

一类不可压缩材料平面应力问题的 裂纹尖端场*

石志飞** 高玉臣

(哈尔滨船舶工程学院)

(钱伟长推荐, 1993年10月31日收到)

摘 要

本文采用完全非线性弹性理论, 研究了一类不可压缩橡皮类材料^[1]在 I 型荷载作用下的平面应力问题。指出裂尖变形由两个收缩区和一个扩张区三部分组成。裂纹尖端应力、应变分别具有 R^{-1} 、 $R^{-1/n}$ 的奇异性, 当趋近裂尖时, 厚度以 $R^{1/n}$ 的方式趋于零, n 为材料常数。

关键词 不可压缩材料 平面应力 裂纹尖端场 完全非线性弹性理论

一、引 言

在断裂力学中, 裂纹尖端域是一个非常重要的问题。对于绝大部分工程材料, 小应变和有限应变理论已足够, 但是, 对于橡皮类材料, 它能够承受非常大的变形, 对这种材料裂尖场的研究, 就必须采用大变形理论。研究大变形断裂力学问题, 首先得解除三个障碍: 第一, 给出一个恰当的弹性本构关系, 它不仅在小应变时成立, 它同时还能应用于有限应变和无限大变形; 第二, 选择一个适当的公式来描述橡皮类材料固有的非线性几何关系; 第三, 构造恰当的裂尖场。正是由于困难重重, 这方面的文章现在还并不太多。在文 [2, 3] 中, Knowles 和 Sternberg 给出了在 I 型荷载作用下, 平面应变问题裂尖场的渐近分析。但是 [2, 3] 中引进了三个常数, 使得渐近解很复杂。除此之外, 由于 [2, 3] 中的裂尖场没有分成收缩区和扩张区, 因此必须进行高阶渐近分析。高玉臣^[4, 5]采用文 [1] 中提出的新的本构关系, 分别研究了平面应变和平面应力裂纹问题, 由于文 [1] 提出的本构关系更合理, 所以文 [4, 5] 得到了非常简捷的结果。

本文对一类不可压缩材料, 研究了 I 型荷载作用下的平面应力裂纹问题, 所得结果与 $s \rightarrow \infty$ 时 [5] 的结果相一致。

二、基本关系

在 Lagrange 坐标系中, 用 $X^I (I=1, 2, 3)$ 代表典型点的坐标, 典型点变形前和变形后

* 国家自然科学基金资助课题。

** 现哈尔滨工业大学。1991年5月31日第一次收到。

的位置矢量则分别用 \mathbf{P} 和 \mathbf{p} 表示, 现定义两种局部标架如下:

$$\mathbf{P}_I = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial X^I}, \quad \mathbf{p}_I = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial X^I} \quad (2.1)$$

变形梯度张量给出如下

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_I \otimes \mathbf{P}^I = \mathbf{p}_I \mathbf{P}^I \quad (2.2)$$

其中 \mathbf{P}^I 为 \mathbf{P}_I 的共轭标架, 求和约定适用于本文. 下面并矢符号 \otimes 将省略.

Green应变张量和Cauchy应变张量分别定义为

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = (\mathbf{p}_I \cdot \mathbf{p}_J) \mathbf{P}^I \mathbf{P}^J, \quad \mathbf{d} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = (\mathbf{P}^I \cdot \mathbf{P}^J) \mathbf{p}_I \mathbf{p}_J \quad (2.3)$$

这里角标 T 代表转置. 用 \mathbf{E} 代表单位并矢张量, 则应变张量的不变量为

$$I_1 = \mathbf{D} : \mathbf{E} = \mathbf{d} : \mathbf{E}, \quad I_2 = \mathbf{D}^2 : \mathbf{E} = \mathbf{d}^2 : \mathbf{E}, \quad I_3 = \mathbf{D}^3 : \mathbf{E} = \mathbf{d}^3 : \mathbf{E} \quad (2.4)$$

式中“:”代表双点乘. 为方便起见, 重新定义两个应变不变量以替代 I_2 和 I_3 .

$$I_2^* = \frac{1}{2} (I_1^2 - I_2), \quad I_3^* = \frac{1}{6} (I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3) \quad (2.5)$$

对不可压缩材料文[1]给出的应变能密度化为

$$U = a(I_1^n - 3^n) \quad (2.6)$$

其中参数 a 和 n 为材料指数. 由(2.6)可得Cauchy应力 $\boldsymbol{\tau}$ 为

$$\boldsymbol{\tau} = 2naI_1^{n-1} \mathbf{d} + e\mathbf{E} \quad (2.7)$$

式中 e 为特定常数.

