

# 非线性弹性大变形问题的率型解法\*

梁非 张善元

(太原工业大学, 应用力学研究所, 1992年9月9日收到)

## 摘 要

本文分别采用Jaumann应力率、Truesdell应力率和Green-Naghdi应力率导出了非线性各向同性弹性体的率型本构表达形式。通过对Mooney-Rivlin材料的简单剪切大变形分析表明, 三种率型的本构关系均与全量本构关系相等价。文中还给出了相应的率型变分原理, 并采用Ritz法, 数值求解了受单轴拉伸的矩形橡皮薄膜的大变形问题。

**关键词** 非线性弹性 次弹性 大变形 应力率张量

## 一、引 言

对于非线性弹性大变形问题, 由于几何非线性和物理非线性, 欲求解析解是非常困难的。对此类问题常采用增量法通过数值计算完成。

1955年Truesdell提出了次弹性理论, 认为应力率是当前应力和变形率的函数, 且关于变形率是线性齐次的<sup>[1]</sup>, 即

$$\dot{\sigma} = H(\sigma) [D] \quad (1.1)$$

式中,  $D$ 为变形率张量,  $\sigma$ 是Cauchy应力张量,  $H$ 是与 $\sigma$ 有关的张量函数,  $\dot{\sigma}$ 表示满足客观性要求的某一应力率张量, 经常采用的有以下三种形式:

$$\text{Jaumann应力率} \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W \quad (1.2)$$

$$\text{Truesdell应力率} \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma} - L\sigma - \sigma L^T + \sigma \text{tr}(D) \quad (1.3)$$

$$\text{Green-Naghdi应力率} \quad \dot{\delta} = \dot{\sigma} - \Omega\sigma + \sigma\Omega \quad (1.4)$$

其中,  $W$ 是旋率张量,  $L$ 是变形率张量:  $D = (L + L^T)/2$ ,  $W = (L - L^T)/2$ ,  $\Omega$ 是相对旋率张量:  $\Omega = \dot{R}R^T$ , 这里 $R$ 是变形梯度张量 $F$ 的极分解

$$F = RU = VR \quad (1.5)$$

中的正交张量, (1.5)中 $U$ 和 $V$ 分别为右和左伸长张量。

可以看出, 次弹性的本构方程是以率的形式给出的, 显然, 这种形式的本构方程很适合增量法进行数值求解。我们可借助在每个时段内采用率型的本构关系, 体现整个过程的物理非线性, 同时, 在每个时段末了通过考虑构形的变化来体现几何非线性。因此, 如果一个非线性弹性力学问题能转化为一个次弹性问题, 便可借助增量型的标准格式进行数值求解。

\* 杨桂通推荐。

基于以上思想, 本文分别采用(1.2)~(1.4)所示的三种应力率, 导出了非线性各向同性弹性体的次弹性表达形式, 并通过Mooney-Rivlin材料的简单剪切大变形分析, 证实了三种率型本构关系均与全量本构方程等价. 最后我们利用势算子的有关定理, 给出了支配次弹性问题的率型变分原理, 并据此数值求解了一个非线性弹性材料大变形问题的算例.

## 二、非线性弹性的率型表达

我们知道, 非线性各向同性弹性体的本构方程可表达为如下形式

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\mathbf{B}) \quad (2.1)$$

这里 $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ 为左Cauchy-Green变形张量,  $\mathbf{F}$ 为变形梯度张量. 现在的目的是要把(2.1)化为(1.1)所示的次弹性形式, 为此计算(2.1)的物质导数, 并且利用 $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}\mathbf{F}$ 可得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{L}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{L}^T) \quad (2.2)$$

根据 $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ , 以及 $\mathbf{D}$ 的对称性和 $\mathbf{W}$ 的反对称性

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{D}) + \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}) \quad (2.3)$$

