

# 板在弯曲和薄膜力共同作用下采用 三角形单元, 形成非线性单元 刚度矩阵的公式及算例\*

张建海 李永年 陈大鹏

(西南交通大学, 1992年5月22日收到)

## 摘 要

本文利用Stricklin法<sup>[5]</sup>, 采用三角形单元推导出了板在考虑弯曲和膜薄力的共同作用下的非线性单元刚度矩阵的计算公式, 还以此编制了壳体大挠度问题的计算程序, 进行了算例分析, 与有关文献作了比较。

**关键词** 三角形单元 非线性 刚度矩阵

## 一、引 言

从目前的资料看, 文献[5]给出了假设三角形单元的位移场为线性时, 形成非线性单元刚度矩阵的计算公式, 但由于假设位移场为线性, 忽略了板中弯曲力, C. Brebbia 和 J. Connor<sup>[4]</sup>虽然考虑了弯曲和薄膜力的共同作用, 也计算了四边固支方板的中心挠度曲线, 但他们使用的是矩形单元, 无法灵活应用于具有复杂边界形状的问题中, 例如人工心瓣, 不仅具有复杂边界形状, 而且有必要计算其弯曲及薄膜力场, 故而, 十分必要推导出三角形单元考虑弯曲和薄膜力共同作用时, 形成非线性单元刚度矩阵的计算公式, 本文采用 Stricklin 法, 从应变能非线性项出发, 导出了板在考虑弯曲和薄膜力共同作用下, 三角形单元刚度矩阵中非线性部分  $[K]_{NL}$  中任意子块  $[K_{IJ}]_{NL}$  的计算公式, 并自编了计算程序, 进行了算例分析。

## 二、公式推导

在考虑弯曲和薄膜力共同作用下进行板的大挠度计算时, 选用三角形单元面内位移为线性, 挠度函数为三次函数, 用面积坐标表示如下<sup>[3][4][5]</sup>:

\*国家自然科学基金资助、国家教委博士点基金资助项目。

$$u = \sum L_i u_i, \quad v = \sum L_i v_i$$

$$\omega = [N_i \quad N_{xi} \quad N_{yi} \quad N_j \quad N_{xj} \quad N_{yj} \quad N_m \quad N_{xm} \quad N_{ym}] \{\delta\}$$

其中  $\{\delta\} = [\omega_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \omega_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \omega_m \quad \theta_{xm} \quad \theta_{ym}]^T$

$$N_i = L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_m - L_i L_j^2 - L_i L_m^2$$

$$N_{xi} = b_j L_i^2 L_m - b_m L_i^2 L_j + \frac{1}{2} (b_j - b_m) L_i L_j L_m$$

$$N_{yi} = c_j L_i^2 L_m - c_m L_i^2 L_j + \frac{1}{2} (c_j - c_m) L_i L_j L_m$$

面积坐标  $L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$

几何参数  $a_i = x_j y_m - x_m y_j$ ,  $b_i = y_j - y_m$ ,  $c_i = x_m - x_j$  ( $i, j, m$ )

单元面积  $\Delta = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i)$

特别地记  $b_i, b_j, b_m$  为数组  $b(1:3)$

$c_i, c_j, c_m$  为数组  $c(1:3)$

对一般的几何非线性问题, 面内应变不很大, 若同时考虑板的弯曲效应, 则应变为:

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2} \theta_y^2 - z \theta_{xx}$$

$$\varepsilon_y = e_y + \frac{1}{2} \theta_x^2 - z \theta_{yy}$$

$$e_{xy} = e_{xy} - \theta_x \theta_y - 2z \theta_{xy}$$

其中

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\theta_x = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\theta_{xx} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \theta_{yy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \theta_{xy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}$$

单元总应变能可分为线性及非线性两部分之和, 即:

$$U = U_L + U_{NL} \quad (2.1)$$

因为形成三角形单元在弯曲和薄膜力共同作用时的线性变形单元刚度矩阵的公式是大家所熟知的, 故在此仅需推求非线性部分. 由文献[5], 应变能的非线性部分为:

$$U_{NL} = \frac{c_1}{2} \iint [e_x \theta_y^2 + e_y \theta_x^2 + \nu e_x \theta_x^2 + \nu e_y \theta_y^2 - 2c_2 e_{xy} \theta_x \theta_y + \frac{1}{4} \theta_x^4 + \frac{1}{4} \theta_y^4 + \frac{1}{2} \theta_x^2 \theta_y^2] dx dy \quad (2.2)$$

其中  $c_1 = \frac{Et}{1-\nu^2}$ ,  $c_2 = \frac{1-\nu}{2}$ ,  $E$  为弹性模量,  $t$  为单元厚度,  $\nu$  为泊松比.

