

平面二次系统极限环(1,3)分布的讨论*

蔺小林 党新益

(西北轻工业学院) (西北工业大学)

摘 要

本文(a)对文献[1]中的定理2进行了修正, 取消了假设条件 $\bar{V}_1 > 0$; (b)对曲线 $M(s^2, r) = 0$, $J(s^2, r) = 0$, $L(s^2, r) = 0$, $T(s^2, r) = 0$, $s^2 = s_+^2$ 以及 $s^2 = s_-^2$ 的位置关系进行了讨论, 在保证系统(1.1)具有极限环(1,3)分布的情况下, 扩大了参数 (s, r) 的变化范围, 并用图示给以清晰说明; (c)讨论了一类具有两个无限远奇点的平面二次系统极限环的(1,3)分布; (d)对系统(1.1)不论它在无限远处出现一个、两个或三个奇点, 给出了出现极限环线(1,3)分布的统一处理方法。

关键词 二次系统 极限环

一、对文献[1]中定理2的修正

文献[1]考虑了系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + sx^2 + xy \\ \dot{y} = x + rx^2 + 3sxy + \frac{1-5r}{3}y^2 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 s 及 r 为参数, 在某些条件下极限环线的(1,3)分布, 为了叙述方便起见, 先引入以下记号

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= sr(1+r)[9s^2(2-r) - (5r+2)(1-2r)^2] \\ &= s(-r)(1+r)J(s^2, r) \end{aligned}$$

$$J(s^2, r) = (5r+2)(1-2r)^2 - 9s^2(2-r)$$

$$M(s^2, r) = s^2 + \frac{1}{3}r(5r+2)$$

$$L(s^2, r) = 9s^2 + 12r^2 + 2r - 1$$

$$T(s^2, r) = 1 - 9s^2 - 4r^2$$

$$s_{\pm}^2 = \frac{(4r^2 + 9r + 4) \pm \left| 4(4r+1) \left(r - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \left(r + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \right|}{9(2-r)}$$

及以下引理:

引理1 设 $-\frac{2}{5} < r < 0$ 及 $M(s^2, r) > 0$, 则系统(1.1)在无限远处有三个实奇点, $N_j = (k_j, 1, 0)$ ($j=0, 1, 2$), 且 $k_2 > k_1 > k_0 = 0$, 其中 N_0 及 N_2 为鞍点, N_1 为结点。

* 钱伟长推荐, 1992年2月28日收到

引理2 设 $-\frac{2}{5} < r < 0$, 则系统(1.1)在有限平面上只有两个实奇点 $Q(0,0)$ 和 $A(x_0, y_0)$, 且指数均为 +1.

引理3 设 $-\frac{2}{5} < r < 0$, 则系统(1.1)的奇点 O 与 A 的稳定性相同, 亦即 O 为不稳定, 则 A 亦为不稳定; O 为渐近稳定, 则 A 亦为渐近稳定.

文[1]用待定双曲线的方法, 考虑了无限远处出现三个奇点时极限环的(1,3)分布问题, 给出了如下两个定理:

定理1 对系统(1.1), 设 $s > 0$, $\nabla_7 > 0$, 且有 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, 则系统(1.1)的系数作微小扰动, 可得到极限环的(1,3)分布.

定理2 对系统(1.1), 设 $s > 0$, $\nabla_7 > 0$, 且有 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$ 及 $s^2 < s_2^2$, 则系统(1.1)的系数作微小扰动, 可得到极限环的(1,3)分布.

讨论 $\nabla_7 > 0$ 及 $s^2 < s_2^2$ 的关系, 我们有

命题1 设 $s > 0$, $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$, 且有 $s^2 < s_2^2$, 则必有 $\nabla_7 > 0$.

证 在命题假设条件之下, $\nabla_7 > 0$ 等价于 $J(s^2, r) > 0$, 而 $J(s^2, r) > 0$ 等价于

$$s^2 < \frac{(5r+2)(1-2r)^2}{9(2-r)}$$

而已假设

$$s^2 < s_2^2 = \frac{(4r^2+9r+4) - \left| 4(4r+1)\left(r - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(r + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \right|}{9(2-r)}$$

因而下面我们只要能证明当 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{(4r^2+9r+4) - \left| 4(4r+1)\left(r - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(r + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \right|}{9(2-r)} \\ & < \frac{(5r+2)(1-2r)^2}{9(2-r)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

成立即可.

因为 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$, 对(1.2)式化简可得

$$(4r+1)\left(r - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(r + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) > 0 \quad (1.3)$$

显然(1.3)式在 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$ 内成立, 但应注意: 当 $r = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时, (1.3)式

成为等式, 这时不等式(1.2)成为等式, 故在 $r = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 处, $J(s^2, r) > 0$ 与 $s^2 < s_2^2$ 等价. 总

之, 当 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$ 时, $s^2 < s_2^2$ 足以保证 $J(s^2, r) > 0$, 命题证毕.