由平衡要求得

$$\left(\mathbf{p}^I \frac{\partial}{\partial x^I} \right) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.8)$$

三、裂纹尖端的收缩区

如图1所示, 考虑一个含有半无限长裂纹的弹性薄板, 由于几何形状和受力情况都是对称的, 故可只考虑上半平面. 由图1可见, 裂尖由三部分 Ω_1 、 Ω_1' 和 Ω_2 构成, 变形前如图1(a)所示, 变形后如图1(b)所示. 裂尖变形具有下面特性: Ω_1 和 Ω_1' 的角度将减小而 Ω_2 的角度将增大, 故 Ω_1 (Ω_1')区和 Ω_2 区分别称为收缩区和扩张区.

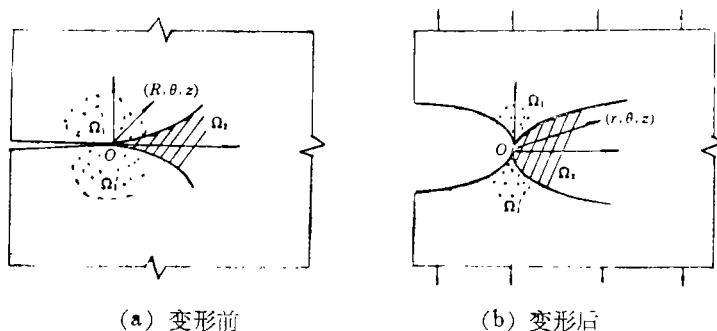


图1 变形模型

将坐标原点设置在裂纹尖端，在变形前的薄板平面内建立极坐标 (R, Θ) ，板的法向为 z 轴方向，在变形后的薄板平面内建立极坐标 (r, θ) ，板的法向为 z 轴方向。下面将分别讨论 $\Omega_1(\Omega_1')$ 和 Ω_2 中的解。

设 Θ_0 为非常小的一个正数，对于 Ω_1 中的任一角度满足 $\Theta_0 < \Theta \leq \pi$ ，变形前与变形后的坐标具有下面关系

$$\left. \begin{aligned} r &= R^{1-\delta} \varphi(\Theta) \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - R^\gamma \psi(\Theta) Z \\ z &= R^t \eta(\Theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 δ, γ 和 t 为正常数，由 (2.1) 和 (3.1) 可得局部基矢量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_R &= R^{-\delta} \varphi [(1-\delta) \mathbf{e}_r - \gamma R^\gamma \psi \mathbf{e}_\theta] + R^{t-1} t \eta z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{p}_\theta &= R^{1-\delta} [\varphi' \mathbf{e}_r - R^\gamma \varphi \psi' \mathbf{e}_\theta] + R^t \eta' z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{p}_z &= R^t \eta \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中
$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \theta}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \quad (3.3)$$

分别为沿 r, θ, z 方向的单位矢量。考虑到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}^R \cdot \mathbf{P}^R &= 1, \quad \mathbf{P}^\theta \cdot \mathbf{P}^\theta = R^{-2}, \quad \mathbf{P}^z \cdot \mathbf{P}^z = 1 \\ \mathbf{P}^I \cdot \mathbf{P}^J &= 0, \quad I \neq J \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

在只保留主项时有

$$\mathbf{d} = R^{-2\delta} [I \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - R^\gamma p (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r) + R^{2\gamma} q \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta] + R^{2t} \eta^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= R^{-2\delta} I \\ I_2^* &= R^{-2(2\delta-\gamma-t)} \eta^2 J^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

其中
$$\left. \begin{aligned} I &= (1-\delta)^2 \varphi^2 + \varphi'^2 \\ p &= \varphi [\gamma(1-\delta) \varphi \psi + \varphi' \psi'] \\ q &= \varphi^2 (\gamma^2 \psi^2 + \psi'^2) \\ J &= \varphi [\gamma \varphi' \psi - (1-\delta) \varphi \psi'] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