由 Stricklin 法知, 单元刚度矩阵的非线性部分为:

$$[K]_{NL} = \begin{bmatrix} \partial^2 U_{NL} \\ i \quad j \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中  $q_i, q_j$  为广义自由度.

由(2.3)式看出，只要将式(2.2)依次对各对应自由度二次偏微分，便可得到单元刚度矩阵非线性部分的任一项。据此，本文推出了 $[K]_{NL}$ 中任意子块 $[K_{IJ}]_{NL}$ ( $I$ 为行块数， $J$ 为列块数)中各元素的计算公式，如图1所示为单元刚度矩阵非线性部分 $[K]_{NL}$ 中子块 $[K_{IJ}]_{NL}$ 中各元素的存放情况。

	$u_j$	$v_j$	$w_j$	$\theta_x$	$\theta_y$
$u_i$	*	*	⊗	⊗	⊗
$v_i$	*	*	⊗	⊗	⊗
$w_i$	★	★	#	#	#
$\theta_x$	★	★	#	#	#
$\theta_y$	★	★	#	#	#

$[K_{IJ}]_{NL}$   
( $I, J=1, 3$ )

图 1

在推导中作如下近似，令 $\theta_x, \theta_y$ 在每个单元内为常数，于是它们与积分号无关。因为 $e_x, e_y, e_{xy}$ 均为 $u, v$ 的一次函数，故二阶导数等于零，图1中代号\*的元素均为零，其它三块中的元素由(2.3)式经推导，可得结果如下：

$$\begin{aligned} \star \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial \omega_i \partial u_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{I_1} \nu b_j - k_{I_2} e_2 e_j) \theta_x + (k_{I_2} b_j - k_{I_1} e_2 e_j) \theta_y] \\ \star \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial \theta_{x_i} \partial u_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{I_3} \nu b_j - k_{I_4} e_2 e_j) \theta_x + (k_{I_4} b_j - k_{I_3} e_2 e_j) \theta_y] \\ \star \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial \theta_{y_i} \partial u_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{I_5} \nu b_j - k_{I_6} e_2 e_j) \theta_x + (k_{I_6} b_j - k_{I_5} e_2 e_j) \theta_y] \\ \star \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial \omega_i \partial v_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{I_1} e_j - k_{I_2} c_2 b_j) \theta_x + (k_{I_2} \nu e_j - k_{I_1} e_2 b_j) \theta_y] \\ \star \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial \theta_{x_i} \partial v_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{I_3} e_j - k_{I_4} e_2 b_j) \theta_x + (k_{I_4} \nu e_j - k_{I_3} e_2 b_j) \theta_y] \\ \star \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial \theta_{y_i} \partial v_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{I_5} e_j - k_{I_6} e_2 b_j) \theta_x + (k_{I_6} \nu e_j - k_{I_5} e_2 b_j) \theta_y] \\ \otimes \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial u_i \partial \omega_j} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{J_1} \nu b_i - k_{J_2} e_2 e_i) \theta_x + (k_{J_2} b_i - k_{J_1} e_2 e_i) \theta_y] \\ \otimes \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial u_i \partial \theta_{x_j}} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{J_3} \nu b_i - k_{J_4} e_2 e_i) \theta_x + (k_{J_4} b_i - k_{J_3} e_2 e_i) \theta_y] \\ \otimes \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial u_i \partial \theta_{y_j}} &= \frac{e_1}{2\Delta} [(k_{J_5} \nu b_i - k_{J_6} e_2 e_i) \theta_x + (k_{J_6} b_i - k_{J_5} e_2 e_i) \theta_y] \\ \otimes \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial v_i \partial \omega_j} &= \frac{c_1}{2\Delta} [(k_{J_1} c_i - k_{J_2} c_2 b_i) \theta_x + (k_{J_2} \nu c_i - k_{J_1} c_2 b_i) \theta_y] \\ \otimes \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial v_i \partial \theta_{x_j}} &= \frac{c_1}{2\Delta} [(k_{J_3} c_i - k_{J_4} c_2 b_i) \theta_x + (k_{J_4} \nu c_i - k_{J_3} c_2 b_i) \theta_y] \\ \otimes \frac{\partial^2 U_{NL}}{\partial v_i \partial \theta_{y_j}} &= \frac{c_1}{2\Delta} [(k_{J_5} c_i - k_{J_6} c_2 b_i) \theta_x + (k_{J_6} \nu c_i - k_{J_5} c_2 b_i) \theta_y] \end{aligned}$$