由命题 1, 我们有定理:

定理 3 对系统(1.1), 设 $s > 0$, $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq r < -\frac{1}{3}$, 且有 $s^2 < s_+^2$, 则对系统(1.1)的系数作微小扰动, 可得到极限环线的(1,3)分布.

二、六条曲线的位置关系

对六条曲线 $J(s^2, r) = 0$, $L(s^2, r) = 0$, $T(s^2, r) = 0$, $M(s^2, r) = 0$, $s^2 = s_+^2$ 及 $s^2 = s_-^2$ 的位置关系, 我们有如下命题:

命题 2 1) 当 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $-\frac{1}{4} < r < 0$ 时, $J(s^2, r) = 0 \iff s^2 = s_+^2$; 2) 当 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r < -\frac{1}{4}$ 时, $J(s^2, r) = 0 \iff s^2 = s_+^2$.

命题 3 1) 当 $-\frac{1}{3} < r < -\frac{1}{4}$ 时, 有不等式 $9s_-^2 < 1 - 2r - 12r^2 < 9s_+^2$ 成立, 2) 当 $-\frac{1}{4} < r < 0$ 时, 有不等式 $(1 - 4r^2) < (5r + 2)(1 - 2r)^2(2 - r)^{-1} < (1 - 2r - 12r^2)$ 成立, 3) 当 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{1}{4}$ 时, 有不等式 $(5r + 2)(1 - 2r)^2(2 - r)^{-1} < (1 - 4r^2)$ 成立.

命题 4 1) 当 $-\frac{1}{4} < r < 0$ 时, 且有 $T(s^2, r) < 0$, 则必有 $M(s^2, r) > 0$ 成立, 2) 当 $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r < -\frac{1}{4}$ 时, 且有 $J(s^2, r) < 0$, 则必有 $M(s^2, r) > 0$ 成立.

命题 5 当 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时, 有不等式

$$\begin{aligned} 1 - 2r - 12r^2 &< 3(-r)(5r + 2) \\ &< (5r + 2)(1 - 2r)^2(2 - r)^{-1} \\ &< 9s_+^2 < 1 - 4r^2 \end{aligned}$$

成立.

为了节省篇幅, 以上 4 个命题的详细证明过程略去.

我们把六条曲线: $J(s^2, r) = 0$, $L(s^2, r) = 0$, $T(s^2, r) = 0$, $M(s^2, r) = 0$, $s^2 = s_+^2$ 及 $s^2 = s_-^2$ 画在 (s^2, r) 平面上, 其图形如图 1. 在图上我们标出了定理 1、定理 2 以及下面定理 4 到定理 7 的参数 (s, r) 的变化区域.

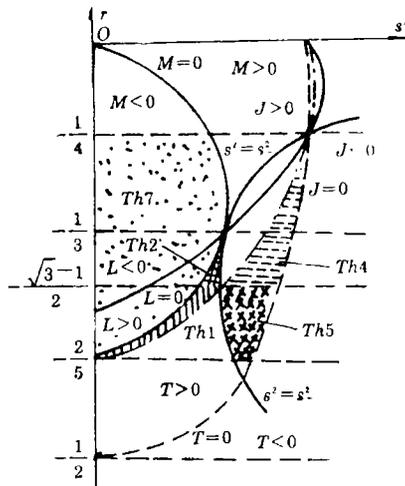


图 1

三、参数(s, r)区域的扩大

根据第二节命题2~5, 我们有如下定理:

定理4 设 $s > 0$, $-\frac{\sqrt{3}-1}{2} < r < -\frac{1}{4}$, 且有 $T(s^2, r) > 0$, $J(s^2, r) < 0$, 则对系统(1.1)

的系数作微小扰动, 可得到极限环线的(1, 3)分布.

证 由命题4的2)知, 在定理假设条件下, $M(s^2, r) > 0$.

为了以下证明方便, 对系统(1.1)作坐标变换: $x = x_1 + 1$, $y = y_1$, 则原系统(1.1)的奇点 $O(0, 0)$ 与 $A(x_0, y_0)$ 分别变为 $O'(-1, 0)$ 及 $A'(x_0 - 1, y_0)$. 原系统(1.1)(我们仍用 x, y 表示 x_1, y_1)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = s + 2sx + sx^2 + xy \\ \dot{y} = (1+r) + (1+2r)x + 3sy + rx^2 + 3sxy + \frac{1-5r}{3}y^2 \end{cases}$$

取双曲线 $F(x, y) = x^2 + ax - kxy - \beta = 0$, 令 $\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0}$ 为定号, 从而有

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \Big|_{F=0} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{F=0} \\ &= \left\{ (2x + a - ky)(s + 2sx + sx^2 + xy) - kx \left[(1+r) + (1+2r)x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3sy + rx^2 + 3sxy + \frac{1-5r}{3}y^2 \right] \right\} \Big|_{F=0} \end{aligned}$$

由 $F=0$ 可得 $y = -\frac{1}{kx}(x^2 + ax - \beta)$, 故

$$\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0} = -\frac{1}{kx} \sum_{j=0}^4 f_j x^j$$