对不可压缩材料，有

$$\gamma + t = 2\delta, \quad \eta = J^{-1} \quad (3.8)$$

对于平面应力问题，由 $\tau^{zz} = 0$ 可得

$$\mathbf{e} = -2naI^{n-1} R^{-(2n-1)\delta+2t} \eta^2 \quad (3.9)$$

则变为

$$\boldsymbol{\tau} = 2naI^{n-1} R^{-2(n-1)\delta} (\mathbf{d} - R^{2t} \eta^2 \mathbf{E}) \quad (3.10)$$

进一步假设薄板厚度方向与 Θ 方向变形具有相同阶的奇异性，即

$$\frac{r \Delta \theta}{R \Delta \Theta} \sim Z \quad (3.11)$$

考虑到 (3.1) 式有

$$t = \gamma - \delta \quad (3.12)$$

再由 (3.8) 和 (3.12) 即可求得

$$\gamma = 3\delta/2, \quad t = \delta/2 \quad (3.13)$$

这样Cauchy应力张量具有分量

$$\left. \begin{aligned} \tau^{rr} &= 2naR^{-2n\delta} I^n \\ \tau^{r\theta} &= -2naR^{-2(n-1)\delta - \delta/2} I^{n-1} p \\ \tau^{\theta\theta} &= 2naR^{-2(n-1)\delta + \delta} I^{n-1} (q - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

由(3.1)可求得微分算符

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\varphi}{J} R^\delta \left(-\psi' \frac{\partial}{\partial R} + \gamma \psi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{1}{J} R^{\delta-\gamma} \left(-\varphi' \frac{\partial}{\partial R} + (1-\delta) \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$$\text{平面应力问题的平衡方程在收缩区具有形式 } \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (R^t \eta \tau) + \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (R^t \eta \tau) = 0$$

借助于(3.14)和(3.15), 经过非常冗长的计算可得关于 φ 和 ψ 的两个二阶微分方程

$$\left. \begin{aligned} &[\varphi'' + (1-\delta)^2 \varphi] \left[\frac{2(n-1)\varphi'^2}{I} + 1 \right] - 2(n-1)(1-\delta) \delta \varphi = 0 \\ &\left[1 + \frac{3(1-\delta)^2 \varphi^2}{J^4} \right] \left[\psi'' + \frac{2\varphi' \psi'}{\varphi} + (1-\delta) \gamma \psi \right] + \left[1 + \frac{\delta}{2} - 2\delta(n-1) \right] \gamma \psi \\ &+ 4(n-1)^2 (1-\delta) \delta \cdot \frac{\varphi \varphi' \psi'}{I + 2(n-1)\varphi'^2} + \frac{1}{J^3} Y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

其中

$$Y = \frac{\varphi'}{\varphi} [2(n-1)\delta - \gamma] + \frac{4(n-1)^2 (1-\delta)^2 \delta \varphi \varphi'}{I + 2(n-1)\varphi'^2} - \frac{3\gamma(1-\delta)}{J} \left[\frac{2(n-1)(1-\delta)\delta \varphi^2 \psi p_1}{I + 2(n-1)\varphi'^2} + \varphi'(\varphi \psi' + \varphi' \psi) \right]$$

借助(3.2)式, (3.10)式可改写为

$$\begin{aligned} \tau &= 2naI^{n-1} R^{-2n-1\delta} \left\{ \mathbf{p}_R \mathbf{p}_R + \frac{1}{R^2} \mathbf{p}_\Theta \mathbf{p}_\Theta - \frac{1}{J^4} \left[\varphi'^2 \mathbf{p}_R \mathbf{p}_R + \frac{(1-\delta)^2 \varphi^2}{R^2} \mathbf{p}_\Theta \mathbf{p}_\Theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(1-\delta)\varphi\varphi'}{R} (\mathbf{p}_R \mathbf{p}_\Theta + \mathbf{p}_\Theta \mathbf{p}_R) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

由(3.17)可将自由表面裂纹边界条件 $\tau^{\theta\theta}(\pi) = \tau^{R\theta}(\pi) = 0$ 具体写为

$$\varphi'(\pi) = 0, \left[1 - \frac{(1-\delta)^2 \varphi^2}{J^4} \right] \Big|_{\Theta=\pi} = 0 \quad (3.18)$$