图1中“#”区元素有通式：

$$\begin{aligned} \# &= c_1 [e_x (P_{1mn} + \nu P_{4mn}) + e_y (P_{4mn} + \nu P_{1mn}) + (P_{2mn} + P_{3mn}) \\ &\quad \cdot (\theta_x \theta_y - c_2 e_{xy}) + \frac{1}{2} (P_{1mn} + 3P_{4mn}) \theta_x^2 + \frac{1}{2} (P_{4mn} + 3P_{1mn}) \theta_y^2] \end{aligned}$$

式中下标 $m, n$ 分别为子块 $[K_{IJ}]_{NL}$ 中元素的行号及列号。

式中系数如下：

$$k_{I1} = \frac{c_I}{2}, \quad k_{I2} = -\frac{b_I}{2}$$

$$k_{I3} = -\frac{1}{12} (-c_J b_J + c_m b_m), \quad k_{I4} = -\frac{1}{12} (-b_J^2 + b_m^2)$$

$$k_{I5} = \frac{1}{12} (-c_J^2 + c_m^2), \quad k_{I6} = -\frac{1}{12} (-b_J c_J + b_m c_m) \quad (I, J, m)$$

$$P_{133} = \frac{1}{4\Delta^2} F_1, \quad P_{233} = -\frac{1}{4\Delta^2} F_2, \quad P_{333} = -\frac{1}{4\Delta^2} F_3, \quad P_{433} = \frac{1}{4\Delta^2} F_4$$

$$P_{134} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_m^I F_5 - b_I^I F_7], \quad P_{234} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_m^I F_6 - b_I^I F_8]$$

$$P_{334} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_m^I F_9 - b_I^I F_{11}], \quad P_{434} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_m^I F_{10} - b_I^I F_{12}]$$

$$P_{135} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_m^I F_5 - c_I^I F_7], \quad P_{235} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_m^I F_6 - c_I^I F_8]$$

$$P_{335} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_m^I F_9 - c_I^I F_{11}], \quad P_{435} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_m^I F_{10} - c_I^I F_{12}]$$

$$P_{143} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I F_{13} - b_m^I F_{15}], \quad P_{243} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I F_{14} - b_m^I F_{16}]$$

$$P_{343} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I F_{17} - b_m^I F_{19}], \quad P_{443} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I F_{18} - b_m^I F_{20}]$$

$$P_{144} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I b_m^I F_{21} - b_J^I b_I^I F_{23} - b_m^I b_m^I F_{25} + b_m^I b_I^I F_{27}]$$

$$P_{244} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I b_m^I F_{22} - b_J^I b_I^I F_{24} - b_m^I b_m^I F_{26} + b_m^I b_I^I F_{28}]$$

$$P_{344} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I b_m^I F_{29} - b_J^I b_I^I F_{31} - b_m^I b_m^I F_{33} + b_m^I b_I^I F_{35}]$$

$$P_{444} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I b_m^I F_{30} - b_J^I b_I^I F_{32} - b_m^I b_m^I F_{34} + b_m^I b_I^I F_{36}]$$

$$P_{145} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I c_m^I F_{21} - b_J^I c_I^I F_{23} - b_m^I c_m^I F_{25} + b_m^I c_I^I F_{27}]$$

$$P_{245} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I c_m^I F_{22} - b_J^I c_I^I F_{24} - b_m^I c_m^I F_{26} + b_m^I c_I^I F_{28}]$$

$$P_{345} = -\frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I c_m^I F_{29} - b_J^I c_I^I F_{31} - b_m^I c_m^I F_{33} + b_m^I c_I^I F_{35}]$$

$$P_{445} = \frac{1}{4\Delta^2} [b_J^I c_m^I F_{30} - b_J^I c_I^I F_{32} - b_m^I c_m^I F_{34} + b_m^I c_I^I F_{36}]$$