其中 $f_0 = \beta \left[sk - \frac{4-5r}{3}\beta \right]$, $f_1 = 5\beta \left[ks + \frac{1-2r}{3}a \right]$

$$f_2 = sk - (1+r)k^2 + \left(4sk + \frac{2-10r}{3} \right) \beta - \left(3sk\alpha + \frac{1-5r}{3}\alpha^2 \right)$$

$$f_3 = -sk - (1+2r)k^2 - \left(3sk - \frac{1+10r}{3} \right) \alpha$$

$$f_4 = -\left(rk^2 + 2sk - \frac{2+5r}{3} \right)$$

令 $f_0=0$, $f_1=0$, $f_3=0$, 可得:

$$\beta = \frac{3sk}{4-5r}, \quad \alpha = -\frac{3sk}{1-2r}, \quad k = \frac{-8r-2}{1-9s^2-4r^2}s$$

从而 β, α, k 均可由 s, r 决定. 由定理假设条件知 $k > 0$, 此时我们有

$$f_2 = \frac{s(-8r-2)(7-10r+4r^2)J(s^2, r)}{(1-9s-4r^2)^2(1-2r)^2(4-5r)} < 0$$

$$\begin{aligned} \text{又因为 } 1+2r-3s^2 &> 1+2r+\frac{4r^2-1}{3} \\ &= \frac{2}{3}(r+1)(2r+1) > 0, \text{ 故} \end{aligned}$$

$$f_4 = \frac{(1+2r-3s^2)J(s^2, r)}{3(1-9s^2-4r^2)^2} < 0$$

由此我们得到了

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{r=0} = \frac{1}{kx} [f_2x^2 + f_4x^4]$$

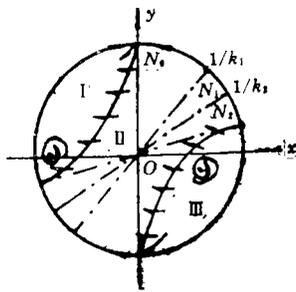


图 2

且有: $x > 0$ 时有 $\left. \frac{dF}{dt} \right|_{r=0} < 0$, $x < 0$ 时有 $\left. \frac{dF}{dt} \right|_{r=0} > 0$. 又由 $\alpha < 0, k > 0, \beta > 0$, 故双曲

线 $F(x, y) = x^2 + \alpha x - kxy - \beta = 0$ 把 $x-y$ 平面分成了三个区域. 如图2所示, 分别用 I, II, III 来标记, 从而在 I, III 内有 $F > 0$, 在 II 内有 $F < 0$, 在 $F=0$ 上, 积分曲线由 III 穿入 II, 由 II 穿入 I.

已知无限远奇点 N_0 在 $F=0$ 上, 下面证明无限远奇点 N_1, N_2 在 II 内. 而由 k_1, k_2 所具有的性质可知只要证明 $k > k_2 > k_1 > k_0 = 0$ 即可. 由引理1知 $k_2 > k_1 > k_0 = 0$, 故下面证明在定理假设条件下有 $k > k_2$.

$$k = \frac{(2+8r)s}{9s^2+4r^2-1}, \quad k_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 + \frac{1}{3}r(5r+2)}}{-r}$$

故 $k > k_2$ 等价于

$$\frac{(9s^2+12r^2+2r-1)s}{1-9s^2-4r^2} > \sqrt{s^2 + \frac{1}{3}r(5r+2)} \quad (3.1)$$

由于已设 $T(s^2, r) = 1 - 9s^2 - 4r^2 > 0, J(s^2, r) < 0$, 易证当 $-\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 < r < -\frac{1}{4}$ 时有 $9s^2 + 12r^2 + 2r - 1 > 0$. 给 (3.1) 式两端平方化简整理可得

$$(54 - 27r)s^4 - (24r^3 + 54r + 24)s^2 + (5r + 2)(4r^2 - 1)^2 > 0$$

$$\text{即 } (54 - 27r)(s^2 - s_+^2)(s^2 - s_-^2) > 0 \quad (3.2)$$

因为 $s_+^2 > s_-^2$, 且 $J(s^2, r) < 0$, 根据命题2的2)知, 此时 $s^2 > s_+^2$, 从而 (3.2) 式成立, 故 $k > k_2$.

由此证明了 N_1, N_2 均在 II 内. 根据引理1及图2向量场的指向可知: 在 I 与 III 内必有奇点, 故 O' 在 I 内, A' 在 III 内. 由 $J(s^2, r) < 0$ 及引理3知 O' 与 A' 均为稳定的奇点. 而无限远奇点 N_0 为鞍点, 故在 I 内有偶数个极限环. 在 III 内有奇数个极限环, 用文[2]中的方法, 对系统 (1.1) 的系数作微小扰动, 可得到极限环线的 (1,3) 分布, 从而定理4证毕.

注 由命题3的3)知定理4的假设条件不自相矛盾.

定理5 对系统(1.1), 设 $s > 0, -\frac{2}{5} < r < -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1$, 且有 $T(s^2, r) > 0, s^2 > s_+^2$, 则

对系统(1.1)的系数作微小扰动, 可得到极限环线的 (1,3) 分布.