方程(3.6)与(3.18)以及(5.1)一起构成一特征值问题。图2和图3分别给出了各种 n 值下的 $\varphi(\Theta)$, $\varphi'(\Theta)$ 和 $\psi(\Theta)$, $\psi'(\Theta)$ 值随 Θ 的变化。

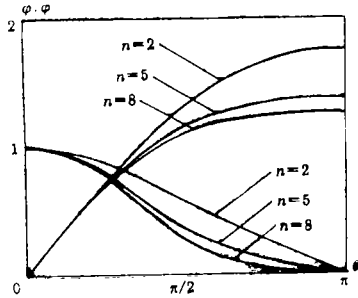


图2 φ, φ' 随 Θ 的变化

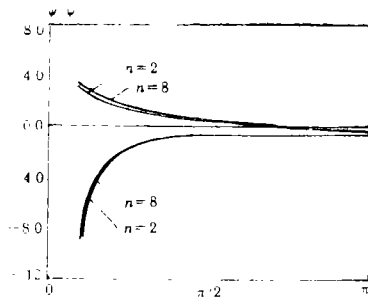


图3 ψ, ψ' 随 Θ 的变化

四、裂纹尖端的扩张区 Ω_2

前面的分析仅适用于收缩区 Ω_1 ，而当 $\Theta \rightarrow 0$ 时 Ω_2 区域中的特性，还需重新分析在 $\Theta = 0$ 附近，变形前与变形后的坐标具有如下关系

$$\left. \begin{aligned} r &= R^{1+\beta} \rho(\xi) \\ \theta &= \frac{\pi}{2} - \omega(\xi) \quad \xi = \Theta \cdot R^{-\alpha} \\ z &= R^{t^*} \eta^* Z \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中 α, β 和 t^* 为正常数，由 (2.1) 和 (4.1) 可得

$$\left. \begin{aligned} p_R &= R^\beta \{ [(1+\beta)\rho - \alpha\xi\rho'] e_r + \alpha\xi\rho\omega' e_\theta \} + R^{t^*-1} (t^*\eta^* - \alpha\xi\eta'^*) Z e_z \\ p_\theta &= R^{\beta-\alpha+1} (\rho' e_r - \rho\omega' e_\theta) + R^{t^*-\alpha} \eta'^* Z e_z \\ p_z &= R^{t^*} \eta^* e_z \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

只保留主要项时可得 Cauchy 应变张量及其两个不变量为

$$\begin{aligned} d &= R^{2(\beta-\alpha)} [\rho'^2 e_r e_r + \rho^2 \omega'^2 e_\theta e_\theta \\ &\quad - \rho\rho'\omega' (e_r e_\theta + e_\theta e_r)] + R^{2t^*} \eta^{*2} e_z e_z \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= R^{2(\beta-\alpha)} u \\ I_3^* &= R^{2(2\beta-\alpha+t^*)} v^2 \eta^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$$\text{其中 } u = \rho'^2 + \rho^2 \omega'^2, \quad v = -(1+\beta)\rho^2 \omega' \quad (4.5)$$

对不可压缩材料，有

$$t^* = \alpha - 2\beta, \quad \eta^* = v^{-1} \quad (4.6)$$

由平面应力条件 $\tau_{zz} = 0$ 可得

$$e = -2n\alpha R^{2\beta-\alpha-1} R^{2(n-1)(\beta-\alpha)} + 2t^* \eta^{*2} \quad (4.7)$$

这样 Cauchy 应力 τ 成为

$$\tau = 2n\alpha R^{2\beta-\alpha-1} (\beta-\alpha) u^{n-1} \hat{d} \quad (4.8)$$

其中

$$\hat{d} = \rho'^2 e_r e_r + \rho^2 \omega'^2 e_\theta e_\theta - \rho\rho'\omega' (e_r e_\theta + e_\theta e_r) \quad (4.9)$$

进一步假设收缩区与扩张区具有相同阶的变形特性，并且扩张区的应力能与收缩区的应力相匹配，因此有

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 2(\alpha - 2\beta) \\ \delta &= \alpha - \beta \end{aligned} \right\}$$

$$\text{则 } \alpha = 3\beta = \frac{3}{2}\delta = 3t^* \quad (4.10)$$

由(4.1)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{R^{-\beta}}{(1+\beta)\rho} \frac{\partial}{\partial R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{R^{-\beta}}{v} \left(-\rho' \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1+\beta}{R} \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