$$P_{153} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_I^I F_{13} - c_m^I F_{15}], \quad P_{253} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_I^I F_{14} - c_m^I F_{16}]$$

$$P_{353} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_I^I F_{17} - c_m^I F_{19}], \quad P_{453} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_I^I F_{18} - c_m^I F_{20}]$$

$$P_{154} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I b_m^I F_{21} - c_j^I b_l^I F_{23} - c_m^I b_m^I F_{25} + c_m^I b_l^I F_{27}]$$

$$P_{254} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I b_m^I F_{22} - c_j^I b_l^I F_{24} - c_m^I b_m^I F_{26} + c_m^I b_l^I F_{28}]$$

$$P_{354} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I b_m^I F_{29} - c_j^I b_l^I F_{31} - c_m^I b_m^I F_{33} + c_m^I b_l^I F_{35}]$$

$$P_{454} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I b_m^I F_{30} - c_j^I b_l^I F_{32} - c_m^I b_m^I F_{34} + c_m^I b_l^I F_{36}]$$

$$P_{155} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I c_m^I F_{21} - c_j^I c_l^I F_{23} - c_m^I c_m^I F_{25} + c_m^I c_l^I F_{27}]$$

$$P_{255} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I c_m^I F_{22} - c_j^I c_l^I F_{24} - c_m^I c_m^I F_{26} + c_m^I c_l^I F_{28}]$$

$$P_{355} = -\frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I c_m^I F_{29} - c_j^I c_l^I F_{31} - c_m^I c_m^I F_{33} + c_m^I c_l^I F_{35}]$$

$$P_{455} = \frac{1}{4\Delta^2} [c_j^I c_m^I F_{30} - c_j^I c_l^I F_{32} - c_m^I c_m^I F_{34} + c_m^I c_l^I F_{36}]$$

式中  $b_m^I$ ,  $c_l^I$  等中, 上标对下标有决定作用, 如  $b_m^I$ , 若  $I=1$ , 则  $m=3$ ,  $I=2$  则  $m=1$ ,  $I=3$  则  $m=2$ , 依次类推.  $F_1$  到  $F_{36}$  与子块行列数  $I, J$  有关, 经推导发现这36个系数可用以下六个函数的值表示:

$$f_1[I, J, x(1:3), y(1:3)] = A_1 x_I y_J - 2A_2 x_I - 2A_3 y_J + 4A_4$$

$$f_2[I, J, x(1:3), y(1:3)] = 2A_5 x_I y_J + A_6 x_I y_{J+2} + \frac{1}{2} A_7 x_I - 4A_8 y_J - 2A_9 y_{J+2} - A_{10}$$

$$f_3[I, J, x(1:3), y(1:3)] = 2A_{11} x_I y_J + A_6 x_I y_{J+1} + \frac{1}{2} A_7 x_I - 4A_{12} y_J - 2A_9 y_{J+1} - A_{10}$$

$$f_4[I, J, x(1:3), y(1:3)] = 4A_{13} x_I y_J + 2A_{14} x_I y_{J+2} + 2A_{15} x_{I+2} y_J + A_{16} x_{I+2} y_{J+2} + \frac{1}{2} A_{17} x_{I+2} + A_{18} x_I + A_{19} y_J + \frac{1}{2} A_{20} y_{J+2} + \frac{1}{4} A_{21}$$

$$f_5[I, J, x(1:3), y(1:3)] = 4A_{22} x_I y_J + 2A_{14} x_I y_{J+1} + 2A_{23} x_{I+2} y_J + A_{16} x_{I+2} y_{J+1} + \frac{1}{2} A_{17} x_{I+2} + A_{18} x_I + A_{24} y_J + \frac{1}{2} A_{20} y_{J+1} + \frac{1}{4} A_{21}$$

$$f_6[I, J, x(1:3), y(1:3)] = 4A_{25} x_I y_J + 2A_{26} x_I y_{J+1} + 2A_{23} x_{I+1} y_J + A_{16} x_{I+1} y_{J+1} + \frac{1}{2} A_{17} x_{I+1} + A_{27} x_I + A_{24} y_J + \frac{1}{2} A_{20} y_{J+1} + \frac{1}{4} A_{21}$$

