应用数学和力学，第15卷第6期（1994年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

地形对正压大气Rossby波非线性相互作用的影响*

熊建刚　易　帆　李　钧

（中国科学院武汉物理研究所，1993年5月31日收到）

摘　要

本文采用弱非线性近似，推导出地形和Ekman摩擦共同作用下连续谱正压Rossby波的非线性时空演化方程。根据这组方程，我们研究了窄角谱 Rossby 波包的波波相互作用问题。当一个大振幅 Rossby 波包通过大气传播时，如果它的振幅超过某个阈值，非线性相互作用会使一个尺度比它大的Rossby波包和一个尺度比它小的Rossby波包的振幅随时间指数增长，这两个次级波的本征频率会发生改变。Ekman摩擦、频率不匹配、地形坡度以及波包的空间演变共同决定了主波振幅的阈值及次级波本征频率的改变量。

关键词　地形　Rossby波包　非共振参量不稳定性

一、引　言

行星尺度的Rossby波是与天气变化有关的主要扰动，它的非线性相互作用是大气环流高低指数转换及能谱结构变化的重要因素[1]，因此Rossby波的运动学和动力学性质一直受到人们的关注。在与Rossby波性质有关的诸多因素中，地形对 Rossby 波的发生和发展有明显的影响。自70年代以来，许多作者对此作了深入的研究[2~5]，但这些工作中几乎没有考虑地形与Rossby波非线性相互作用的关系。然而大气能谱结构中含有多种不同尺度的谱成份，在一定条件下，不同谱成份间会发生能量的传输，这些过程必然受到地形的制约。因此，为了更真实地描绘Rossby波的运动图象，有必要讨论地形对 Rossby 波非线性相互作用的影响。

本文将讨论Ekman摩擦和地形共同作用下正压 Rossby 波的非线性相互作用问题。首先我们推导具有连续谱成份的Rossby波在有地形作用的耗散大气中的时空演化方程，然后通过引入平均振幅将这组方程化为窄角谱Rossby波包的三波非线性相互作用方程，并进一步讨论地形对不同尺度Rossby波包之间的非共振激发的影响。

二、正压 Rossby 波谱的非线性时空演化方程

考虑地形影响时，描述正压大气运动的基本方程组可写为

* 周焕文推荐。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}-f\tilde{v}=-\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}+A_v\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}+\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+f\tilde{u}=-\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}+A_v\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[\tilde{u}(\tilde{\varphi}-\varphi_B)]+\frac{\partial}{\partial y}[\tilde{v}(\tilde{\varphi}-\varphi_B)]=0 \tag{2.1c}$$

其中$\tilde{u}$和$\tilde{v}$分别是x，y方向的速度分量，Coriolis参数$f=f_0+\beta y$，流场总压力为$\tilde{P}=\rho_0 gH+\tilde{P}'$，$\rho_0$为背景密度，$H$为流体平均深度，$\tilde{\varphi}=\tilde{P}/\rho_0=gH+\tilde{\varphi}'$，$\varphi_B=gh_B(x,\ y)$、$h_B(x,y)$为地形高度，$A_v$为垂直湍流粘性系数。

显然(2.1)式包含有惯性重力外波和Rossby波，将(2.1)式作准地转近似[1]，滤去惯性重力外波得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(\nabla^2\psi-\lambda_0^2\psi)+\frac{f_0 g}{c_0^2}\left(u\frac{\partial h_B}{\partial x}+v\frac{\partial h_B}{\partial y}\right)=-\mu\nabla^2\psi \tag{2.2}$$