定理5的证明完全类似于定理4的证明, 此处从略.

满足定理4, 5的参数 (s, r) 的变化区域已在图1中标出, 显然, 在保证系统 (1.1) 具有极限环线 (1,3) 分布的情况下, 我们扩大了参数变化区域.

四、具有两个无限远奇点平面二次系统极限环线的(1, 3)分布

一) 问题

对平面二次系统

$$\dot{x} = X_2(x, y) \quad \dot{y} = Y_2(x, y) \quad (E_2)$$

文[3]证明了在有限平面内有一个粗焦点及一个三阶细焦点,而在无限远处只有一个单实奇点(鞍点)的情况下,极限环线的(1,3)分布.文[1]在文[3]的基础上,讨论了在无限远处有三个实奇点(一个结点,两个鞍点)的情况下,极限环线的(1,3)分布,且文[1]把文[3]中的无切直线发展为无切双曲线.本文讨论在如下条件之下:

(A) 在有限远处有一个三阶细焦点,一个粗焦点;

(B) 在无限远处有两个奇点(一个鞍点,一个半鞍半结点)

则经过对系数的微小扰动,仍然能保持无限远处只有两个奇点得到系统 (E_2) 极限环线的(1,3)分布.

二) 引理

我们研究无限远处出现两个奇点的情况,为了方便起见,对坐标轴作旋转,使一个无限远点位于 y 轴上,经过这种变换后,系统 (E_2) 可以写成^[4]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -y + sx^2 + xy \triangleq X_2(x, y) \\ \dot{y} &= x + rx^2 + 3xy + \frac{1-5r}{3}y^2 \triangleq Y_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

此处 s, r 为参数.

原点 $O(0,0)$ 显然是方程(1.1)的奇点,由[5]我们可以算出此奇点的焦点量为 $V_1=0, V_3=0, V_5=0, V_7=sr(1+r)[9s^2(2-r)-(5r+2)(1-2r)^2] \neq 0$, 在以下讨论中,令 $s>0$, 不然作变换 $y_1=-y, x_1=x, t_1=-t$ 就可将 s 化为 $-s$.

为了研究无限远奇点的性态,引入射影齐次坐标: $x = \frac{X}{Z}, y = \frac{Y}{Z}$, (x, y) 对应于 (X, Y, Z) , 则 $Z=0$ 即为无限远奇点.

引理1' 设 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{6}{25}$, $s = \sqrt{\frac{1}{3}(-r)(5r+2)}$, 则方程(1.1)在无限远处有两个实

奇点: $N_1(0, 1, 0), N_2(-\frac{s}{r}, 1, 0)$, 其中 N_1 为鞍点, N_2 为半鞍半结点.

证 方程(1.1)在射影齐次坐标下化为

$$\begin{aligned} \frac{dX}{X} & \quad \frac{dY}{Y} & \quad \frac{dZ}{Z} \\ & & = 0 \\ & -YZ + sX^2 + XY & ZY + rX^2 + 3sXY + \frac{1-5r}{3}Y^2 & = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

无限远奇点应满足的方程为

$$\left. \begin{aligned} Z &= 0 \\ X(rX^2 + 2sXY - \frac{2+5r}{3}Y^2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

其中有一根为 $k_0 = \frac{X}{Y} = 0$, 另外两根满足方程

$$f(k) = rk^2 + 2sk - \frac{2+5r}{3} = 0$$

由引理条件知, $f(k) = 0$ 只有一个二重实根 $k_1 = -\frac{s}{r}$, 由于 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{6}{25}$, 故 $k_1 > 0$.

下面讨论奇点 N_1, N_2 的性质.

在方程(4.1)中令 $Y = 1$, 则有

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{\frac{1-5r}{3}Z + 3sXZ + rX^2Z + XZ^2}{-\frac{5r+2}{3}X + Z + 2sX^2 + rX^3 + X^2Z}$$

因 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{6}{25}$, 故 $-\left(\frac{1-5r}{3}\right)\left(\frac{5r+2}{3}\right) < 0$. 从而奇点 N_1 为鞍点. 对奇点 $N_2\left(-\frac{s}{r}, 1, 0\right)$,

作变换 $X_1 = X + \frac{s}{r}, Z_1 = Z$, 变换后的方程仍以 X, Z 记, 则得

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{\frac{5r+7}{3}Z + sXZ - \frac{s}{r}Z^2 + rX^2Z + XZ^2}{-\frac{2(1+r)}{3r}Z - sX^2 - \frac{2s}{r}XZ + ZX^2 + rX^3} \quad (4.2)$$

其中 $s = \sqrt{\frac{1}{3}(-r)(5r+2)}$.

方程(4.2)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \frac{5r+7}{3} - \rho & 0 \\ -\frac{2(1+r)}{3r} & -\rho \end{vmatrix} = \rho\left(\rho - \frac{5r+7}{3}\right) = 0$$

$\rho_1 = 0, \rho_2 = \frac{5r+7}{3}$, 故奇点 $(0, 0)$ 是李雅普诺夫型奇点.