其中 自变量  $I, J$  分别为子块  $[K_{IJ}]_{NL}$  在单元刚度矩阵中的行块数和列块数,  $x(1:3), y(1:3)$  为对应于  $b(1:3)$  或  $c(1:3)$  的数组自变量.

$$F_1 = f_1[I, J, b(1:3), b(1:3)], F_2 = f_1[I, J, b(1:3), c(1:3)]$$

$$F_3 = f_1[I, J, c(1:3), b(1:3)], F_4 = f_1[I, J, c(1:3), c(1:3)]$$

$$F_5 = f_2[I, J, b(1:3), b(1:3)], F_6 = f_2[I, J, b(1:3), c(1:3)]$$

$$F_9 = f_2[I, J, c(1:3), b(1:3)], F_{10} = f_2[I, J, c(1:3), c(1:3)]$$

$$\begin{aligned}
F_7 &= f_3[I, J, b(1:3), b(1:3)], F_8 = f_3[I, J, b(1:3), c(1:3)] \\
F_{11} &= f_3[I, J, c(1:3), b(1:3)], F_{12} = f_3[I, J, c(1:3), c(1:3)] \\
F_{13} &= f_2[J, I, b(1:3), b(1:3)], F_{14} = f_2[J, I, c(1:3), b(1:3)] \\
F_{17} &= f_2[J, I, b(1:3), c(1:3)], F_{18} = f_2[J, I, c(1:3), c(1:3)] \\
F_{15} &= f_3[J, I, b(1:3), b(1:3)], F_{16} = f_3[J, I, c(1:3), b(1:3)] \\
F_{19} &= f_3[J, I, b(1:3), c(1:3)], F_{20} = f_3[J, I, c(1:3), c(1:3)] \\
F_{21} &= f_4[I, J, b(1:3), b(1:3)], F_{22} = f_4[I, J, b(1:3), c(1:3)] \\
F_{29} &= f_4[I, J, c(1:3), b(1:3)], F_{30} = f_4[I, J, c(1:3), c(1:3)] \\
F_{23} &= f_5[I, J, b(1:3), b(1:3)], F_{24} = f_5[I, J, b(1:3), c(1:3)] \\
F_{31} &= f_5[I, J, c(1:3), b(1:3)], F_{32} = f_5[I, J, c(1:3), c(1:3)] \\
F_{25} &= f_5[J, I, b(1:3), b(1:3)], F_{26} = f_5[J, I, c(1:3), b(1:3)] \\
F_{33} &= f_5[J, I, b(1:3), c(1:3)], F_{34} = f_5[J, I, c(1:3), c(1:3)] \\
F_{27} &= f_6[I, J, b(1:3), b(1:3)], F_{28} = f_6[I, J, b(1:3), c(1:3)] \\
F_{35} &= f_6[I, J, c(1:3), b(1:3)], F_{36} = f_6[I, J, c(1:3), c(1:3)]
\end{aligned}$$

系数  $A_1$  到  $A_7$  为:

$$A_1 = \begin{cases} \frac{24}{15} \Delta & (I=J) \\ \frac{19}{15} \Delta & (I \neq J) \end{cases}, A_2 = \begin{cases} \frac{\Delta}{6} y_I & (I=J) \\ \frac{\Delta}{30} (y_I + 2y_J) & (I \neq J) \end{cases}$$

$$A_3 = \begin{cases} \frac{\Delta}{6} x_I & (I=J) \\ \frac{\Delta}{30} (2x_I + x_J) & (I \neq J) \end{cases}$$

$$A_4 = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} [8x_I y_I + x_I y_{I+1} + x_{I+1} y_I + 2x_{I+1} y_{I+1}] & (I=J) \\ \frac{\Delta}{180} [2x_I y_I + x_I y_J + x_J y_I + 2x_J y_J] & (I \neq J) \end{cases}$$

$$A_5 = \begin{cases} \frac{7}{90} \Delta & \left( \begin{cases} I=1 \\ J=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=2 \\ J=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=3 \\ J=2 \end{cases} \right) \\ \frac{\Delta}{9} & (\text{其它}) \end{cases}$$

$$A_6 = \begin{cases} \frac{5}{18} \Delta & (I=J) \\ \frac{13}{90} \Delta & (I \neq J) \end{cases}, A_7 = -\frac{\Delta}{30} y_I$$