其中$\psi=\tilde{\varphi}'/f_0$为地转流函数，而$u=-\partial\psi/\partial y$，$v=\partial\psi/\partial x$，$\lambda_0^2=f_0^2/gH$，粘性系数

$$\mu=\sqrt{2f_0A_v}/4H \tag{2.3}$$

为了便于量级比较将(2.2)写成如下形式

$$[D_t(\nabla^2-\lambda_0^2)+(\beta+\lambda_y)D_x-\lambda_x D_y]v=-\mu\nabla^2 v-D_x[u(\nabla^2 v)-v(\nabla^2 u)] \tag{2.4a}$$

$$D_x u+D_y v=0 \tag{2.4b}$$

其中$D_t=\partial/\partial t$，$D_x=\partial/\partial x$，$D_y=\partial/\partial y$，而

$$\lambda_x=\frac{f_0 g}{c_0^2}\frac{\partial h_B}{\partial x},\quad \lambda_y=\frac{f_0 g}{c_0^2}\frac{\partial h_B}{\partial y} \tag{2.5}$$

在下面的讨论中λ_x及λ_y均设为常数。在(2.4a)中粘性项与非线性项的量级比为$\mu L/V$，其中L为Rossby波的空间尺度，$L\sim10^6$m，V为波振幅量级，而$\mu\sim10^{-6}\text{s}^{-1}$，对于弱非线性问题$V<10$m/s，因此粘性项与非线性项的量级差别不大，这时不能忽略粘性的作用[6]。

首先略去弱非线性项及弱粘性项，得线性方程

$$[D_t(\nabla^2-\lambda_0^2)+(\beta+\lambda_y)D_x-\lambda_x D_y]v=0 \tag{2.6a}$$

$$D_x u+D_y v=0 \tag{2.6b}$$

将(2.6)式中场量u，v展开为Fourier积分

$$(v,\ u)=\int(\bar{v},\ \bar{u})\exp[i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]d\omega d\boldsymbol{k} \tag{2.7}$$

其中波矢量$\boldsymbol{k}=(l,\ m)$。将(2.7)代入(2.6)得到考虑地形的Rossby波的色散关系及偏振关系

$$D_0(\omega,\ l,\ m)=-i\omega(k^2+\lambda_0^2)-il(\beta+\lambda_y)+im\lambda_x=0 \tag{2.8}$$

$$l\bar{u}=-m\bar{v} \tag{2.9}$$

其中$k^2=l^2+m^2$。对于给定的波矢$\boldsymbol{k}$，由(2.8)知频率取一个确定的值

$$\omega(\boldsymbol{k})=\frac{-(\beta+\lambda_y)l+\lambda_x m}{l^2+m^2+\lambda_0^2} \tag{2.10}$$

设弱非线性弱粘性问题(2.4)的解为

$$(v,\ u)=\int[\bar{v}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r},\ t),\ \bar{u}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r},\ t)]\exp[i(\omega(\boldsymbol{k})t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]d\boldsymbol{k} \tag{2.11}$$

这里$\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)$及$\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)$是$\boldsymbol{r}$及$t$的缓变函数，其变化尺度远大于$\omega^{-1}$及$|\boldsymbol{k}|^{-1}$，即

$$\left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right| \ll |\omega \bar{v}|, \quad \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right| \ll |l \bar{v}|, \quad \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right| \ll |m \bar{v}| \tag{2.12}$$

由于v是实际物理量，应取实值，由(2.11)得

$$\bar{v}(-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) = \bar{v}^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t), \quad \omega(-\boldsymbol{k}) = -\omega(\boldsymbol{k}) \tag{2.13}$$

定义$D(a, b, c) \equiv a(b^2+c^2-\lambda_0^2)+(\beta+\lambda_y)b-\lambda_x c$，由(2.8)式知$D(i\omega, -il, -im) = D_0(\omega, l, m)$. 将(2.11)式代入(2.4a)，左边可以表示为

$$\int \exp[i(\omega(\boldsymbol{k})t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]D\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial t}, -il+\frac{\partial}{\partial x}, -im+\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)d\boldsymbol{k} \tag{2.14}$$

由(2.12)式知，在$(i\omega, -il, -im)$附近展开

$$D\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial t}, -il+\frac{\partial}{\partial x}, im+\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t)$$

时可以仅保留一阶项，即

$$D\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial t}, -il+\frac{\partial}{\partial x}, -im+\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) \approx \left(\frac{\partial D}{\partial a}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial D}{\partial b}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial c}\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) \tag{2.15}$$