令

$$P(X, Z) = \frac{5r+7}{3}Z + sXZ - \frac{s}{r}Z^2 + rX^2Z + XZ^2$$

$$Q(X, Z) = -\frac{2(1+r)}{3r}Z - sX^2 - \frac{2s}{r}XZ + ZX^2 + rX^3$$

在原点 $(0, 0)$ 处作一小长方形如图 3 所示. 我们来计算 $(0, 0)$ 点的指标 i^0 : 取 $Z = \pm 1, X = \pm \varepsilon (\varepsilon > 0, \varepsilon \ll 1)$ 围成之矩形为 R , 然后令方程(4.2)绕 R 逆时针方向旋转一周计算其负零变到正零的次数 m 和正零变到负零的次数 n ,

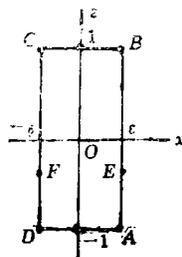


图 3

则奇点 $(0, 0)$ 的指标 $I = \frac{1}{2}(m-n)$.

$$\text{记 } \frac{dZ}{dX} \Big|_R = \frac{P(X, Z)}{Q(X, Z)} \Big|_R.$$

在 \overline{BC} 上, $Z=1, -\varepsilon \leq X \leq \varepsilon$,

$$P(X, 1) = -\frac{5r+7}{3} + (-r) + (1+s)X + rX^2 \neq 0$$

$$Q(X, 1) = -\frac{2(1+r)}{3r} - \frac{2s}{r}X + (1-s)X^2 + rX^3 \neq 0$$

所以沿着 \overline{BC} 有 $m=0, n=0$.

在 \overline{DA} 上, $Z=-1, -\varepsilon \leq X \leq \varepsilon$,

$$P(X, -1) = -\left(\frac{5r+7}{3} + \frac{s}{r}\right) + (1-s)X - rX^2$$

$$Q(X, -1) = \frac{2(1+r)}{3r} + \frac{2s}{r}X - (1+s)X^2 + rX^3$$

依据引理假设条件, 易证 $\frac{5r+7}{3} + \frac{s}{r} > \frac{5-\sqrt{10}}{3} > 0, \frac{2(1+r)}{3r} < 0$, 故 $P(X, -1) \neq 0$,

$Q(X, -1) \neq 0$, 所以沿着 \overline{DA} 有 $m=0, n=0$.

在 \overline{AB} 上, $X=\varepsilon, -1 \leq Z \leq 1$

$$P(\varepsilon, Z) = Z\left(\frac{5r+7}{3} + \varepsilon s + r\varepsilon^2 + \varepsilon Z - \frac{s}{r}Z\right)$$

$$Q(\varepsilon, Z) = -\frac{2(1+r)}{3r}Z - s\varepsilon^2 - \frac{2s}{r}\varepsilon Z + \varepsilon^2 Z + r\varepsilon^3$$

令 $P(\varepsilon, Z)=0$ 可解得 $Z_1=0, Z_2=\left(\frac{5r+7}{3} + \varepsilon s + r\varepsilon^2\right)\left(\frac{s}{r} - \varepsilon\right)^{-1} < 0$, 当 $Z > 0$ 时, $P(\varepsilon, Z) > 0$; 当 $Z_2 < Z < 0$ 时, $P(\varepsilon, Z) < 0$; 当 $-1 \leq Z < Z_2$ 时, $P(\varepsilon, Z) > 0$, 而 $Q(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2(r\varepsilon - s) < 0, Q(\varepsilon, Z_2) < 0$, 所以沿着 \overline{AB} 有 $m=1, n=1$.

在 \overline{CD} 上, $X=-\varepsilon, -1 \leq Z \leq 1$

$$P(-\varepsilon, Z) = Z\left(\frac{5r+7}{3} - \varepsilon s + r\varepsilon^2 - \varepsilon Z - \frac{s}{r}Z\right)$$

$$Q(-\varepsilon, Z) = -\frac{2(1+r)}{3r}z - s\varepsilon^2 + \frac{2s}{r}\varepsilon Z + \varepsilon^2 z - r\varepsilon^3$$

令 $P(-\varepsilon, z)=0$ 可解得 $Z_1^*=0, Z_2^*=\left(\frac{5r+7}{3} - \varepsilon s + r\varepsilon^2\right)\left(\frac{s}{r} + \varepsilon\right)^{-1} < 0$. 当 $Z > 0$ 时, $P(-\varepsilon, Z) > 0$; 当 $Z_2^* < Z < 0$ 时, $P(-\varepsilon, Z) < 0$; 当 $-1 \leq Z < Z_2^*$ 时, $P(-\varepsilon, Z) > 0$. 而 $Q(-\varepsilon, 0) = -\varepsilon^2(s + r\varepsilon) < 0, Q(-\varepsilon, Z_2^*) < 0$, 所以沿着 \overline{CD} 有 $m=1, n=1$.

