应用数学和力学，第 15 卷第 3 期（1994 年 3 月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重 庆 出 版 社 出 版

流动致振引出的非线性四阶微分方程周期解的存在性研究*

顾清芳　　唐大庆

（成都科技大学应用数学系，1992年 5 月 4 日收到）

摘　要

流动引起的振动问题是力学上比较著名的问题．本文应用一些不动点的基本原理研究了这一问题，并给出了周期解存在性条件和尾流振动方程周期解存在的参数范围；另外，在周期解的稳定性及渐近表达方面也做了一些工作，获得一些结果．

关键词　流动致振　周期解存在性　参数范围

一、引　　言

在流动引起的振动问题中，由Bishop和Hassan提出的流动振子模型良好地反映了涡街频率近似于悬吊圆柱的自振频率时，圆柱出现大幅度振动的现象，从而引起人们的注意．这一模型是由两个互耦的二阶非线性微分方程组表达：

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{\omega}+K'\cdot\frac{u_t}{D}\cdot\frac{u}{D}\cdot\omega_t\cdot\omega=(a_1'-a_2')\cdot\frac{u}{D}\cdot\dot{\omega}\\&\qquad-a_2'\cdot\frac{\dot{\omega}^3}{u\cdot D}+a_3'\cdot\ddot{y}+a_4'\cdot\frac{u}{D}\cdot\dot{y}\\&\ddot{y}+2\xi_T\cdot\omega_y\cdot\dot{y}+\omega_y^2\cdot y=a_3''\cdot\ddot{\omega}+a_4'\cdot\frac{u}{D}\cdot\dot{\omega}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中　ω,y是变量，K'，u_t，D，u，ω_s，ω_y、$a_i'(i=1,2,3,4)$是常系数．

令$x_1=\omega$，$x_2=y$，经过变换，方程(1.1)化为下式：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1&=a_{11}\dot{x}_1+a_{12}x_1+b_{11}\dot{x}_2+b_{12}\dot{x}_2^3+b_{13}x_2\\\ddot{x}_2&=a_{21}\dot{x}_1+a_{22}x_1+b_{21}\dot{x}_2+b_{22}\dot{x}_2^3+b_{23}x_2\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

从数学角度出发，我们可以研究带有小扰动项的方程：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1&=a_{11}\dot{x}_1+a_{12}x_1+b_{11}\dot{x}_2+b_{12}\dot{x}_2^3+b_{13}x_2+p(t)\\\ddot{x}_2&=a_{21}\dot{x}_1+a_{22}x_1+b_{21}\dot{x}_2+b_{22}\dot{x}_2^3+b_{23}x_2+q(t)\end{aligned}\right\}$$

其中　$|p(t)|+|q(t)|\neq 0$，$p(t+\omega_T)=p(t)$，$q(t+\omega_T)=q(t)$，T是周期．在1977年，Grasman应用映射的Browwer度理论，沿此方向探讨，获得一组保证系统$\ddot{x}=F(x)$存在

* 钱伟长推荐．

非常数周期解的充分条件($n\geqslant3$). J. Mawhin应用Leary-Schauder 连续性定理研究方程$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$，证明了一定条件下方程存在非常数2π周期解. 许多学者又用Banach 不动点定理和Leary-Schauder连续性定理研究了方程周期解的存在性并取得很多重要结果.

本文试图用一种新方法在Schauder原理基础上研究$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$的2π周期解的存在性，取得了一定的结果并对尾流振动进行模拟计算分析，获得了存在非常数 2π 周期解的参数变化范围.

二、引　理

在证明结果以前，有必要介绍一下定理证明过程中引用的结论. 为叙述方便，先作如下定义.

$|\cdot|$表示欧氏空间R^n的范数，空间 $C_{2\pi}^{(i)}(R,R^n)$定义为

$$C_{2\pi}^{(i)}(R,R^n)\triangleq\{f:\ f=R\to R^n\text{及至}i\text{阶导数连续且}\\ f(t+2\pi)=f(t),\ \forall t\in R\}$$

特别地，对于空间$C_{2\pi}^{(i)}(R,R^n)$，它的范数定义为

$$\|x\|=\max\{|x(t)|\}\ (\forall x\in C_{2\pi}^{(i)}(R,R^n),\ 0\leqslant t\leqslant2\pi)$$

不难验证在此定义之下，$C_{2\pi}^{(i)}(R,R^n)$成为Banach空间，矩阵C的范数$|C|$看作R^n中线性算子的范数.