其中求导是在$a=i\omega$, $b=-il$, $c=-im$处进行的，因此有

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{\partial D_0}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial a} = -i\frac{\partial D_0}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial D}{\partial b} = i\frac{\partial D_0}{\partial l}, \quad \frac{\partial D}{\partial c} = i\frac{\partial D_0}{\partial m}$$

于是

$$\frac{\partial D/\partial b}{\partial D/\partial a} = -\frac{\partial D_0/\partial l}{\partial D_0/\partial \omega} = \frac{\partial \omega}{\partial l} = V_{gx}(\boldsymbol{k}) \tag{2.16a}$$

$$\frac{\partial D/\partial c}{\partial D/\partial a} = -\frac{\partial D_0/\partial m}{\partial D_0/\partial \omega} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = V_{gy}(\boldsymbol{k}) \tag{2.16b}$$

其中V_{gx}及V_{gy}是x及y方向的群速度. 则(2.15)式化为

$$D\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial t}, -il+\frac{\partial}{\partial x}, -im+\frac{\partial}{\partial y}\right)\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) \approx -i\frac{\partial D_0}{\partial \omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right]\bar{v}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, t) \tag{2.17a}$$

上式中

$$-i\frac{\partial D_0}{\partial \omega} = -(k^2+\lambda_0^2) \tag{2.17b}$$

$$\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k}) = \left[-\frac{(\beta+\lambda_y)(m^2-l^2+\lambda_0^2)+2ml\lambda_x}{(l^2+m^2+\lambda_0^2)^2},\right.$$

$$\left.\frac{2ml(\beta+\lambda_y)+\lambda_x(l^2-m^2+\lambda_0^2)}{(l^2+m^2+\lambda_0^2)^2}\right] \tag{2.17c}$$

由于(2.4a)右边粘性项和非线性项都是弱的，计算(2.4a)的右边时可以略去$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r},\ t)$的时空导数，利用偏振关系(2.9)式，容易得到(2.4a)的右边表达式．从而可将(2.4a)式写为：

$$\int \exp[i(\omega(\boldsymbol{k})t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})][-(k^2+\lambda_0^2)]\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k})\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma(\boldsymbol{k})\right]\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r},\ t)d\boldsymbol{k}$$

$$=i\iint \exp[i(\omega(\boldsymbol{k}_1)+\omega(\boldsymbol{k}_2))t-i(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}]$$

$$\cdot\,\alpha(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{k}_2)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{r},\ t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_2,\ \boldsymbol{r},\ t)d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 \tag{2.18}$$

其中

$$\gamma(\boldsymbol{k})=\mu k^2/(k^2+\lambda_0^2) \tag{2.19a}$$

$$\alpha(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{k}_2)=(l_1+l_2)(m_1/l_1-m_2/l_2)(k_2^2-k_1^2) \tag{2.19b}$$

这里$k_i^2=l_i^2+m_i^2\ (i=1,\ 2)$．用$(2\pi)^{-2}\exp[-i(\omega(\boldsymbol{k}_0)t-\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})]$同乘(2.18)式两边并在平面区域$S$中求积分，我们取$S$的线尺度远大于$|\boldsymbol{k}|^{-1}$，但远小于$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r},\ t)$变化的特征尺度$[|\partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{r}|/|\boldsymbol{v}|]^{-1}$．这是非线性问题中常用的平均方法，可以去掉时空快变因子[7,8]，(2.18)式经平均得

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k}_0)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma(\boldsymbol{k}_0)\right]\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_0,\ \boldsymbol{r},\ t)$$

$$=i\iint \alpha_{012}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{r},\ t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_2,\ \boldsymbol{r},\ t)\exp[i\Delta t]d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_2 \tag{2.20}$$

其中

$$\alpha_{012}=-\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_0)\alpha(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{k}_2)/(k_0^2+\lambda_0^2) \tag{2.21a}$$

$$\Delta=\omega(\boldsymbol{k}_1)+\omega(\boldsymbol{k}_2)-\omega(\boldsymbol{k}_0) \tag{2.21b}$$