$$A_8 = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} [2x_I + x_{I+2}] & (I=J) \\ \frac{\Delta}{180} [2x_I + x_J] & \left( \begin{cases} I=1 \\ J=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=1 \\ J=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=2 \\ J=3 \end{cases} \right) \\ 0 & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_9 = \begin{cases} \frac{\Delta}{20} x_I & (I=J) \\ \frac{\Delta}{180} [x_I + 2x_J] & (I \neq J) \end{cases}$$

$$A_{10} = -\frac{\Delta}{180} [2x_I y_I + x_I y_{I+1} + x_{I+1} y_I + 2x_{I+1} y_{I+1}]$$

$$A_{11} = \begin{cases} \frac{7}{90} \Delta & \left( \begin{cases} I=1 \\ J=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=2 \\ J=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=3 \\ J=1 \end{cases} \right) \\ \frac{\Delta}{9} & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_{12} = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} [2x_I + x_{I+1}] & (I=J) \\ 0 & \left( \begin{cases} I=1 \\ J=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=2 \\ J=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=3 \\ J=1 \end{cases} \right) \\ \frac{\Delta}{180} [2x_I + x_J] & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_{13} = \begin{cases} \frac{\Delta}{90} & (I=J) \\ \frac{\Delta}{180} & (I \neq J) \end{cases}, \quad A_{14} = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} & \left( \begin{cases} I=1 \\ J=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=2 \\ J=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=3 \\ J=1 \end{cases} \right) \\ \frac{\Delta}{60} & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_{15} = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} & \left( \begin{cases} I=1 \\ J=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=2 \\ J=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} I=3 \\ J=2 \end{cases} \right) \\ \frac{\Delta}{60} & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_{16} = \begin{cases} \frac{\Delta}{15} & (I=J) \\ \frac{\Delta}{90} & (I \neq J) \end{cases}, \quad A_{17} = -\frac{\Delta}{90} y_I$$

$$A_{18} = -\frac{\Delta}{180} [y_I + y_{I+2}], \quad A_{19} = -\frac{\Delta}{180} [x_J + x_{J+2}]$$

$$A_{20} = -\frac{\Delta}{90} x_J, \quad A_{21} = \frac{\Delta}{180} [2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2]$$

$$A_{22} = \frac{\Delta}{180}$$

$$A_{23} = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} & \left( \left\{ \begin{matrix} I=1 \\ J=2 \end{matrix} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{matrix} I=2 \\ J=3 \end{matrix} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{matrix} I=3 \\ J=1 \end{matrix} \right\} \right) \\ \frac{\Delta}{60} & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_{24} = -\frac{\Delta}{180} [x_J + x_{J+1}], \quad A_{25} = \begin{cases} \frac{\Delta}{90} & (I=J) \\ \frac{\Delta}{180} & (I \neq J) \end{cases}$$

$$A_{26} = \begin{cases} \frac{\Delta}{180} & \left( \left\{ \begin{matrix} I=1 \\ J=3 \end{matrix} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{matrix} I=2 \\ J=1 \end{matrix} \right\} \text{ 或 } \left\{ \begin{matrix} I=3 \\ J=2 \end{matrix} \right\} \right) \\ \frac{\Delta}{60} & \text{(其它)} \end{cases}$$

$$A_{27} = -\frac{\Delta}{180} [y_I + y_{I+1}]$$

到此我们已得到了形成单元刚度矩阵非线性部分 $[K]_{NL}$ 中任一子块 $[K_{IJ}]_{NL}$ 的全部公式。将此部分与大家所熟知的线性部分 $[K_{IJ}]_L$ 相加(如图2),即可得到板在考虑弯曲和薄膜力共同作用下,三角形单元的单元刚度矩阵中的 $[K_{IJ}]$ 子块。

$$[K_{IJ}] = \begin{array}{|c|c|} \hline * & * \\ * & * \\ \hline \Delta & \Delta \Delta \Delta \\ \Delta & \Delta \Delta \Delta \\ \Delta & \Delta \Delta \Delta \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \otimes & \otimes \otimes \otimes \\ \otimes & \otimes \otimes \otimes \\ \hline \star & \star \star \star \star \\ \star & \star \star \star \star \\ \star & \star \star \star \star \\ \hline \end{array}$$