对于(1.2)$:\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$，令$\dot{x}=y$，化为非线性方程

$$\dot{x}=A(t)x+g(x,t)$$

它满足下列条件:

1) $A(t)\in C(R')$是$n\times n$维矩阵，$A(t+\omega)=A(t)$
2) 对于方程$\dot{x}=A(t)x+g(x,t)$不存在非零ω周期解.
3) $g(x,t)\in C(R^n\times R')$，$g(x,t+\omega)=g(x,t)$

记Banach空间$E=C\{[0,\omega],R^n\}$，对于它的元u，我们定义$\|u\|=\max|u(t)|$.

我们定义E中算子Tu:

$$Tu=\int_0^\omega G(t,\tau)g(u(\tau),\tau)d\tau.$$

$G(t,\tau)$是方程$\dot{x}=A(t)x$满足边界条件$x(0)=x(\omega)$的Green函数矩阵.

引理1　算子$T:E\to E$是全连续的.

证明　任取$u_0(t)\in E$，令$R_0=\|u_0\|+1$，$\max\limits_{0\leqslant t,\tau\leqslant\omega}|G(t,\tau)|=\Gamma$

明显的$g(x,t)$在$|x|\leqslant R_0$，$0\leqslant t\leqslant\omega$上是一致连续的，即对任意$\varepsilon>0$，存在$0<\delta<1$，当$|x_1|\leqslant R_0$，$|x_2|\leqslant R_0$，$|x_1-x_2|<\delta$，$t\in[0,\omega]$时我们有$|u(\tau)-u_0(\tau)|\leqslant\|u-u_0\|<\delta$，即$|g(u(\tau),\tau)-g(u_0(\tau),\tau)|<\varepsilon/(\Gamma\cdot\omega)$，其中$0\leqslant\tau\leqslant\omega$，

$$\|Tu-Tu_0\|=\left\|\int_0^\omega G(t,\tau)\cdot[g(u(\tau),\tau)-g(u_0(\tau),\tau)]d\tau\right\|\\ <\omega\cdot\Gamma\cdot\frac{\varepsilon}{\omega\cdot\Gamma}=\varepsilon$$

即T在E上连续。

现在再证T映E上的有界集为E上的紧致集。设$u\in E$，$\|u\|\leqslant R_0$，那么
$\|v\|=\|Tu\|<\omega\cdot\Gamma\cdot L(R_0)=\eta(R_0)$，其中$L(R_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega,|u|\leqslant R_0}|g(x,t)|$。

又$\dot{v}=A(t)v+g(u,t)$推出$\|\dot{v}\|<A_0\cdot\|v\|+\|g(u,t)\|<A_0\cdot\eta(R_0)+L(R_0)$。其中$A_0=\max\|A(t)\|$，$t\in[0,\omega]$。这样算子$T$映$E$上的有界集致$C\{[0,\omega]，R^n\}$上的有界集，即$E$中的紧致集。

这样便证明了算子T是全连续的。证毕。

引理2 (SCHAUDER)设S是Banach空间E的凸有界闭子集，则任一映S入S的全连续映像T必有一不动点存在。

证明在此省略。

三、存在至少一个2π周期解的条件

考虑方程(1.2)的变形：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1&=a_{11}\dot{x}_1+a_{12}x_1+b_{11}\dot{x}_2+b_{12}\dot{x}_2^3+b_{13}x_2+p(t)\\ \ddot{x}_2&=a_{21}\dot{x}_1+a_{22}x_1+b_{21}\dot{x}_2+b_{22}\dot{x}_2^3+b_{23}x_2+q(t)\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

不失一般性考虑更为广泛的方程$\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$，其中$x=\mathrm{col}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$f$ 连续叫$f(t+2\pi,\cdot)=f(t,\cdot)$令$\dot{x}=y$，方程化为下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=cy+ex+g(t,x,y)\end{aligned}\right\}\tag{3.1$'$}$$

其中 $c=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$e=\mathrm{diag}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$g(t,x,y)=f(t,x,y)-cy-ex=\mathrm{col}(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$(c_i\in R_1,e_i\in R,\ i=1,2,\cdots,n)$。