利用(2.13)式同样有

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k}_1)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma(\boldsymbol{k}_1)\right]\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{r},\ t)$$

$$=-i\iint \alpha_{120}\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{k}_2,\ \boldsymbol{r},\ t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_0,\ \boldsymbol{r},\ t)\exp[-i\Delta t]d\boldsymbol{k}_2 d\boldsymbol{k}_0 \tag{2.22}$$

其中 $$\alpha_{120}=-\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_0)\alpha(-\boldsymbol{k}_2,\ \boldsymbol{k}_0)/(k_1^2+\lambda_0^2) \tag{2.23}$$

以及

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k}_2)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma(\boldsymbol{k}_2)\right]\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_2,\ \boldsymbol{r},\ t)$$

$$=-i\iint \alpha_{201}\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{r},\ t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}_0,\ \boldsymbol{r},\ t)\exp[-i\Delta t]d\boldsymbol{k}_1 d\boldsymbol{k}_0 \tag{2.24}$$

其中 $$\alpha_{201}=-\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_0)\alpha(\boldsymbol{k}_0,\ -\boldsymbol{k}_1)/(k_2^2+\lambda_0^2) \tag{2.25}$$

由(2.19b)式可得出，当两个谱成份的波矢平行或者波数相等时，$\alpha(\boldsymbol{k}_1,\ \boldsymbol{k}_2)=0$，两谱成份间无相互作用．由(2.21a)看出，能导致波矢为$\boldsymbol{k}_0$的谱成份发生变化的其它谱成份应满足波数守恒条件$\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2$．方程(2.20)、(2.22)及(2.24)是有地形作用下Rossby波的非线性相互作用方程，它们描述了连续宽角谱Rossby波包的振幅和相位的演变关系．

三、地形对窄角谱 Rossby 波包相互作用的影响

考虑中心波矢为$\boldsymbol{k}_0^c$，$\boldsymbol{k}_1^c$及$\boldsymbol{k}_2^c$的三个Rossby波包的相互作用问题，这里$\boldsymbol{k}_0^c=\boldsymbol{k}_1^c+\boldsymbol{k}_2^c$，相应的波包极限$\delta\boldsymbol{k}_0$，$\delta\boldsymbol{k}_1$及$\delta\boldsymbol{k}_2$满足$|\delta\boldsymbol{k}_i|\ll|\boldsymbol{k}_i^c|$ $(i=0,\ 1,\ 2)$，这时波谱分量$\tilde{v}(\boldsymbol{k}_i,\ \boldsymbol{r},\ t)$在$\delta\boldsymbol{k}_i$范围中的变化非常缓慢，将(2.20)、(2.22)、(2.24)分别对$\boldsymbol{k}_0$，$\boldsymbol{k}_1$，$\boldsymbol{k}_2$在窄的扩展$\delta\boldsymbol{k}_i$范围内积分时，可以认为方程中系数均在中心波矢处取值，于是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_{g0}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma_0\right)A_0=is_0A_1A_2\exp[i\Delta t] \tag{3.1a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma_1\right)A_1=is_1A_2^*A_0\exp[-i\Delta t] \tag{3.1b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\gamma_2\right)A_2=is_2A_0A_1^*\exp[-i\Delta t] \tag{3.1c}$$

其中

$$A_j=\int_{Z_j}\tilde{v}(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r},\ t)d\boldsymbol{k}$$

是在波数空间中以$\boldsymbol{k}_j^c$为中心，以$|\delta\boldsymbol{k}_j|$为半径的区域$Z_j(j=0,1,2)$中进行的．$\boldsymbol{V}_{gj}=\boldsymbol{V}_g(\boldsymbol{k}_j^c)$，$\gamma_j=\gamma(\boldsymbol{k}_j^c)(j=0,\ 1,\ 2)$．在以下讨论中将简记$\boldsymbol{k}_j^c=\boldsymbol{k}_j(j=0,\ 1,\ 2)$，并记

$$\alpha_0=\frac{1}{2}(m_1l_2-m_2l_1),\ \ k_j^2=l_j^2+m_j^2,\ \ a_j^2=k_j^2+\lambda_0^2\qquad (j=0,\ 1,\ 2)$$

