定性．设$\eta=\max\{a_i,c_i,i=1,2,3\}$，$D:0\leqslant x_i(k)\leqslant 1\ (i=1,2,3;k=0,1,2,\cdots)$．则$f_i$在$D$上满足：

$$|f_i(x_1(k),x_2(k),x_3(k))|\leqslant\eta(x_1(k)+x_2(k)+x_3(k))\qquad(i=1,2,3)$$

其中 η是与k 无关的正常数．

令$v_1(k)=x_1^2(k)$，$v_2(k)=x_2^2(k)$，$v_3(k)=x_3^2(k)$，则

$$\begin{aligned}
v_1(k+1)=x_1^2(k+1)&=[(1-b_1)x_1(k)+a_1x_2(k)+c_1x_3(k)\\
&\quad-(a_1x_1(k)x_2(k)+c_1x_1(k)x_3(k))]^2\\
&\leqslant[(1-b_1)x_1(k)+a_1x_2(k)+c_1x_3(k)+\eta(x_1(k)+x_2(k)+x_3(k))]^2\\
&=[(1+\eta-b_1)x_1(k)+(a_1+\eta)x_2(k)+(c_1+\eta)x_3(k)]^2\\
&=[(1+\eta-b_1)^2x_1^2(k)+(a_1+\eta)^2x_2^2(k)+(c_1+\eta)^2x_3^2(k)\\
&\quad+2(1+\eta-b_1)\sqrt{h_{11}}\frac{1}{\sqrt{h_{11}}}(a_1+\eta)x_1(k)x_2(k)\\
&\quad+2(1+\eta-b_1)\sqrt{h_{12}}\frac{1}{\sqrt{h_{12}}}(c_1+\eta)x_1(k)x_3(k)\\
&\quad+2(a_1+\eta)\sqrt{h_{13}}\frac{1}{\sqrt{h_{13}}}(c_1+\eta)x_2(k)x_3(k)]\\
&\leqslant(1+\eta-b_1)^2x_1^2(k)+(a_1+\eta)^2x_2^2(k)+(c_1+\eta)^2x_3^2(k)+(1+\eta-b_1)^2h_{11}x_1^2(k)\\
&\quad+(a_1+\eta)^2\frac{1}{h_{11}}x_2^2(k)+(1+\eta-b_1)^2h_{12}x_1^2(k)+(c_1+\eta)^2\frac{1}{h_{12}}x_3^2(k)\\
&\quad+(a_1+\eta)^2h_{13}x_2^2(k)+(c_1+\eta)^2\frac{1}{h_{13}}x_3^2(k)\\
&=(1+\eta-b_1)^2(1+h_{11}+h_{12})x_1^2(k)+(a_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{11}}+h_{13}\right)x_2^2(k)\\
&\quad+(c_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{13}}\right)x_3^2(k)\\
&=(1+\eta-b_1)^2(1+h_{11}+h_{12})v_1(k)+(a_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{11}}+h_{13}\right)v_2(k)\\
&\quad+(c_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{13}}\right)v_3(k)
\end{aligned}$$

同理可得：

$$\begin{aligned}
v_2(k+1)&\leqslant(a_2+\eta)^2(1+h_{21}+h_{22})v_1(k)+(1+\eta-b_2)^2\left(1+\frac{1}{h_{21}}+h_{23}\right)v_2(k)\\
&\quad+(c_2+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{22}}+\frac{1}{h_{23}}\right)v_3(k)
\end{aligned}$$

$$v_3(k+1)\leqslant(a_3+\eta)^2(1+h_{31}+h_{32})v_1(k)+(c_3+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{31}}+h_{33}\right)v_2(k)$$

$$+(1+\eta-b_3)^2\left(1+\frac{1}{h_{32}}+\frac{1}{h_{33}}\right)v_3(k)$$

考虑辅助方程组

$$\left.\begin{aligned}
v_1^*(k+1)&=(1+\eta-b_1)^2(1+h_{11}+h_{12})v_1^*(k)+(a_1+\eta)^2\\
&\cdot\left(1+\frac{1}{h_{11}}+h_{13}\right)v_2^*(k)+(c_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{13}}\right)v_3^*(k)\\
v_2^*(k+1)&=(a_2+\eta)^2(1+h_{21}+h_{22})v_1^*(k)+(1+\eta-b_2)^2\\
&\cdot\left(1+\frac{1}{h_{21}}+h_{23}\right)v_2^*(k)+(c_2+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{22}}+\frac{1}{h_{23}}\right)v_3^*(k)\\
v_3^*(k+1)&=(a_3+\eta)^2(1+h_{31}+h_{32})v_1^*(k)+(c_3+\eta)^2\\
&\cdot\left(1+\frac{1}{h_{31}}+h_{33}\right)v_2^*(k)+(1+\eta-b_3)^2\left(1+\frac{1}{h_{32}}+\frac{1}{h_{33}}\right)v_3^*(k)
\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)$$

若非负矩阵

$$B=\begin{bmatrix}
(1+\eta-b_1)^2(1+h_{11}+h_{12}), & (a_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{11}}+h_{13}\right), & (c_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{13}}\right)\\
(a_2+\eta)^2(1+h_{21}+h_{22}), & (1+\eta-b_2)^2\left(1+\frac{1}{h_{21}}+h_{23}\right), & (c_2+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{22}}+\frac{1}{h_{23}}\right)\\
(a_3+\eta)^2(1+h_{31}+h_{32}), & (c_3+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{31}}+h_{33}\right), & (1+\eta-b_3)^2\left(1+\frac{1}{h_{32}}+\frac{1}{h_{33}}\right)
\end{bmatrix}$$