又因 $\mathbf{f}_{\mathbf{B}}$ 是各向同性张量函数, 因此对所有正交张量 $\mathbf{Q}$ 应满足

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T) \quad (2.4)$$

借助于对上式的微分我们可以得到

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{f}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{f}\dot{\mathbf{Q}}^T = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T)} : (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{B}\dot{\mathbf{Q}}^T) \quad (2.5)$$

对任意的 $\mathbf{Q}$ , 上式均成立, 我们选择

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W} \quad (2.6)$$

则(2.5)式成为

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{W}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{W}) \quad (2.7)$$

将(2.7)代入到(2.3)右端第二项可得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{D}) \quad (2.8)$$

如果(2.1)的反函数存在, 则上式又可写成

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : [\mathbf{D}\mathbf{f}^{-1}(\boldsymbol{\sigma})] + \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : [\mathbf{f}^{-1}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{D}] = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}) : [\mathbf{D}] \quad (2.9)$$

因此(2.8)即是当采用Jaumann应力率时非线性各向同性弹性体的率型表达形式. 通过利用:  $\mathbf{W} = \mathbf{L} - \mathbf{D}$ , 由(2.8)经变换后, 也不难得到用Truesdell率表示的非线性各向同性弹性体的次弹性形式

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T + \boldsymbol{\sigma}\text{tr}(\mathbf{D}) = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{D}) - (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}) - \boldsymbol{\sigma}\text{tr}(\mathbf{D}) \quad (2.10)$$

如果我们再利用:  $\mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T$ , 以及 $(\mathbf{D} + \mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{W} + \boldsymbol{\Omega}) = 2\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{\text{[3]}}$ , 则由(2.2)立即获得

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}) + \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{B} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \quad (2.11)$$

而此时取(2.5)中的正交张量

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\Omega} \quad (2.12)$$

则(2.5)式给出

$$\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{B} - \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}) \quad (2.13)$$

因此由(2.11)即可得用Green-Naghdi应力率表示的率型本构方程

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Omega} = 2\mathbf{f}_{\mathbf{B}} : (\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}) \quad (2.14)$$

### 三、简单剪切

对Mooney-Rivlin型的各向同性不可压缩橡皮材料,若物体的初始状态是应力应变均为零的自然状态,其本构关系为<sup>[4]</sup>

$$\sigma = -(2c_1 - 2c_2)\mathbf{1} + 2c_1\mathbf{B} - 2c_2\mathbf{B}^{-1} \quad (3.1)$$

这里,  $c_1$ 和 $c_2$ 是由实验确定的材料常数.显然,(3.1)符合(2.1)的形式,因此将它分别代入到(2.8)、(2.10)及(2.14),可得在三种应力率下 Mooney-Rivlin 材料率型表达的分量形式为

采用Jaumann率:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (2c_1\delta_{ik}B_{jl} + 2c_1\delta_{jl}B_{ik} + 2c_2B_{ik}^{-1}\delta_{jl} + 2c_2B_{jl}^{-1}\delta_{ik})D_{kl} \quad (3.2)$$

采用Truesdell率:

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{ij} = & (2c_1\delta_{ik}B_{jl} + 2c_1\delta_{jl}B_{ik} + 2c_2B_{ik}^{-1}\delta_{jl} + 2c_2B_{jl}^{-1}\delta_{ik})D_{kl} \\ & - D_{im}\sigma_{jm} - \sigma_{im}D_{jm} \end{aligned} \quad (3.3)$$

采用Green-Naghdi率:

$$\ddot{\sigma}_{ij} = (2c_1\delta_{ik}\delta_{jl} + 2c_1\delta_{jk}\delta_{il} + 2c_2B_{ik}^{-1}B_{jl}^{-1} + 2c_2B_{jk}^{-1}B_{il}^{-1})V_{km}D_{mn}V_{ni} \quad (3.4)$$