则

$$s_0=\frac{\alpha_0l_0}{a_0^2l_1l_2}(k_2^2-k_1^2),\ \ s_1=\frac{\alpha_0l_1}{a_1^2l_0l_2}(k_0^2-k_2^2),\ \ s_2=\frac{\alpha_0l_2}{a_2^2l_0l_1}(k_1^2-k_0^2) \tag{3.2}$$

而
$$\gamma_j=\frac{\mu}{1+\lambda_0^2/k_j^2}$$

对于大尺度Rossby波，通常$k_j^2\gg\lambda_0^2$，近似地有

$$\gamma_j\approx\mu\qquad (j=0,\ 1,\ 2) \tag{3.3}$$

令$B_j=e^{\mu t}A_j$，$\tau=(1-e^{-\mu t})/\mu$，$\xi=e^{-\mu t}\boldsymbol{r}$，(3.1)式化为

$$\frac{\partial B_0}{\partial \tau}+\boldsymbol{V}_{g0}\cdot\frac{\partial B_0}{\partial \xi}=is_0B_1B_2\exp[i\Delta t] \tag{3.4a}$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau}+\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial \xi}=is_1B_2^*B_0\exp[-i\Delta t] \tag{3.4b}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \tau}+\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial \xi}=is_2B_0B_1^*\exp[-i\Delta t] \tag{3.4c}$$

设$|B_0|\gg|B_1|$，$|B_2|$，我们可以认为B_0为常值，即

$$\frac{\partial B_0}{\partial \tau}=0,\ \ \frac{\partial B_0}{\partial \xi}=0$$

并记$b_0=B_0=A_0(0, 0)$，由(3.4)式得

$$\frac{\partial B_1}{\partial\tau}+\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\boldsymbol{\xi}}=is_1B_2^*b_0\exp[-i\Delta t] \tag{3.5a}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial\tau}+\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial\boldsymbol{\xi}}=is_2b_0B_1^*\exp[-i\Delta t] \tag{3.5b}$$

由上两式消去B_2得

$$\frac{\partial^2B_1}{\partial\tau^2}+(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\tau}\right)+\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)$$

$$=s_1s_2|b_0|^2B_1-i\Delta e^{\mu t}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\tau}+\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right) \tag{3.6}$$

对于大尺度Rossby波，当t对于μ不太大时，近似地可取$e^{\mu t}=1$[6]，(3.6)式化为

$$\frac{\partial^2B_1}{\partial\tau^2}+(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\partial B_1}{\partial\tau}\right)+\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)-s_1s_2|b_0|^2B_1$$

$$+i\Delta\left(\frac{\partial B_1}{\partial\tau}+\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)=0 \tag{3.7}$$

同样由(3.5)式可得

$$\frac{\partial^2B_2}{\partial\tau^2}+(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\partial B_2}{\partial\tau}\right)+\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\xi}}\left(\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)-s_1s_2|b_0|^2B_2$$

$$+i\Delta\left(\frac{\partial B_2}{\partial\tau}+\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\frac{\partial B_2}{\partial\boldsymbol{\xi}}\right)=0 \tag{3.8}$$

设$B_1=\bar{B}_1\exp[i(\lambda_1\tau-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\xi})]$，$\boldsymbol{M}=(M_1, M_2)$，代入(3.7)得特征方程为

$$\lambda_1^2+[\Delta-(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\boldsymbol{M}]\lambda_1+(\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\boldsymbol{M})[(\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\boldsymbol{M})-\Delta]$$
$$+s_1s_2|b_0|^2=0 \tag{3.9}$$