定理3.1 如果对任意的$i=1,2,\cdots n$，特征方程$\lambda_i^2-c_i\lambda_i-e_i=0$的特征极$\lambda_{1i}$，$\lambda_{2i}$是实数且满足$\lambda_{1i}\neq\lambda_{2i}$，$\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}\neq0$，并且存在正数$R_0$使得$H^T\cdot\max|\bar{G}|\leqslant R_0$ $(0\leqslant t\leqslant2\pi,\ |(x,y)|\leqslant R_0)$，那么对于方程(3.1)存在至少一个$2\pi$周期解。

其中 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant2\pi,|(x,y)|\leqslant R_0}|\bar{G}|=\mathrm{col}(\max\limits_{0\leqslant t\leqslant2\pi,|(x,y)|\leqslant R_0}|g_1(t,x,y)|,\max|g_2(t,x,y)|,\cdots,\max|g_n(t,x,y,|)$

$$\begin{aligned}H=\mathrm{col}[&(2|\lambda_{11}\cdot\lambda_{21}|'+|\lambda_{11}|+|\lambda_{21}|)/(|\lambda_{11}-\lambda_{21}|\cdot|\lambda_{11}\cdot\lambda_{21}|),\\ &(2|\lambda_{12}\cdot\lambda_{22}|+|\lambda_{12}|+|\lambda_{22}|)/(|\lambda_{12}-\lambda_{22}|\cdot|\lambda_{12}\cdot\lambda_{22}|),\\ &\cdots\cdots\\ &(2|\lambda_{1n}\cdot\lambda_{2n}|+|\lambda_{1n}|+|\lambda_{2n}|)/(|\lambda_{1n}-\lambda_{2n}|\cdot|\lambda_{1n}\cdot\lambda_{2n}|)]\end{aligned}$$

证明 事实上，方程(3.1)′的2π周期解的存在性问题可以归结为方程在具有一定边界条件下解的存在性问题，即

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=y\\ \dot{y}&=cy+ex+g(t,x,y)\\ x(0)&=x(2\pi),\ y(0)=y(2\pi)\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

解的存在性问题。这是由于在$[0,2\pi]$上的解可以通过扩展而至整个R区间上。为方便起见记$\bar{g}(t,x,y)=[0,g_1(t,x,y),\ 0,g_2,\cdots,0,g_n]^T$

$$E=\{x|x\in([0,2\pi],R^{2n}),x(0)=x(2\pi)\}.$$

$M(t)$满足$M(0)=I$是方程

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y\\&\dot{y}=cy+ex\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

的基解矩阵．$G(t,\tau)$是方程(3.3)满足$x^{(0)}=x(2\pi)$，$y(0)=y(2\pi)$的Green 函数矩阵，表示为

$$G(t,\tau)=\begin{cases}M(t)\cdot(I+D)\cdot M^{-1}(\tau) & (0\leqslant t\leqslant t\leqslant 2\pi)\\M(t)\cdot D\cdot M^{-1}(\tau) & (0\leqslant t\leqslant\tau\leqslant 2\pi)\end{cases}$$

我们首先证明，对于齐次方程(3.3)如果不存在非零2π周期解，那么对于方程

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y\\&\dot{y}=cy+ex+g(t,u(t),v(t))\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

$(u(t),v(t))$存在2π周期解，其中$(u(t),v(t))\in E_0$该周期解表达为：

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix}=\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

由于方程(3.4)的通解是

$$\left.\begin{aligned}&(x(t),y(t))^{\tau}=M(t)\cdot(x_0,y_0)^{\tau}+q(t)\\&q(t)=\int_0^t M(t)\cdot M^{-1}(\tau)\cdot g(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

如果$(x(0),y(0))=(x(2\pi),y(2\pi))$即$(M(2\pi)-I)\cdot(x_0,y_0)^{\tau}+q(2\pi)=\theta$对于$(x_0,y_0)^{\tau}$是可解的，那么对于方程$(3.4)_{(u(t)),v(t))}$存在$2\pi$周期解，反之亦然，这是$(3.4)_{(u(t)),v(t))}$存在$2\pi$周期解的充要条件．

由此解得$(x_0,y_0)^{\tau}=-(M(2\pi)-I)^{-1}\cdot q(2\pi)$

代入(3.5)中可得$(3.4)_{(u(t)),v(t))}$的2π周期解

$$(x(t),y(t))^{\tau}=\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

取$(u(t),v(t))\in E$，令$T(u,v)=\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau$.