总之, 方程 (4.2) 沿着 R 逆时针旋转一周, $m=2, n=2$, 所以奇点 $(0, 0)$ 的指标为

$I = \frac{1}{2}(m-n) = 0$. 故由此断定奇点 $(0, 0)$ 为半鞍半结点.

引理 2' 设 $-\frac{2}{5} < r < 0, s = \sqrt{\frac{1}{3}}(-r)(5r+2)$, 则方程 (1.1) 在有限平面上只有两个实

奇点,且指标均为+1.

证 令方程(1.1)第一式为零可解得 $y = \frac{sx^2}{1-x}$, 把它代入方程(1.1)第二式, 注意到引

理假设条件, 则奇点 (x, y) 坐标应满足的方程为

$$x\left\{1+(r-2)x+(1-5r^2-4r)x^2+\frac{25r(1+r^2)}{9}x^3\right\}=0$$

已知 $(0, 0)$ 为方程(1.1)的三阶细焦点, 另外的奇点坐标由三次方程

$$G(x) \triangleq 1+(r-2)x+(1-4r-5r^2)x^2+\frac{25r(1+r^2)}{9}x^3=0$$

确定, 此三次方程有一个单实根的充要条件为

$$F(r) \triangleq 9r^2(5r+2)^2+3r(5r+2)(2-2r-13r^2)+(1-5r)(1+r)^3 > 0$$

对 $F(r)$ 化简可得

$$F(r) = (1+r)^2[(1+4r)^2+9r^2] > 0$$

从而在有限平面内, 方程(1.1)只有两个奇点 $O(0, 0)$ 及 $A(x_0, y_0)$. 且 $A(x_0, y_0)$ 为单实奇点, 结合引理1', 根据全平面的指标定理^[7]可知, 奇点 $A(x_0, y_0)$ 的指标为+1.

引理3' 设 $-\frac{2}{5} < r < 0$, $s = \sqrt{\frac{1}{3}(-r)(5r+2)}$, 则奇点 O 与 A 均为不稳定的奇点.

证 对方程(1.1), 奇点 $O(0, 0)$ 的焦点量 $V_1=0$, $V_3=0$, $V_5=0$, $V_7=s(-r)(1+r)^3(5r+2) > 0$, 从而 $O(0, 0)$ 为三阶不稳定细焦点. 下面证明奇点 $A(x_0, y_0)$ 亦为不稳定奇点. 在 A 点处求方程(1.1)的发散量:

$$\begin{aligned} D(A) &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)\Big|_A = 5sx_0 + \frac{5-10r}{3}y_0 \\ &= \frac{10}{3} \cdot \frac{sx_0(1+r)}{x_0-1} \left[x_0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}\right] \end{aligned}$$

因为奇点 A 的指标为+1, 且为简单实奇点, 故在此处奇点 A 只能为焦点或结点, 其稳定性由 $D(A)$ 的符号确定, $D(A) > 0$, 则 A 为不稳定; $D(A) < 0$, 则 A 为渐近稳定.

由于

$$G(1) = \frac{r^2}{27}(5r+2)^2(1-5r) > 0, \quad G(+\infty) = -\infty,$$

故 $x_0 > 1$. 因为 $-\frac{2}{5} < r < 0$, 故 $D(A)$ 的符号由 $\left[x_0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}\right]$ 而定, 下面证明 $\left[x_0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}\right] > 0$. 由于 $G(x) = 0$ 只有唯一的实根, 而 $G(0) = 1 > 0$, $G(+\infty) < 0$, 故 $G(x)$ 与 $(x_0 - x)$ 同号.

特别当 $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}$ 时 $G\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}\right)$ 与 $(x_0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r})$ 同号. 而 $G\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}\right) = \frac{5r+2}{8(1+r)} > 0$,

故 $\left[x_0 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1+r}\right] > 0$ 因此 $D(A) > 0$, 所以 $A(x_0, y_0)$ 是不稳定的奇点, 从而 O 与 A 均为不稳定的奇点.

三) 定理及其证明

定理6 对方程(1.1), 设 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{1}{3}$, $s = \sqrt{\frac{1}{3}(-r)(5r+2)}$, 则方程(1.1)的系数

经过微小扰动, 可得到极限环线的(1, 3)分布.

证 由引理3'知, 奇点 $O(0, 0)$ 与 $A(x_0, y_0)$ 均为不稳定奇点, 为方便起见作变换 $x_1 = x - 1, y_1 = y$, 方程(1.1)的奇点 $O(0, 0)$ 与 $A(x_0, y_0)$ 变为 $O'(-1, 0)$ 与 $A'(x_0 - 1, y_0)$, 方程(1.1)变为(仍然用 x, y 记 x_1, y_1):

$$\begin{cases} \dot{x} = s + 2sx + sx^2 + xy \\ \dot{y} = (1+r) + (1+2r)x + 3sy + rx^2 + 3sxy + \frac{1-5r}{3}y^2 \end{cases}$$

其中 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{1}{3}$, $s = \sqrt{\frac{1}{3}(-r)(5r+2)}$.