设$B_2=\bar{B}_2\exp[i(\lambda_2\tau-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\xi})]$代入(3.8)得特征方程为

$$\lambda_2^2+[\Delta-(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\boldsymbol{M}]\lambda_2+(\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\boldsymbol{M})[(\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\boldsymbol{M})$$
$$-\Delta]+s_1s_2|b_0|^2=0 \tag{3.10}$$

比较(3.9)与(3.10)，由于频率失配$\Delta\neq0$，即非共振相互作用问题中，B_1和B_2的特征方程有差异，因此B_1和B_2不稳定增长的条件是不相同的。

记$F=(\boldsymbol{V}_{g1}-\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\boldsymbol{M}$，(3.9)式的判别式

$$\Delta_1=[\Delta-(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\boldsymbol{M}]^2-4(\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\boldsymbol{M})[(\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\boldsymbol{M})-\Delta]-4s_1s_2|b_0|^2$$
$$=(\Delta-F)^2-4s_1s_2|b_0|^2 \tag{3.11a}$$

同样(3.10)式的判别式

$$\Delta_2=[\Delta-(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\boldsymbol{M}]^2-4(\boldsymbol{V}_{g2}\cdot\boldsymbol{M})[(\boldsymbol{V}_{g1}\cdot\boldsymbol{M})-\Delta]-4s_1s_2|b_0|^2$$
$$=(\Delta+F)^2-4s_1s_2|b_0|^2 \tag{3.11b}$$

由于B_j增长的条件是λ_j取复值，由(3.11a)及(3.11b)均可得$s_1s_2>0$是B_1，B_2失稳的必要条件，即

$$(k_0^2-k_2^2)(k_1^2-k_0^2)>0 \tag{3.12}$$

上式表明，只有当初始大幅波的尺度介于两小幅波的尺度之间时，才有可能产生不稳定性。

而$\Delta_j<0$是$B_j(j=1,\ 2)$不稳定的充分必要条件，若记$\lambda_j=p_j+iq_j(j=1,\ 2)$，则

$$p_1=p_2=[\Delta-(\boldsymbol{V}_{g1}+\boldsymbol{V}_{g2})\cdot\boldsymbol{M}]/2 \tag{3.13a}$$

$$q_1^2=s_1s_2|b_0|^2-(\Delta-F)^2/4 \tag{3.13b}$$

$$q_2^2=s_1s_2|b_0|^2-(\Delta+F)^2/4 \tag{3.13c}$$

因此A_j随时间增长的充要条件为

$$q_j^2>\mu^2 \qquad (j=1,\ 2) \tag{3.14}$$

即

$$|b_0|^2>[\mu^2+(\Delta-F)^2/4]/s_1s_2\equiv H_1 \tag{3.15a}$$

$$|b_0|^2>[\mu^2+(\Delta+F)^2/4]/s_1s_2\equiv H_2 \tag{3.15b}$$

参量不稳定性是指一个大幅度主波使两小幅度波同时增长的不稳定性问题[9]，这是人们讨论波波相互作用时感兴趣的问题[8]．因此有地形作用下窄角谱Rossby波包参量不稳定的条件为

$$|b_0|^2>\max(H_1,\ H_2)=[\mu^2+(|\Delta|+|F|)^2/4]/s_1s_2 \tag{3.16}$$

上式右边的值即为发生参量不稳定性的阈值．

记$Q=|\Delta|+|F|$，并定义

$$E_1=\left|\frac{m_1}{a_1^2}+\frac{m_2}{a_2^2}-\frac{m_0}{a_0^2}\right| \tag{3.17a}$$

$$E_2=\left|2M_1\left(\frac{m_2l_2}{a_2^4}-\frac{m_1l_1}{a_1^4}\right)+M_2\left(\frac{m_2^2-l_2^2-\lambda_0^2}{a_2^4}-\frac{m_1^2-l_1^2-\lambda_0^2}{a_1^4}\right)\right| \tag{3.17b}$$

$$F_1=\frac{l_1a_2^2(k_0^2-k_1^2)+l_2a_1^2(k_0^2-k_2^2)}{m_1a_2^2(k_0^2-k_1^2)+m_2a_1^2(k_0^2-k_2^2)} \tag{3.17c}$$