在引理1中我们证明了算子T是从E到E的全连续算子．这样(3.2)解的存在性等价于算子T的不动点的存在性，我们将寻找E的正问不变区来获得T的不动点．

考虑球：$S=\{(x,y)\mid(x,y)\in E,\ \|(x,y)\|\leqslant R_0\}$，显然$S$是$E$中凸有界的．

对于任意的$(u,v)\in S$，

$$\|T(u,v)\|=\left\|\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau\right\|$$

$$=\max_{t\in[0,2\pi]}\left|\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau\right|\tag{3.6}$$

$$\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{diag}[G_1(t,\tau),\ G_2(t,\tau),\cdots,G_n(t,\tau)]$$

$$\cdot\,\mathrm{col}[0,g_1(\tau,u(\tau),v(\tau)),0,g_2,\cdots,0,g_n]d\tau \tag{3.7}$$

其中 $G_i(t,\tau)$是方程$\dot{x}_i=y_i$，$\dot{y}_i=c_iy_i+e_ix_i$满足$x_i(0)=x_i(2\pi),y_i(0)=y_i(2\pi)$的Green函数矩阵．$\lambda_{1i}$，$\lambda_{2i}$是方程$\lambda_i^2-e_i\lambda_i-e_i=0$的非零不等实根．当上述条件满足时，容易证明方程(3.3i)不存在2π周期解($i=1,2,\cdots n$)．令

$$G_i(t,\tau)=\begin{bmatrix}u_{1i}(t,\tau) & u_{2i}(t,\tau)\\ u_{3i}(t,\tau) & u_{4i}(t,\tau)\end{bmatrix}$$

经过计算，我们得到

$$u_{1i}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{G_\cdot}{\varDelta_i}[\lambda_{1i}\cdot\exp[\lambda_{2i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(1-\exp[\lambda_{1i}2\pi]) \\ \quad+\lambda_{2i}\cdot\exp[\lambda_{2i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(\exp[\lambda_{1i}2\pi]-1)] & (t<\tau)\\ \dfrac{c_i}{\varDelta_i}[\lambda_{1i}\cdot\exp[\lambda_{2i}(t-\tau)]\cdot(1-\exp[\lambda_{1i}2\pi]) \\ \quad+\lambda_{2i}\exp[\lambda_{1i}(t-\tau)]\cdot(\exp[\lambda_{2i}2\pi]-1)] & (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

$$u_{2i}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{c_i}{\varDelta_i}[\exp[\lambda_{1i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(1-\exp[\lambda_{2i}2\pi]) \\ \quad+\exp[\lambda_{2i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(\exp[\lambda_{1i}2\pi]-1)] & (t<\tau)\\ \dfrac{c_i}{\varDelta_i}\cdot[\exp[\lambda_{1i}(t-\tau)]\cdot(1-\exp[\lambda_{2i}2\pi]) \\ \quad+\exp[\lambda_{2i}(t-\tau)]\cdot(\exp[\lambda_{1i}2\pi]-1] & (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

$$u_{31}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{c_i}{\varDelta_i}\cdot\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}\cdot[\exp[\lambda_{2i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(1-\exp[\lambda_{1i}2\pi]) \\ \quad+\exp[\lambda_{1i}(t-\tau+2\pi)] & (t<\tau)\\ \dfrac{c_i}{\varDelta_i}\cdot\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}\cdot[\exp[\lambda_{2i}(t-\tau)](1-\exp[\lambda_{1i}2\pi]) \\ \quad+\exp[\lambda_{1i}(t-\tau)]\cdot(\exp[\lambda_{2i}2\pi]-1)] & (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

$$u_{4i}(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{c_i}{\varDelta_i}[\lambda_{1i}\cdot\exp[\lambda_{1i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(1-\exp[\lambda_{1i}2\pi]) \\ \quad+\lambda_{2i}\cdot\exp[\lambda_{1i}(t-\tau+2\pi)]\cdot(\exp[\lambda_{1i}2\pi]-1)] & (t<\tau\\ \dfrac{c_i}{\varDelta_i}\cdot[\lambda_{1i}\exp[\lambda_{1i}(t-\tau)]\cdot(1-\exp[\lambda_{2i}2\pi]) \\ \quad+\lambda_{2i}\cdot\exp[\lambda_{2i}(t-\tau)]\cdot(\exp[\lambda_{1i}2\pi]-1)] & (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