$[K_{IJ}]_L \qquad \qquad \qquad [K_{IJ}]_{NL}$

图 2

### 三、程序及算例

在以上公式的基础上,还编制了薄壳在弯曲和薄膜力共同作用下的大挠度及内力非线性计算程序。此程序用三角形单元组成的折板系统来代替原来的薄壳。每个单元在其局部坐标下形成非线性单元刚度矩阵,然后转换到整体坐标下,进行整体刚度集成。采用荷载增量法解方程,在求得各节点位移增量之后可进而求得各单元内力增量,最终可求得各单元内力及内力场分布。此程序适用于各种复杂边界条件下的壳体大挠度应力计算。

图3所示为用此程序计算的边长 $2a$ 的四边图定正方形板在承受均布荷载 $P$ 作用下的中心挠度曲线,其中 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ,  $\nu = 0.316$ ,  $a = 8\text{cm}$ ,  $t = 0.2\text{cm}$ 。由于对称,仅研究其 $\frac{1}{4}$ 。

节点数25个,单元32个。图3同时画出了C. Brebbia等用矩形单元计算的结果及钱伟长、



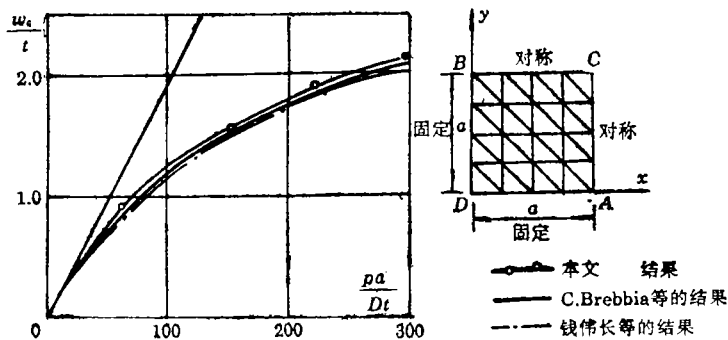


图 3

叶开沅所得结果。可以看出, 三条曲线变化规律相同。说明本文所导出的公式可靠。

#### 四、结 论

本文利用Stricklin法从应变能非线性项出发, 采用三角形单元成功地推出了板在考虑弯曲和薄膜力共同作用下形成非线性大挠度问题的单元刚度矩阵的计算公式。

本文未采用常用的Zienkiewicz法而采用了不多用的 Stricklin 法, 因为使用前一方法, 推导过程将是极繁琐的。

其次, 本文采用的是三角形单元, 它可结合任意形状边界, 这是矩形单元不可比拟的, 同时考虑弯曲和薄膜力, 能够很方便地研究任意形状壳体中的弯曲和薄膜力场分布。虽然本文所推导三角形单元也存在着不足, 例如从它的位移模式可以看出这种单元是一种非协调元, 但算例表明, 其收敛性还是很好的。

#### 参 考 文 献

- [1] Brebbia C. and J. Connor, Geometrically non-linear finite element analysis, *Proc. Am. Soc. Civil Eng*, 95, EM2, (1969), 463—83.
- [2] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd Ed. McGraw-Hill, London (1976).
- [3] 王祖城、汪家才, 《弹性和塑性理论及有限单元法》, 冶金工业出版社, 北京(1983).
- [4] 谢贻权、何福保, 《弹性和塑性力学中的有限单元法》, 机械工业出版社, 北京(1981).
- [5] 欧阳轸、马文华, 《弹性·塑性·有限元》, 湖南科学技术出版社, 长沙(1983), 492—519.
- [6] Glowinski, R., E. Y. Rodin and O. C. Zienkiewicz, *Energy Methods in Finite Element Analysis*, Chichester Wiley. (1979).
- [7] Oden, J. T. and T. Sato, Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method, *Int. J. Solids Structures*, 3, May, (1967), 471—488.

## The Generation of Non-Linear Stiffness Matrix of Triangle Element when Considering Both the Bending and in-Plane Membrane Forces

Zhang Jian-hai   Li Yong-nian   Chen Da-peng

*(Department of Scientific Research, Southwest Jiaotong University, Chengdu)*

### Abstract

Using Stricklin Method<sup>[5]</sup> we have in this paper derived the formulas for the generation of non-linear element stiffness matrix of a triangle element when considering both the bending and the in-plane membrane forces. A computer programme for the calculation of large deflection and inner forces of shallow shells is designed on these formulas. The central deflection curve computed by this programme is compared with other pertaining results.

**Key words** triangular element, non-linear, stiffness matrix