大变形简单剪切的构形变化为

$$x_1(t) = X_1 + e(t)X_2, \quad x_2(t) = X_2, \quad x_3(t) = X_3 \quad (3.5)$$

这里,  $X_i$ 和 $x_i$ 分别代表初始构形坐标和现时构形坐标,  $e(t)$ 对时间的导数 $\dot{e}$ 是一常数,那么与变形有关的张量分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{e}/2 & 0 \\ \dot{e}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{e}/2 & 0 \\ -\dot{e}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1+e^2 & e & 0 \\ e & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -e & 0 \\ -e & 1+e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\sin^2\beta}{\cos\beta} & \sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{\Omega} &= \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{其中 } \beta &= \tan^{-1}\left(\frac{e}{2}\right), & \dot{\beta} &= \frac{2\dot{e}}{4+e^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

首先直接采用全量型的本构关系(3.1),将(3.6)中的有关张量代入后,极易得应力解

$$\sigma_{11} = 2c_1e^2, \quad \sigma_{12} = 2(c_1+c_2)e, \quad \sigma_{22} = -2c_2e^2 \quad (3.7)$$

若采用Jaumann率表示的本构方程(3.2),则利用(3.6)可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} - \dot{e}\sigma_{12} &= 2c_1\dot{e}e - 2c_2\dot{e}e \\ \dot{\sigma}_{12} + \frac{\dot{e}}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) &= c_1\dot{e}(2+e^2) + c_2\dot{e}(2+e^2) \\ \dot{\sigma}_{22} + \dot{e}\sigma_{12} &= 2c_1\dot{e}e - 2c_2\dot{e}e \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

求解以上微分方程组,且利用所有应力分量均为零的初始条件,可得应力解答(3.7).

若采用Truesdell率表示的本构关系(3.3),化简后同样可得(3.8),从而应力解答亦为(3.7).

最后用Green-Naghdi率表示的本构关系(3.4), 将(3.6)中的有关张量代入化简后有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} - \frac{4\dot{e}}{4+e^2} \sigma_{12} &= 4c_1 \dot{e} e \frac{2+e^2}{4+e^2} - 8c_2 \dot{e} e \frac{1}{4+e^2} \\ \dot{\sigma}_{12} + \frac{2\dot{e}}{4+e^2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) &= 2(c_1 + c_2) \dot{e} \frac{4+3e^2}{4+e^2} \\ \dot{\sigma}_{22} + \frac{4\dot{e}}{4+e^2} \sigma_{12} &= 8c_1 \dot{e} e \frac{1}{4+e^2} - 4c_2 \dot{e} e \frac{2+e^2}{4+e^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

利用应力分量为零的初始条件, 同样不难得到解答(3.7).

上面的分析表明, 采用不同应力率表达的本构方程, 其应力解都是(3.7), 因此率型本构关系(3.2)、(3.3)和(3.4)与用全量表达的本构关系(3.1)实际是等价的.

#### 四、率型的变分原理

对具有较复杂边值条件的非线性弹性大变形问题, 显然不能象求解简单剪切大变形那样通过积分本构关系直接获得解答, 而一般需经数值计算来完成. 我们知道, 变分原理是建立数值计算及有限元公式的理论基础, 而对次弹性问题, 其变分原理可从文献[5]给出的以下一条势算子的定理来得到.

**定理** 令  $P:V \rightarrow V^*$  是  $N(u_0, r)$  上的有势算子, 不要求是线性的, 则存在唯一的梯度为  $P(u)$  的泛函  $K(u)$ , 可由下式确定

$$K(u) = \int_0^1 \langle P(u_0 + s(u-u_0)), (u-u_0) \rangle ds + K_0 \quad (4.1)$$