其中 $c_i=1/(\lambda_{1i}-\lambda_{2i})$，$\varDelta_i=(1-\exp[\lambda_{1i}2\pi])\cdot(1-\exp[\lambda_{2i}2\pi])$．这样(3.7)式：

$$\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau=\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^n\left[G_i\cdot\begin{bmatrix}0\\ g_i(\tau,u(\tau),v(\tau))\end{bmatrix}\right]d\tau$$

$$=\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^n\begin{bmatrix}u_{2i}\cdot g_i\\ u_{4i}\cdot g_i\end{bmatrix}d\tau$$

因此有 $\left|\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau_1)d\tau\right|$

$$\leqslant\left|\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^n[u_{2i}\cdot g_i,\ u_{4i}\cdot g_i]^\tau d\tau\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\max|g_i|\cdot\left(\int_0^{2\pi}|u_{2i}|d\tau+\int_0^{2\pi}|u_{4i}|d\tau\right)$$

由于$\int_0^{2\pi}|u_{2i}(t,\tau)|d\tau<(|\lambda_{1i}|+|\lambda_{2i}|)/(|\lambda_{1i}-\lambda_{2i}|\cdot|\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}|)$，

$\int_0^{2\pi}|u_{4i}(t,\tau)|d\tau<|2/(\lambda_{1i}-\lambda_{2i})|$，我们得到

$$\left|\int_0^{2\pi}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),\ v(\tau))d\tau\right|\leqslant\max|\bar{G}|\cdot H^T \tag{3.8}$$

上式满足时，也即定理条件时，$\|T(u,v)\|\leqslant H^T\cdot\max|\bar{G}|<R_0$，这样$(u,v)\in S$，$T(u,v)\in S$，导出$TS\subset S$由于$T$是全连续的，再据引理 2 我们证明了存在至少一个不动点．由T的定义，该不动点决定的解是方程的2π周期解．这样定理便得证．

由c,e的性质，容易证明下述结论．

定理3.2 如果存在$c=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$e=\mathrm{diag}(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，$c_i\in R$，$e_i\in R$，$i=1,2,\cdots n$，使得定理3.1中的$R_0$能够找到并满足条件，那么方程(3.1)存在至少一个2π周期解．

四、具有任意周期的周期解存在条件

当周期T不是2π而任意其它数时，我们得到下列条件．

定理4.1. 如果对于齐次方程$\dot{x}=y$，$\dot{y}=cy+ex$不存在非零ω周期解，并且存在正数R_0使得

$$L(R_0)=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega,|(x,y)|\leqslant R_0}|g(t,x,y)|\leqslant\frac{R_0}{\omega\cdot\Gamma}$$

成立，其中$\Gamma=\max\limits_{0\quad t,\tau<\omega}|G(t,\tau)|$，$G$是方程$\dot{x}=y$，$\dot{y}=cy+ex$满足边界条件$(x(\omega),\ y(\omega))=(x(0),\ y(0))$的Green函数矩阵，那么对于方程$\dot{y}=y$，$\dot{y}=cy+ex+g(t,x,y)$存在至少一个$\omega$周期解．

证明 令$E=\{x|x\in\{C[0,\omega],\ R^{2n}\},\ x(0)=x(\omega)\}$，$T(u,v)=\int_0^{\omega}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau$．相仿于定理3.1的证明，易知算子$T$是全连续的并且在定理的条件下：

$$\|T(u,v)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega,\|(u,v)\|\leqslant R_0}\left|\int_0^{\omega}G(t,\tau)\cdot\bar{g}(\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau\right|$$

$$\leqslant\max|g(t,x,y)|\cdot\max\left|\int_0^{\omega}G(t,\tau)d\tau\right|$$

$$\leqslant\omega\cdot\Gamma\cdot L(R_0)\leqslant R_0$$

即$TS\subset S$．由引理2可知存在不动点，即存在至少一个ω周期解．

在前面的定理3.1中，讨论了在方程$\dot{x}=y$，$\dot{y}=cy+ex$没有非常数周期解存在时，方程(3.1)存在2π周期解的条件．但是当特征方程$\lambda_i^2-c_i\lambda_i-e_i=0$存在一对复根时的情况，却没有得到讨论．借助于方程存在ω周期解的条件，我们得到如下结论．

推论4.1 如果特征方程$\lambda_i^2-c_i\lambda_i-e_i=0$的特征根是$\alpha_i\pm\beta_i\cdot j$，$j=\sqrt{-1}$，那么$\max\limits_{0<t,\tau<2\pi}|G_i(t,\tau)|$有如下估计：