的极大特征根$r<1$时，则系统(3.3)的零解是渐近稳定的[2]．故有

$$\lim_{k\to\infty}v_1^*(k)=0,\quad \lim_{k\to\infty}v_2^*(k)=0,\quad \lim_{k\to\infty}v_3^*(k)=0$$

由引理1知：

$$x_1^2(k)=v_1(k)\leqslant v_1^*(k)$$
$$x_2^2(k)=v_2(k)\leqslant v_2^*(k)$$
$$x_3^2(k)=v_3(k)\leqslant v_3^*(k)$$

故有$\lim\limits_{k\to\infty}x_1^2(k)=0,\quad \lim\limits_{k\to\infty}x_2^2(k)=0,\quad \lim\limits_{k\to\infty}x_3^2(k)=0$

于是根据引理2知系统(3.1)的零解是渐近稳定的．这样我们得到下面的

定理 若存在正常数 $h_{ij}(i,j=1,2,3)$，使得B的极大特征根 $r<1$，则系统(3.1)的零解是渐近稳定的．

在定理中，选取不同的h_{ij}，就可得到系统(3.1)的不同的稳定域，并且可以利用多元函数求极值的方法，去确定 h_{ij}的值，使得系统(3.1)的参数 a_i，b_i，c_i 的稳定域最大．这也是我们引进参数h_{ij}的目的．现在我们令

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= (1+\eta-b_1)^2(1+h_{11}+h_{12})+(a_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{11}}+h_{13}\right)\\
&\quad+(c_1+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{13}}\right)\\
\varphi_2 &= (a_2+\eta)^2(1+h_{21}+h_{22})+(1+\eta-b_2)^2\left(1+\frac{1}{h_{21}}+h_{23}\right)\\
&\quad+(c_2+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{22}}+\frac{1}{h_{23}}\right)\\
\varphi_3 &= (a_3+\eta)^2(1+h_{31}+h_{32})+(c_3+\eta)^2\left(1+\frac{1}{h_{31}}+h_{33}\right)\\
&\quad+(1+\eta-b_3)^2\left(1+\frac{1}{h_{32}}+\frac{1}{h_{33}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

当

$$\max\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}<1$$

时，根据引理3，就有定理中的$r<1$，就会保证系统(3.1)的零解渐近稳定．把$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$分别看作是相应的参数$h_{ij}$的多元函数，利用求极值的方法，我们得到

当 $$h_{11}=\frac{a_1+\eta}{1+\eta-b_1},\ h_{12}=\frac{c_1+\eta}{1+\eta-b_1},\ h_{13}=\frac{c_1+\eta}{a_1+\eta}$$

时φ_1取得极小值：

$$\varphi_{1\min}=(1+3\eta+a_1-b_1+c_1)^2$$

当 $$h_{21}=\frac{1+\eta-b_2}{a_2+\eta},\ h_{22}=\frac{c_2+\eta}{a_2+\eta},\ h_{23}=\frac{c_2+\eta}{1+\eta-b_2}$$

时，φ_2取得极小值：

$$\varphi_{2\min}=(1+3\eta+a_2-b_2+c_2)^2$$

当 $$h_{31}=\frac{c_3+\eta}{a_3+\eta},\ h_{32}=\frac{1+\eta-b_3}{a_3+\eta},\ h_{33}=\frac{1+\eta-b_3}{c_3+\eta}$$

时，φ_3取得极小值：

$$\varphi_{3\min}=(1+3\eta+a_3-b_3+c_3)^2$$

此时(3.3)的右端关于参数$a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$可取得最大的变化域．

因为$\max(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)<1$，等价于$\max(\sqrt{\varphi_1},\sqrt{\varphi_2},\sqrt{\varphi_3})<1$，所以我们得到下面的

推论1 如果系统(3.1)满足

$$\max(1+3\eta+a_1-b_1+c_1,\ 1+3\eta+a_2-b_2+c_2,\ 1+3\eta+a_3-b_3+c_3)<1$$

时，则(3.1)的零解是渐近稳定的．

从推论1，可以看出，参数b_i应尽量地接近于1，而a_i，c_i要尽量地小一些，才能确保(3.1)的零解是渐近稳定．事实上，这是符合实际情况的．因为b_i越接近于1，说明被感染者极少，当$b_i\to1$时，感染者几乎绝迹．当a_i，c_i越小时，感染者对易受感染者的影响越小，当$a_i\to0$，$c_i\to0$时，这说明易受感染者几乎不受感染，这当然是传染病趋于消灭．

推论2 当$h_{ij}=1(i,j=1,2,3)$时，使得矩阵

$$B=3\begin{matrix}(1+\eta-b_1)^2 & (a_1+\eta)^2 & (c_1+\eta)^2\\ (a_2+\eta)^2 & (1+\eta-b_2)^2 & (c_2+\eta)^2\\ (a_3+\eta)^2 & (c_3+\eta)^2 & (1+\eta-b_3)^2\end{matrix}$$

的极大特征根$r<1$，则系统(3.1)的零解渐近稳定。

参 考 文 献

[1] Lasalle, J. P.,《动力系统的稳定性》，廖晓昕等译，华中工学院出版社(1983).

[2] Timothy, L. K. and B. E. Bona, *State Space Analysis, an Introduction*, New York, McGrow-Hill (1968), 303—313.

[3] Gantmacher, F.R., *The Theory of Matrices*, Vol.2, New York, Chelsea (1959).

On the Stability of the Solution to a Gonorrhea Discrete Mathematical Model

Jin Jun

(Shanghai Teachers University, Shanghai)

Abstract

In this paper, the author studies the stability of the solution to a three dimensional gonorrhea discrete mathematical model by Liapunov method. The parameter estimator of the stability domain is obtained and the rationality of the model is explained in a theoretic way.

Key words gonorrhea, discrete mathematical model, parameter estimator, stability domain