此处  $K_0 = K(u_0)$  是常数,  $s$  为一实参数, 记号  $\langle u, v \rangle$  表示定义在  $V$  上的内积, 即

$$\langle u, v \rangle = \int_R u v dR$$

以下讨论采用Jaumann应力率(其它两种应力率下的变分原理可从下述的同样方法获得). 我们使用取现时构形为参考构形的适时Lagrange描述, 并引入标称应力  $T_{ij}$ <sup>[6]</sup>, 则次弹性问题的基本控制方程为<sup>[7]</sup>

$$\text{运动方程 } \dot{T}_{ji,j} + \rho \dot{f}_i = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{本构方程 } \dot{T}_{ij} = H_{ijkl} D_{kl} + \sigma_{ik} L_{jk} - (\sigma_{ik} D_{jk} + \sigma_{jk} D_{ik}) \quad (4.3)$$

$$\text{几何方程 } L_{ij} = v_{i,j} \quad (4.4)$$

$$\text{边界条件 } v_i = \hat{v}_i \quad (x \in S_v) \quad (4.5)$$

$$\dot{T}_i = n_j \dot{T}_{ji} = \hat{T}_i \quad (x \in S_\sigma) \quad (4.6)$$

这里  $H_{ijkl}$  是描述材料性能的四阶张量, 它可以是应力张量  $\sigma_{ij}$  的函数, 且满足三对称性  $H_{ijkl} = H_{jikl} = H_{ijlk} = H_{klij}$ . (4.2)~(4.6)可写成如下矢量形式

$$\dot{P}(\Lambda) = P(\Lambda) - \Gamma = 0 \quad (4.7)$$

其中

$$\Lambda = [v_i, L_{ji}, \dot{T}_{ji}]^T, \quad \Gamma = [\rho \dot{f}_i, 0, 0]^T \quad (4.8)$$

$P$  是(4.2)~(4.6)中作用于  $v_i, L_{ji}, \dot{T}_{ji}$  前面的运算组成的  $3 \times 3$  阶矩阵算子.

现在利用(4.1), 可构造相应于(4.7)的泛函

$$\begin{aligned}
 K(\Lambda) &= \int_0^1 \langle \dot{P}(s\Lambda), \Lambda \rangle ds = \int_0^1 \langle P(s\Lambda) - \Gamma, \Lambda \rangle ds \\
 &= \int_V \int_0^1 \{ -sT_{j,i,j}v_i - \rho f_i v_i \\
 &\quad + s[H_{ijkl}D_{kl} + \sigma_{ik}L_{jk} - (\sigma_{ik}D_{jk} + \sigma_{jk}D_{ik})]L_{ji} - s\dot{T}_{ij}L_{ji} \\
 &\quad + sv_{i,j}\dot{T}_{ji} - sL_{ij}\dot{T}_{ji} \} ds dV
 \end{aligned}$$

取  $\Lambda_0=0, K_0=0$ , 完成对  $s$  的积分, 并通过直接引入与非齐次边界条件(4.5)、(4.6) 相应的泛函  $K_1(\Lambda)$ , 不难得到支配次弹性问题总的泛函为

$$\begin{aligned}
 \Pi(\Lambda) &= K(\Lambda) + K_1(\Lambda) \\
 &= \int_V \left\{ -(\dot{T}_{j,i,j} + \rho f_i)v_i + \frac{1}{2} [H_{ijkl}D_{kl}D_{ij} - \sigma_{ij}(2D_{ik}D_{kj} - L_{kj}L_{ki})] \right. \\
 &\quad \left. - \dot{T}_{ji}L_{ji} \right\} dV + \int_{S_\sigma} (n_j \dot{T}_{ji} - \hat{T})v_i ds + \int_{S_\nu} v_i n_j \dot{T}_{ji} ds \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

从这个泛函可以建立率型拟静力问题的广义变分原理, 叙述如下

**定理1** 令  $v_i, L_{ij}, \dot{T}_{ji}$  满足场方程(4.2)~(4.6), 则由(4.9)给出的泛函在  $\Lambda = [v_i, L_{ij}, \dot{T}_{ji}]^T$  处取驻值。