1） 当$\alpha_i>0$时，

$$\max_{0<t,\tau<2\pi}|G_i(t,\tau)|\leqslant\frac{2}{\varDelta_i}\cdot\exp[\alpha_i 2\pi]\cdot\sqrt{1+(\alpha_i^2/\beta_i^2)}\cdot[\exp[\alpha_i 2\pi]+\max(1,$$

$$|\alpha\cos(\beta_i\cdot 2\pi)\cdot\exp[\alpha_i 2\pi]-1|)]+\exp[\alpha_i 2\pi]\cdot\frac{1}{\varDelta_i}\cdot\max[\sqrt{\varDelta_i},$$

$$|\sin\beta_i\cdot 2\pi|]\cdot(e_1+\alpha_i^2+\beta_i^2)/|B_i|)$$

2） 当$\alpha_i<0$时，

$$\max_{0<t,\tau<2\pi}|G_i(t,\tau)|\leqslant\frac{2}{\varDelta_i}\cdot\sqrt{1+(\alpha_i^2/\beta_i^2)}\cdot[\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]+\max(1,|2\cos(\beta_i\cdot 2\pi)$$

$$\cdot\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]-1|)]+\frac{1}{\varDelta_i}\cdot\max[\sqrt{\varDelta_i},\ |\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]\cdot\sin(\beta_i\cdot 2\pi)|]$$

$$\cdot[(1+\alpha_i^2+\beta_i^2)/|\beta_i|]$$

其中 $\varDelta_i=\exp[\alpha_i\cdot 4\pi]-2\cos(\beta_i\cdot 2\pi)\cdot\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]+1$，$(\alpha_i\neq 0)$

证明 特征方程$\lambda_i^2-e_i\lambda_i-e_i=0$的时是$\lambda_{1i}$，$\lambda_{2i}=\alpha_i\pm\beta_i\cdot j$．经过计算，我们得到

$$G_i(t,\tau)=\begin{bmatrix}u_{1i} & u_{2i}\\ u_{3i} & u_{4i}\end{bmatrix}$$

其中

$$u_{1i}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{\varDelta_i}\exp[\alpha_i(t-\tau+2\pi)]\cdot[-\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]\cdot\Big(\cos\beta_i(t-\tau)\\ \quad-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\cdot\sin\beta_i(t-\tau)\Big)+\cos\beta_i(t-\tau+2\pi)\\ \quad-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\cdot\sin\beta_i(t-\tau+2\pi)] \qquad (t<\tau)\\ (t<\tau\text{时的}u_{1i}(t,\tau))+\exp[\alpha_i(t-\tau)]\cdot(\cos\beta_i(t-\tau)\\ \quad-\frac{\alpha_i}{\beta_i}\sin\beta_i(t-\tau)) \qquad (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

$$u_{2i}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{\varDelta_i}\exp[\alpha_i(t-\tau+2\pi)]\cdot\frac{1}{\beta_i}\cdot[-\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]\cdot\sin\beta_i(t-\tau)\\ \quad+\sin\beta_i(t-\tau+2\pi)] \qquad (t<\tau)\\ (t<\tau\text{时的}u_{2i}(t,\tau))+\exp[\alpha_i(t-\tau)]\cdot\frac{1}{\beta_i}\cdot\sin\beta_i(t-\tau) \qquad (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

$$u_{3i}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{\varDelta_i}\exp[\alpha_i(t-\tau+2\pi)]\cdot\frac{\alpha_i^2+\beta_i^2}{\beta_i}\cdot[\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]\cdot\sin\beta_i(t-\tau)\\ \quad-\sin\beta_i(t-\tau+2\pi)] \qquad (t<\tau)\\ (t<\tau\text{时的}u_{3i}(t,\tau))+\exp[\alpha_i\cdot(t-\tau)]\cdot\Big(-\frac{\alpha_i^2+\beta_i^2}{\beta_i}\Big)\\ \quad\cdot\sin\beta_i(t-\tau) \qquad (t\geqslant\tau)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{\varDelta_i}\exp[\alpha_i(t-\tau+2\pi)]\cdot\Big[-\exp[\alpha_i\cdot 2\pi]\cdot\Big(\cos\beta_i(t-\tau)\\ \quad+\frac{\alpha_i}{\beta_i}\cdot\sin\beta_i(t-\tau)\Big)+\cos\beta_i(t-\tau+2\lambda)\end{cases}$$

$$u_{4i}(t,\tau)=\begin{cases} \quad +\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}\cdot\sin\beta_i(t-\tau+2\pi)\Big] & (t<\tau) \\ (t<\tau\text{时的}u_{4i}(t,\tau))+\exp[\alpha_i\cdot(t-\tau)] & \\ \quad\cdot\Big[\cos\beta_i(t-\tau)+\dfrac{\alpha_i}{\beta_i}\cdot\sin\beta_i(t-\tau)\Big] & (t\geqslant\tau) \end{cases}$$