由(2.8)、(4.8)和(4.11)可得关于 ρ 和 ω 的微分方程

$$\left. \begin{aligned} \rho'' - \rho\omega'^2 &= 0 \\ \omega'' + 2\rho'\omega'/\rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

(4.12)式具有解析解, 根据对称性要求

$$\rho'(0) = 0, \quad \omega(0) = \frac{\pi}{2} \quad (4.13)$$

这解可表示为

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 (c^2 \xi^2 + 1)^{1/2} \\ \omega &= \frac{2}{\pi} - \text{arctg}(c\xi) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

其中 ρ_0 和 c 均为常数.

五、区域的匹配

收缩区 Ω_1 与扩张区 Ω_2 不应当彼此孤立, 就是说, 在 $\Theta \rightarrow 0$ 时的收缩区应与 $\xi \rightarrow \infty$ 时的扩张区相一致.

考虑到(4.14)以及 $\alpha - \beta = \delta$, $\alpha = \gamma$, 可以证明, 当下列条件满足时, (3.1)与(4.1)匹配:

$$\left. \begin{aligned} \varphi|_{\Theta \rightarrow 0} &= c\rho_0\Theta \\ \psi|_{\Theta \rightarrow 0} &= \frac{1}{c}\Theta^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

以上两条件可由 c 值的适当选取以及(3.16)的计算而保证. ρ_0 则仍为自由参数, 用以表示裂尖场的强度.

六、数值结果与能量分析

在不影响裂尖场主要特性的情况下, 不妨取 $\rho_0 c = 1$. 我们发现, 对于不同的 n 值, δ 与 n 具有关系

$$\delta = 1/2n \quad (6.1)$$

这一结论与从能量的观点分析是相一致的, 能量释放率准则认为, 在裂纹尖端, 应变能密度应该是 $U \sim R^{-1}$. 而另一方面, 由(2.6)、(3.6)、可知

$$U \sim I_1 \sim R^{-2n}$$

这便得到(6.1)式.

七、结 论

1. 不可压缩材料的 I 型平面应力裂纹尖端场, 由两个收缩区与一个扩张区组成. 在靠近裂纹尖端, 应力和应变分别具有 R^{-1} 和 $R^{-1/n}$ 的奇异性.
2. 薄板厚度方向具有 $R^{1/4n}$ 的奇异性, 就是说在趋近于裂纹尖端时, 板厚趋向于零.
3. 在裂纹尖端, 各点均近似处于单向拉伸应力状态.
4. 本文的分析和结论与文[5]在 $s \rightarrow \infty$ 时的情形相一致.

参 考 文 献

- [1] Gao, Y. C., A constitutive relation of rubber-like material, (to appear)
- [2] Knowles, J. K. and E. Sternberg, An asymptotic finite deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack, *J. Elas.*, 3(1973).
- [3] Knowles, J. K. and E. Sternberg, Finite deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack: reconsideration and higher-order results, *J. Elas.*, 4(1974).
- [4] Gao, Y. C., Elastostatic crack tip behavior for a rubber-like material, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 14(1990).
- [5] Gao, Y. C. and D. Durban, The crack tip field in a rubber-like thin sheet (to appear)

The Plane Stress Crack-Tip field for an Incompressible Rubber Material

Shi Zhi-fei Gao Yu-chen

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute, Harbin)

Abstract

The crack-tip field under plane stress condition for an incompressible rubber material [1] is investigated by use of the fully nonlinear equilibrium theory. It is found that the crack-tip field is composed of two shrink sectors and one expansion sector. At the crack-tip, stress and strain possess the singularity of R^{-1} and $R^{-1/n}$, respectively, (R is the distance to the crack-tip before deformation, n is the material constant). When the crack-tip is approached, the thickness of the sheet shrinks to zero with the order of $R^{1/4n}$. The results obtained in this paper are consistent with that obtained in [5] when $s \rightarrow \infty$.

Key words incompressible material, plane stress condition, crack-tip field, fully nonlinear equilibrium theory