由定理1立即可得到下面一个有条件的变分原理

**定理2** 所有满足(4.3)、(4.4)、(4.5)的机动许可速度场中, 使泛函

$$\begin{aligned}
 \Pi_1(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \int_V [H_{ijkl}D_{kl}D_{ij} + \sigma_{ij}(v_{k,i}v_{k,j} - 2D_{ik}D_{kj})] dV \\
 &\quad - \int_V \rho f_i v_i dV - \int_{S_\sigma} \hat{T}_i v_i ds \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

取驻值的速度场  $\mathbf{v}$ , 必满足(4.2)及(4.6), 因而是问题的真实解。

### 五、算 例

基于最小势能原理, 文献 [8~10] 分别用有限元法和直接近似法, 得到了一些橡皮材料在对称大变形下的近似解。但这些解法, 都是直接对物体的大变形进行非线性迭代求解。本文将基于我们导出的率型变分原理, 利用增量法对物体的整个大变形过程进行逐步求解。

考虑图1所示, 初始构形为  $2l_1 \times 2l_2$  的矩形橡皮薄膜, 它长度为  $2l_1$  的两条边自由, 另外两条边被夹紧 (不允许有  $x_2$  方向变形), 并受到沿  $x_1$  方向的外力  $f$  的作用, 假设变形过程是准静态的, 且忽略掉体力的作用。

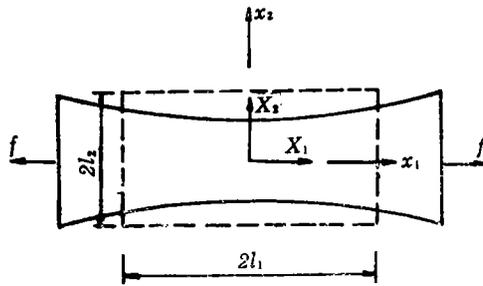


图 1

引入无限小的应变和位移增量:  $\Delta \mathbf{e} = \mathbf{D} \cdot \Delta t$ ,  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \Delta t$ , 且  $\Delta e_{ij} = (\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i})/2$ . 对

平面问题由定理2的泛函不难得到其增量形式为

$$\begin{aligned} \Pi_1(\Delta u_i) = & \frac{1}{2} \int_{S^{(t)}} \left[ H_{ijkl} \cdot \Delta u_{k,l} \cdot \Delta u_{i,j} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\Delta u_{k,i} \cdot \Delta u_{k,j} \right. \\ & \left. - 2 \Delta u_{k,l} \cdot \Delta u_{j,k} - \Delta u_{i,k} \cdot \Delta u_{j,k} \right] ds - \int_{L^{(t)}} \Delta \hat{T}_i \cdot \Delta u_i dL \end{aligned} \quad (5.1)$$

式中,  $S^{(t)}, L^{(t)}$  表示在  $t$  时刻构形上积分,  $\sigma_{ij}$  是  $t$  时刻的量值. 对Treloar型的不可压缩橡皮材料(新Hooke体),  $c_1=c, c_2=0$ , 则由(3.2)

$$H_{ijkl} = (\delta_{ik} \sigma_{jl} + \delta_{jl} \sigma_{ik}) + 4c \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (5.2)$$

另外, 根据Jaumann率的定义也不难得到

$$\Delta \sigma_{ij} = H_{ijkl} \cdot \Delta u_{k,l} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} (\Delta u_{j,k} - \Delta u_{k,j}) + \frac{1}{2} \sigma_{jk} (\Delta u_{i,k} - \Delta u_{k,i}) \quad (5.3)$$

综上所述, (5.1) 即是用增量法求解平面问题所需的泛函. 如果已经知道了  $t$  时刻物体的状态, 则通过对泛函(5.1)求变分取驻值, 即可确定  $t \rightarrow t + \Delta t$  时刻物体的位移场  $\Delta u_i$ , 再利用(5.3)又可定出  $t \rightarrow t + \Delta t$  时刻物体的应力增量  $\Delta \sigma_{ij}$ , 从而就确定了  $t + \Delta t$  时刻物体的状态, 按此法逐步计算, 可以确定物体的整个变形历史.