利用$G_i(t,\tau)$从$\max\|G_i(t,\tau)\|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{4}\max\|u_i(t,\tau)\|$，我们便得到推论.

五、方程(3.1)的2π周期解存在性分析

对于方程(3.1)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1&=a_{11}\dot{x}_1+a_{12}x_1+b_{11}\dot{x}_2+b_{12}\dot{x}_2^3+b_{13}x_2+p(t) \\ \ddot{x}_2&=a_{21}\dot{x}_1+a_{22}x_1+b_{21}\dot{x}_2+b_{22}\dot{x}_2^3+b_{23}x_2+q(t) \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

其中 $|p(t)|^2+|q(t)|^2\neq0$，$p(t+2\pi)=p(t)$，$q(t+2\pi)=q(t)$，取$c=\mathrm{diag}(c_1,c_2)$，$e=\mathrm{diag}(e_1,e_2)$待定，考虑

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1=y_1,\ \dot{y}_1=c_1y_1+e_1x_1+f_1(t,x,y) \\ &\dot{x}_2=y_2,\ \dot{y}_2=c_2y_2+e_2x_2+f_2(t,x,y) \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

其中 $f_1=(a_{11}-c_1)y_1+(a_{12}-e_1)x_1+b_{11}y_2+b_{12}y_2^3+b_{13}x_2+p(t)$

$f_2=a_{21}y_1+a_{22}x_1+(b_{21}-c_2)y_2+b_{22}y_2^3+(b_{23}-e_2)x_2+q(t)$

定理5.1 如果存在$c=\mathrm{diag}(c_1,c_2)$，$e=\mathrm{diag}(e_1,e_2)$使得$K_1\cdot p_{11}+K_2\cdot p_{21}<1$并且$\|p(t)\|+\|q(t)\|$足够小，那么方程(5.1)存在至少一个非常数$2\pi$周期解．其中$K_i=(2|\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}|+|\lambda_{1i}|+|\lambda_{2i}|)/(|\lambda_{1i}-\lambda_{2i}|\cdot|\lambda_{1i}\cdot\lambda_{2i}|)$ $(i=1,2)$，$p_{11}=|a_{11}-c_1|+|a_{12}-e_1|+|b_{11}|+|b_{13}|$，$p_{21}=|b_{21}-c_2|+|b_{23}-e_2|+|a_{21}|+|a_{22}|$，$\lambda_{1i},_{2i}$是方程$\lambda_i^2-c_i\lambda_i-e_i=0$的两个非零不等实根.

证明 从f_1、f_2的形式易知当R_0待定时，

$$\max_{0\leqslant t\leqslant2\pi,|(x,y)|\leqslant R_0}|f_1(t,x,y)|\leqslant p_{11}\cdot R_0+p_{12}\cdot R_0^3+\max_{0\leqslant t\leqslant2\pi}|p(t)| \qquad (p_{12}=|b_{11}|)$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant2\pi,|(x,y)|\leqslant R_0}|f_2(t,x,y)|\leqslant p_{21}\cdot R_0+p_{22}\cdot R_0^3+\max_{0\leqslant t\leqslant2\pi}|q(t)| \qquad (p_{22}=|b_{22}|)$$