$$F_2=\frac{M_1[a_2^4(m_1^2-l_1^2+\lambda_0^2)-a_1^4(m_2^2-l_2^2+\lambda_0^2)]+2M_2(a_1^4m_2l_2-a_2^4m_1l_1)}{2M_1(a_2^4m_2l_2-a_1^4m_1l_1)+M_2[a_1^4(m_2^2-l_2^2+\lambda_0^2)-a_2^4(m_1^2-l_1^2-\lambda_0^2)]} \tag{3.17d}$$

则可得

$$Q=E_1|\lambda_x-F_1(\beta+\lambda_y)|+E_2|\lambda_x-F_2(\beta+\lambda_y)| \tag{3.18}$$

首先考虑东西向山脊对发生参量不稳定性的阈值的影响，这时地形为南北坡山地，$\lambda_x=0$，因此

$$Q=(E_1|F_1|+E_2|F_2|)|\beta+\lambda_y| \tag{3.19}$$

设$Q_0=Q(\lambda_x=0,\ \lambda_y=0)$．当$\lambda_y>0$或$\lambda_y<-2\beta$时，$Q>Q_0$，Rossby 波包发生参量不稳定性的阈值高于无地形时的阈值；而当$-2\beta<\lambda_y<0$时，地形坡度使阈值减小．

下面考虑南北向山脊对阈值的影响，这时地形为东西坡山地，$\lambda_y=0$．因此

$$Q=E_1|\lambda_x-\beta F_1|+E_2|\lambda_x-\beta F_2| \tag{3.20}$$

上式中Q是λ_x的分段线性函数，由三段构成．由于$E_1>0$及$E_2>0$，当$|\lambda_x|$充分大时，Q是$|\lambda_x|$的增函数，因此除了$Q(\lambda_x=0)=Q_0$外，还有一个$\lambda_x^+>0$或一个$\lambda_x^-<0$使$Q(\lambda_x=\lambda_x^+)=Q_0$或$Q(\lambda_x=\lambda_x^-)=Q_0$，而且当$0<\lambda_x<\lambda_x^+$或$\lambda_x^-<\lambda_x<0$时，$Q<Q_0$，否则$Q>Q_0$．不妨设$F_1>F_2$，$\lambda_x^+$或$\lambda_x^-$的表达式如下：

（1） $F_1>F_2>0$

若$E_2>E_1$ 且$E_2F_2-E_1F_2<2E_2F_2<E_2F_1-E_1F_1$，那么

$$\lambda_x^+=\frac{2\beta E_2F_2}{E_2-E_1}$$

其他条件下

$$\lambda_s^+ = \frac{2\beta(E_1F_1+E_2F_2)}{E_2+E_1}$$

（2） $F_1>0>F_2$

若$E_1 \geqslant E_2$，则

$$\lambda_s^+ = \frac{2\beta E_1F_1}{E_2+E_1}$$

若$E_1<E_2$，则

$$\lambda_s^- = \frac{2\beta E_2F_2}{E_2+E_1}$$

（3） $0>F_1>F_2$

若$E_2<E_1$且$E_1F_2-E_2F_2<2E_1F_1<E_1F_1-E_2F_1$，那么

$$\lambda_s^- = \frac{2\beta E_1F_1}{E_1-E_2}$$

其他条件下

$$\lambda_s^- = \frac{2\beta(E_1F_1+E_2F_2)}{E_2+E_1}$$

当$0<\lambda_s<\lambda_s^+$或$\lambda_s^-<\lambda_s<0$时，东坡或西坡坡度使Rossby 波发生参量不稳定性的阈值比没有地形时的阈值低；当λ_s不满足上述条件时，地形使阈值升高.