利用变形的对称性, 可只考虑矩形薄膜在第一象限内的部分, 且这时引入无量纲化的坐标系  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ :  $x_1 = l_1 \bar{x}_1, x_2 = l_2 \bar{x}_2$ , 那么第一象限内物体的构形变化可由图2所示.

数值求解  $t \rightarrow t + \Delta t$  时刻的位移场  $\Delta u_i$  时, 我们采用 Ritz 法. 设满足边界条件的位移试函数为一重三角级数

$$\Delta u_1 = \frac{a_{00} \bar{x}_1}{a^{(t)}} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin \frac{i\pi \bar{x}_1}{a^{(t)}} \cos \frac{j\pi \bar{x}_2}{b^{(t)}} \quad (5.4)$$

$$\Delta u_2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N b_{ij} \cos \frac{(2i-1)\pi \bar{x}_1}{2a^{(t)}} \sin \frac{(2j-1)\pi \bar{x}_2}{2b^{(t)}} \quad (5.5)$$

式中,  $a^{(t)}, b^{(t)}$  及  $a_{00}$  的定义参见图2,  $a^{(0)} = b^{(0)} = 1 (t=0)$ ,  $a_{00}$  为  $t \rightarrow t + \Delta t$  时  $(a^{(t)}, \bar{x}_2)$  边的延伸长度, 是待求量.

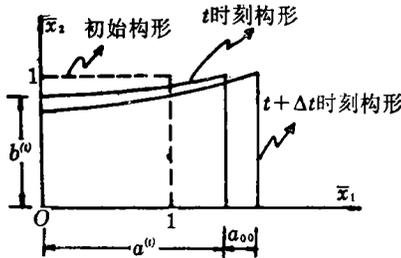


图 2

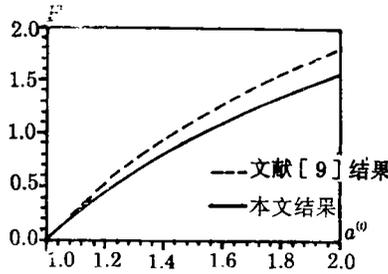


图 3

引入无量纲化的量  $F, f = 4cF$ . 取在每一步长  $\Delta t$  内,  $F$  的增量  $\Delta F = 0.01$ , 即第一象限薄膜所受外力变化  $\Delta T_1 = 0.5 \Delta f = 0.02c$ . 图3给出了经过150个步长计算后  $a^t$  与  $F$  的关系曲线图, 可以看出与文献[9]的结果吻合较好.