从$K_1\cdot p_{12}+K_2\cdot p_{22}<1$，我们知道存在$r_0$使得

$$1-K_1\cdot p_{12}-K_2\cdot p_{22}\geqslant r_0 \tag{5.3}$$

取c_1，c_2，e_1，e_2固定并满足上式，再取R_0使得$(K_1\cdot p_{21}+K_2\cdot p_{22})\cdot R_0^2\leqslant r_0/2$，由于$\max|p(t)|+\max|q(t)|$足够小，我们得到$(K_1\cdot\max|p(t)|+K_2\cdot\max|q(t)|)/R_0\leqslant r_0/2$，因此必然有$(K_1\cdot p_{21}+K_2\cdot p_{22})\cdot R_0^2+(K_1\cdot\max|p(t)|+K_2\cdot\max|q(t)|)/R_0\leqslant r_0\leqslant1-K_1\cdot p_{12}-K_2\cdot p_{22}$，即$K_1(p_{11}+p_{12}\cdot R_0^2)\cdot R_0+K_2\cdot(p_{21}+p_{22}\cdot R_0^2)\cdot R_0+K_1\cdot\max|p(t)|+K_2\cdot\max|q(t)|\leqslant R_0$，而这正是定理3.1相应的条件，再由(5.1)的形式我们知道不存在常数解，故定理的结论得证.

六、模拟计算结果

对于流动致振模型

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1&=a_{11}\dot{x}_1+a_{12}x_1+b_{11}\dot{x}_2+b_{12}\dot{x}_2^3+b_{13}x_2\\ \ddot{x}_2&=a_{21}\dot{x}_1+a_{22}x_1+b_{21}\dot{x}_2+b_{22}\dot{x}_2^3+b_{23}x_2\end{aligned}\right\}$$

存在有界振动解．

取$(a_{ij})=\begin{pmatrix}-0.1 & -0.25\\ 0.05 & 0.05\end{pmatrix}$，$(b_{ij})=\begin{pmatrix}0.7 & 0.02 & -0.001\\ 15 & -0.5 & -84\end{pmatrix}$

初始值$x_1(0)=\dot{x}_1(0)=0.001$，$x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$．

借助于计算机，我们得到振动解$(x_1(t),\ \dot{x}_1(t),\ x_2(t),\ \dot{x}_2(t))$．

计算结果表明：$x_1(t)$的振幅介于0.270314与0.270952之间，振动周期在0.7716与0.8107之间．$\dot{x}_1(t)$的振幅介于2.109317与2.109318之间，而周期则介于0.7892与0.7913之间．

$x_2(t)$的振动比较稳定，振幅为1.690349到1.690350，但$\dot{x}_2(t)$的振幅则波动在12.832276与12.832532之间．可喜的是，$x_2(t)$与$\dot{x}_2(t)$具有同一振动周期$T=0.790266$．

这个四维空间内的运动r在二准相平面（x_1、$\dot{x}_1$）上的投影，是一条封闭的凸曲线，如下图所示．并且$|x_1(t)|<0.17$，$|\dot{x}_1(t)|<1.07$，$|x_2(t)|<0.8452$，$|\dot{x}_2(t)|<6.417$．

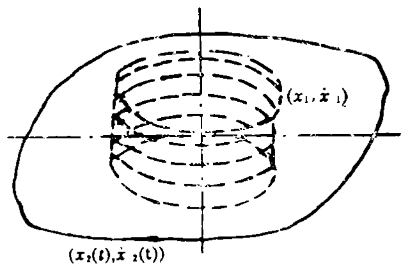

图　1

另外，我们在周期解的稳定性及近似表达方式也作了一些工作．中国科学院成都分院的刘世泽教授给予了作者很多帮助，在此一并致谢．

参　考　文　献

[1] 李正元、钱敏，向量场的旋转度理论及其应用，北京大学出版社(1982)．

[2] 赵晓强，非自治系统的周期解，应用数学学报，11 (1)(1988)，30—39．

[3] Lazer, A.C, On Schauder's fixed point theorem and freed second-order nonlinear oscillations, *J. Math Anal Appl.*, 21, 421—425.

[4] Robert D. *Blevins*, *Flow-induced vibration*, van Nostrand Reinhoid company.

[5] 秦元勋，一个关于周期轨道存在的定理，北京大学学报(自然科学)1，(1979)，1—20．

[6] Smith, R. A, Existence of Periodic orbits of autonomous ordinary differential equations, *Proc R. Soc. Edinb.*, 85*A* (1980), 153—172.

The Existnece of Periodic Solution of the Fourth Ordinary Non-Linear Differential Equation Caused by Flow-Induced Vibration

Gu Qing-fang   Tang Da-qing

(Department of Applied Mathematics, Chengdu University of Technology, Chengdu)

Abstract

The vortex-induced vibration is a well-known problem in mechanics. In this paper, with the help fixed point principle, we study this problem and find the existence condition of the periodic solution as well as the region of parameters.

Key words vibration nonlinear differential, periodic solution schauder's principle, characteristic equation results by computer