考察(3.16)式，除了地形会影响 Rossby 波发生参量不稳定性的阈值外，Ekman摩擦及频率失配也会使阈值增大. 特别地，考虑波包的空间演变时，阈值大于不考虑空间演变时的阈值. 由(3.13a)式知，波包的空间演变及频率失配还会使波包A_1及A_2的本征频率发生变化，改变量由(3.13a)式确定；若不考虑波包的空间演变，A_1的本征频率变为$\omega_1'=\omega_1-\Delta/2$，$A_2$的本征频率变为$\omega_2'=\omega_2-\Delta/2$，新的本征频率满足共振条件$\omega_1'+\omega_2'-\omega_0=0$； 但考虑波包的空间演变时，新的本征频率不一定能满足共振条件. 由(3.13a)式还可看出，波包A_1及A_2的本征频率改变值也与地形有关，不同坡度的地形使本征频率的变化不一样，它们之间的关系比较复杂.

四、结　　论

利用弱非线性理论，本文推导出Ekman摩擦和地形共同影响下连续谱 Rossby 波的非线性时空演化方程，这组方程是研究宽角谱波包和窄角谱波包的演化和相互作用的出发方程. 本文主要讨论了地形对窄角谱波包的非共振参量不稳定性的影响. 结果表明，当一个大振幅Rossby波包通过有地形的大气传播时，两个空间尺度分别比它大和比它小的小振幅波包的振幅出现随时间指数增长，其充分必要条件是主波的振幅超过某个阈值. 损耗、频率失配以及波包的空间演变都会使该阈值提高，而地形对阈值的影响比较复杂，既能提高阈值也能减小阈值. 频率失配和波包的空间演变会使两个被激发的次级波的本征频率发生变化，地形对本征频率的改变值也有影响.

致谢　本文在写作过程中曾与周焕文教授作过有益讨论，特诚致谢意.

参 考 文 献

[1] 刘式适、刘达式，《大气动力学》，北京大学出版社（1991）.

[2] Hart, J. E., Barotropic quasi-geostrophic flow over anisotropic mountains, *J. Atmos. Sci.*, 36 (1979), 1736—1746.

[3] Nathan, T.R., Finite-amplitude interactions between unstable baroclinic waves and resonant topographic waves, *J. Atmos. Sci.*, 45 (1988), 1052—1071.

[4] Pedlosky, J., Resonant topographic waves in barotropic and baroclinic flows, *J. Atmos. Sci.*, 38 (1981), 2626—2641.

[5] 刘式适、谭本馗，地形作用下的非线性Rossby波，应用数学和力学，9(3) (1988), 229—240.

[6] 熊建刚、易帆、李钧，中层耗散大气中 Rossby 波的非线性相互作用理论，地球物理学报，37 (1994).

[7] Tsytovich, V.N., *Nonlinear Effect in Plasma*, Plenum Press, New York-London (1970).

[8] 易帆、李钧、熊建刚，损耗大气中重力波的非线性相互作用理论，地球物理学报，36 (1993), 409—417.

[9] Klostermeyer, J., On the role of parametric instability of internal gravity waves in atmospheric radar observations, *Radio Sci.*, 25 (1990), 983—995.

The Influence of Topography on the Nonlinear Interaction of Rossby Waves in the Barotropic Atmosphere

Xiong Jian-gang Yi Fan Li Jun

(Wuhan Institute of Physics, Academia Sinica, Wuhan)

Abstract

In the frame of weak nonlinear theory, a set of equations depicting the nonlinear interactions of barotropic Rossby waves are derived, the topography and Ekman friction are involved in the equations. Starting from the equations, we investigate the interaction of three Rossby wave packets with narrow-spread in wave vectors. When an intense primary pump Rossby wave with amplitude larger than a threshold propagates through the atmosphere, the amplitude of one Rossby wave packet with scale greater than the primary one and one Rossby wave packet with scale smaller than the primary one grow exponentially through three wave interactions, the intrinsic frequencies of the secondary waves can be varied. The threshold and the variation of the intrinsic frequencies of the secondary waves are related to the Ekman friction frequency dismatch, topography and spatial evolution of the secondary Rossby wave packets.

Key words topography, Rossby waves, non-resonant parametric instability