若把初始构形划分成  $5 \times 5$  的正方形小格子, 图4分别给出了  $F = 0.25, 0.5, 1.0, 1.5$  时,

格子的构形情况，与文献[8]利用有限元法解出单元的构形变化符合得也较好。

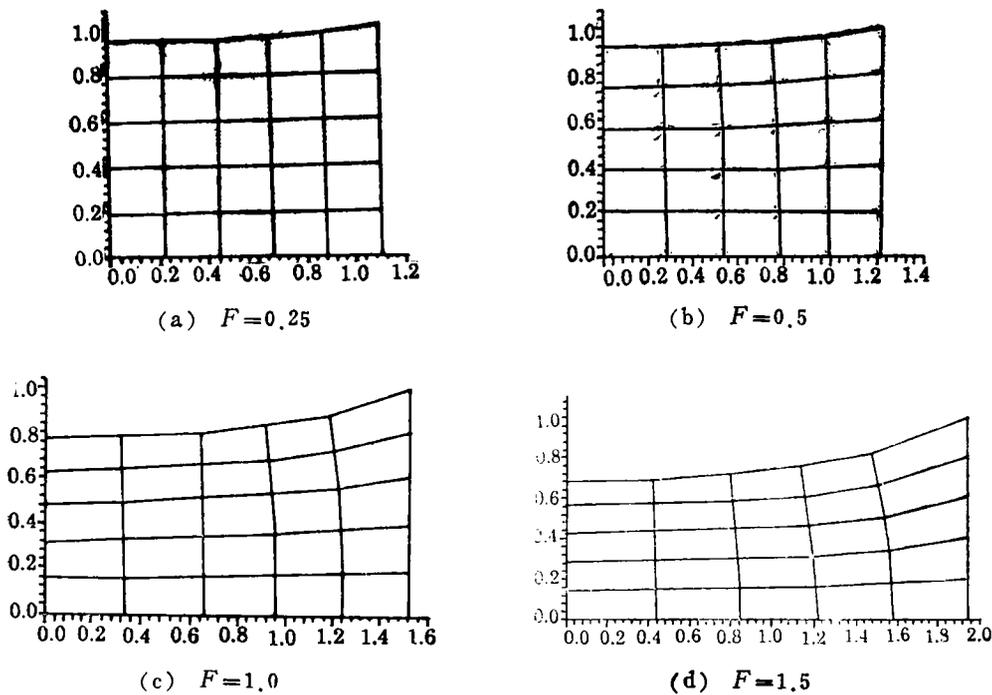


图 4

## 六、结 论

由本文的工作可见，根据次弹性理论，采用率型解法求解非线性弹性大变形问题是可行的。另外，使用增量法求解，可以很容易确定变形的历史，这与已有的方法相比具有很大的优越性。

## 参 考 文 献

- [1] Truesdell, C., Hypo-elasticity, *J. Rational Mech. Anal.*, 4 (1955), 83—133.
- [2] Truesdell, C. and W. Noll, *Handbuch der Physik*, III/3, Springer-Verlag (1965).
- [3] Dienes, J. K., On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, *Acta Mech.*, 32(2) (1979), 217—232.
- [4] 李松年、黄执中, 《非线性连续统力学》, 北京航空学院出版社 (1987), 390—401.
- [5] Oden, J. T. and D.R. Bhandari, Variational principle in nonlinear viscoelasticity, *Int. J. Solids Struct.*, 8 (1972), 1017—1026.
- [6] Hill, R., Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, *J. Mech. Phys. Solids*, 7 (1959), 209—225.
- [7] 张善元, 率型的广义变分原理, 因体力学学报, (4) (1991), 117—126.
- [8] Oden, J. T. and T. Sato, Finite strains and displacement of elastic membranes by the finite element method, *Int. J. Solids Struct.*, 3 (1967), 471—488.
- [9] Feng, W. W. and J. T. Tielking, Large plane deformations of rectangular

- elastic sheets, *ZAMP*, 27 (1976), 781—789.
- [10] Tielking, J. T. and W. W. Feng, The application of the minimum potential energy principle to nonlinear axisymmetric membrane problems, *J. Appl. Mech., ASME*, 41 (1976), 491—497.
- [11] Szabó, László and Mihály Balla, Comparison of some stress rates, *Int. J. Solids Structures*, 25 (1989), 279—297.

## A Rate Type Method for Large Deformation Problems of Nonlinear Elasticity

Liang Fei    Zhang Shan-yuan

(*Taiyuan University of Technology, Taiyuan*)

### Abstract

In this paper, we obtain the rate-type constitutive expressions of the nonlinear isotropic elasticity by using the Jaumann, Truesdell and Green-Naghdi stress rate respectively. Through analysing the simple shear deformation for Mooney-Rivlin material, three kinds of rate-type constitutive equations are verified to be equivalent to the original equation. Rate-type variational principles are also presented, and the Ritz method is used to obtain the numerical solution of a rectangular rubber membrane under uniaxial stretch.

**Key words** nonlinear elasticity, hypoelasticity, large deformation, stress rate tensor