在 $x-y$ 平面上取一双曲线 $F(x, y) = x^2 + ax - kxy - \beta = 0$, α, k, β 为待定常数, 选取这些数使得 $\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0}$ 为定号.

$$\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0} = \frac{1}{kx} \sum_{i=0}^4 f_i x^i$$

其中 $f_0 = \beta \left[sk - \frac{4-5r}{3} \beta \right], f_1 = 5\beta \left[sk + \frac{1-2r}{3} \alpha \right]$

$$f_2 = sk - (1+r)k^2 + \left(4ks + \frac{2-10r}{3} \right) \beta - \left(3sk\alpha + \frac{1-5r}{3} \alpha^2 \right)$$

$$f_3 = -sk - (1+2r)k^2 - \left(3sk - \frac{1+10r}{3} \right) \alpha$$

$$f_4 = - \left(rk^2 + 2sk - \frac{5r+2}{3} \right)$$

令 $f_0=0, f_1=0, f_3=0$ 可得

$$\beta = \frac{3sk}{4-5r}, \alpha = -\frac{3sk}{1-2r}, k = -\frac{(8r+2)s}{2r^2+(1+3r)^2}$$

$$f_2 = \frac{s(-8r-2)(5r+2)(1+r)^3(7-10r+4r^2)}{[2r^2+(1+3r)^2](1-2r)^2(4-5r)}$$

$$f_4 = \frac{(5r+2)(1+r)^3[r^2+(2r+1)^2]}{3[2r^2+(1+3r)^2]^2}$$

由定理假设可知, $\alpha < 0, k > 0, \beta > 0, f_2 > 0, f_4 > 0$, 由此可得到

$$\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0} = \frac{1}{kx} [f_2 x^2 + f_4 x^4]$$

当 $x \neq 0$ 时, $\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0}$ 与 x 同号. 即 $x > 0$ 时, $\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0} > 0$; $x < 0$ 时, $\frac{dF}{dt} \Big|_{F=0} < 0$. 由于 $\alpha < 0,$

$k > 0, \beta > 0$, 故双曲线 $F(x, y) = x^2 + ax - kxy - \beta = 0$ 把 $x-y$ 平面分成三部分, 分别用 I, II, III 标记, 在 I 及 III 内 $F > 0$, 在 II 内 $F < 0$, 在 $F=0$ 上积分曲线由 I 穿入 II, 由 II 穿入 III, 如图 4 所示. 由于 $k = -\frac{(8r+2)s}{2r^2+(1+3r)^2}, k_2 = -\frac{s}{r}$, 依据假设条件易证 $k > k_2 > k_1 = 0$

由上述结论可知 N_2 在 II 内, 而 N_1 在 $F=0$ 上, 即在 I 与 III 的边界上. 由向量场的指向知道与 N_1 相连接的轨线在 I 与 III 内, 如图 4 所示. 这时 I 及 III 内均必有奇点, 而在有限平面

内只有两个奇点,故 $O'(-1, 0)$ 在 I 内, $A'(x_0-1, y_0)$ 在 III 内, 且已知 O' 与 A' 均为不稳定奇点, 从而由 Poincaré-Bendixson 环域原理知, 在 I 内有偶数个极限环, 在 III 内有奇数个极限环, 用文[2]的方法, 对系统(1.1)的系数经过微小扰动, 可得极限环线的(1, 3)分布.

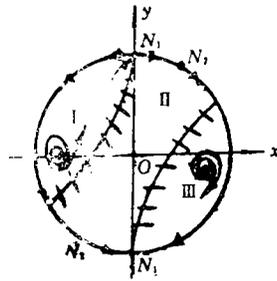


图 4

值得注意的是, 由于无限远奇点 N_2 是高阶奇点(半鞍半结点), 故经过微小扰动后,

N_2 可能分解为两个或消失, 这时就成为文[1]或文[3]的情形, 我们能证明系统(1.1)经过微小扰动, 使奇点 $O(0, 0)$ 变为粗焦点时, 仍然只有两个无限远奇点.

系统(1.1)经过三次微小扰动后的方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lambda x - y + (s + A\epsilon)x^2 + xy + (B\epsilon + C\delta)y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x + \lambda y + rx^2 + (3s + D\epsilon)xy + \left(\frac{1-5r}{3} + E\epsilon\right)y^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)'$$

其中 $C \neq 0$.

为了研究系统(1.1)'的无限远奇点的性态, 我们对(1.1)'作射影齐次坐标变换: $x = \frac{X}{Z}$,

$y = \frac{Y}{Z}$, 则(1.1)'化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{X} & & \frac{dY}{Y} & & \frac{dZ}{Z} \\ \lambda X - YZ + (s + A\epsilon)X^2 + & XZ + \lambda YZ + rX^2 + (3s + D\epsilon)XY + & & & \\ + XY + (B\epsilon + c\delta)Y^2 & + \left(\frac{1-5r}{3} + E\epsilon\right)Y^2 & & & 0 \end{aligned} \right\} = 0$$

无限远奇点应满足的方程为 $(k = \frac{X}{Y})$

$$\left. \begin{aligned} Z &= 0 \\ rk^3 + [2s + (D - A)\epsilon]k^2 + \left(E\epsilon - \frac{2+5r}{3}\right)k - (B\epsilon + c\delta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

对方程(a)作变换:

$$k = U - \frac{2s + (D - A)\epsilon}{3r}$$

则(a)变为

$$U^3 + PU + Q = 0 \quad (b)$$

其中

$$P = -\frac{3r(B\epsilon + C\delta) + [2s + (D - A)\epsilon]^2}{3r^2}$$

$$Q = \frac{2[2s + (D - A)\epsilon]^3 - 27r^2(B\epsilon + C\delta) - 9r[2s + (D - A)\epsilon]\left(E\epsilon - \frac{2+5r}{3}\right)}{27r^3}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ 时, $P \rightarrow -\frac{1}{3r^2}4s^2 = -\frac{4}{9r^2}(-r)(5r+2) < 0$, 故当 ε, δ 充分小时, $P < 0$.

由三次代数方程(b)的判别式 $\Delta = 4P^3 + 27Q^2$ 可知, 当 $\Delta = 0$, $P \neq 0$ 或者 $Q \neq 0$ 时, 方程(b)有一个单实根及一个二重实根, 从而把 P, Q 代入 $\Delta = 0$ 中可解出

$$\delta = \frac{1}{C} \left\{ -B\varepsilon + \frac{1}{27r^2} \left[9r(2s + (D-A)\varepsilon) \left(E\varepsilon - \frac{2+5r}{3} \right) - 2(2s + (D-A)\varepsilon)^3 + 27r^3 \left(-\frac{4}{27}P^3 \right)^{1/2} \right] \right\}$$

因此当 ε 选取后代入上式, 我们可适当选取 A, B, C, D, E , 使由上式决定的 δ 满足要求. 而由 A, B, C, D, E 的任意性, 故 δ 也具有任意性, 因而系统(1.1)经过三次微小扰动后的系统(1.1)' 仍具有两个无限远奇点, 且具有极限环的(1, 3)分布, 定理证毕.

五、无限远处出现不同个数奇点的统一处理方法

对系统(1.1), 当 $-\frac{2}{5} < r < 0$, $M(s^2, r) < 0$ 时, 可用直线作为无切线^[3]把有限平面上的两个奇点分开. 我们断言在此情况下, 也可用双曲线作为无切线, 完全应用本文第四节中定理6的证明方法, 对参数 (s, r) 的存在区域, 我们证明了如下定理:

定理7 对系统(1.1), 设 $-\frac{2}{5} < r < -\frac{1}{4}$, $s > 0$, 且有 $M(s^2, r) < 0$. 则对系统(1.1)的系数作微小扰动, 可得极限环线的(1, 3)分布.

证明过程从略.

在图1中, 我们已标出了定理1 定理2 及定理7中参数 (s, r) 的存在区域, 而定理6中参数 (s, r) 的变化范围正好是定理1, 定理2 与定理7的公共边界, 从而在宏观上清晰地表明了第四节讨论的是临界情形, 同时也说明了定理6的正确性.

根据定理1~7的证明, 我们得出对系统(1.1), 无论无限远处出现一个、两个或三个奇点, 我们均可用“待定双曲线”这个统一的方法进行处理, 从而得到了处理这类问题方法上的统一性.

参 考 文 献

- [1] 秦元勋、索光俭、杜星福, 关于平面二次系统极限环(Ⅱ), 中国科学(A辑), 4(1983), 417—425.
- [2] 秦元勋、蒲富全, 数学学报, 9(1959), 213—226.
- [3] 秦元勋、史松龄、蔡燧林, 中国科学, 8(1981), 929—938.
- [4] 李承治, 北京大学数学系1981年全国微分方程定性理论会议资料, 148—172.
- [5] 中国科学(A辑), 12(1982), 1087—1096.
- [6] Jordan, D. M. and P. Smith, Nonlinear Ordinary Differential Equations, Oxford University Press (1977).
- [7] 秦元勋, 《微分方程所定义的积分曲线》(上册), 科学出版社(1959).

On the (1, 3) Distributions of Limit Cycles of Plane Gaudratic Systems

Lin Xiao-lin

(Northwest Institute of Light Industry, Xianyang)

Dang Xin-yi

(Northwest University, Xi'an)

Abstract

In this PaPer, (a) we revise the theorem 2 of reference [1], omit the condition $\bar{V}_1 > 0$, (b) we discuss the relative Positions of six curves $M(s^2, r) = 0$, $J(s^2, r) = 0$, $L(s^2, r) = 0$, $T(s^2, r) = 0$, $s^2 = s_+^2$ and $s^2 = s_-^2$. Under the condition of the (1,3) distributions of limit cycles, we expand the variable regions of Parameters (s, r) and clearly show them in figure, (c) we study the (1,3) distributions of limit cycles of one kind quadratic systems with two singular Points at the infinite, and (d) we give a general method to discuss the (1,3) distributions of limit cycles of system (1) whatever there is one, two or three singular Points at the infinite.

Key words quadratic system, limit cycle