应用数学和力学，第15卷第2期（1994年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

变质量非完整系统相对于非惯性系的第一积分与积分不变量*

罗 绍 凯

（河南商丘师专，1992年7月10日收到）

摘 要

本文给出了变质量非完整系统相对于非惯性系的第一积分存在的条件，建立了这类系统的正则方程和变分方程，证明了由第一积分可直接构造系统的积分不变量，并给出一系列推论和一个例子。

关键词 分析力学 非完整约束 变质量 非惯性系 第一积分 积分不变量

一、引 言

随着近代科学技术的发展，变质量系统相对于非惯性系运动问题的研究越来越显得重要。喷气飞机、火箭、卫星、航天器一般都是变质量系统，其中许多是变质量非完整系统相对于非惯性系的运动问题。近些年来，人们虽已建立起这类系统多种形式的运动方程[1~3]，但是对其第一积分和积分不变量理论还未曾研究。第一积分和积分不变量理论在现代力学、物理学和数学中具有非常重要的地位，深受国际学术界的重视。Whittaker[4]，Djukić[5]，Vujanović[6]，刘成群[7]，刘端[8]，梅凤翔[9]，李子平[10]和罗绍凯[11]、[12]等相继做了多方面的研究工作。然而，以往的工作多限于常质量系统相对于惯性系的不变量的研究。

对于完整系统，Whittaker指出已知一个第一积分可以确定一个积分不变量[4]；梅凤翔证明，这一结论对非完整系统也适用[9]。本文给出变质量非完整系统相对于非惯性系的广义能量积分、广义循环积分存在的条件，建立这类系统的正则运动方程和变分方程，证明由第一积分可直接构造这类系统的积分不变量，并给出一系列推论和一个例子。

二、变质量非完整系统相对于非惯性系的第一积分

研究N个质点构成的变质量系统相对于非惯性系$Oxyz$的运动，其位形由非惯性系中的广义坐标$q_s(s=1,2,\cdots,n)$确定，质量微元dm_i分离或并入$m_i(i=1,2,\cdots,N)$时的相对速度为$\boldsymbol{u}_i$。非惯性系固连于大质量物体，其平动加速度$\boldsymbol{a}_0(t)$，角速度$\boldsymbol{\omega}(t)$，角加速度$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$与诸质点

* 张石生推荐。
河南省自然科学基金资助课题。

运动无关。系统受有g个Четаев型理想非线性非完整约束

$$\left.\begin{aligned} & f_\rho(q_s,\dot q_s,t)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,g;\ s=1,2,\cdots,n) \\ & \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot q_s}\delta q_s=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

把作用在系统上的主动力分为有势和非势力两部分

$$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+Q'_s(q_s,\dot q_s,t), \qquad V=V(q_s,t) \tag{2.2}$$

引入广义迴旋惯性力

$$Q^{\varepsilon}_s=-\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{\varepsilon}\times m_i\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}$$

广义陀螺力 $\Gamma_s=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{n}2m_i\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_\beta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\right)\dot q_\beta$

均匀力场势能$V^0=M\cdot\boldsymbol{a}_0\partial\boldsymbol{r}'_c/\partial q_s$、惯性离心势能$V^\omega=-\boldsymbol{\omega}\cdot[I_0]\cdot\boldsymbol{\omega}/2$和广义反推力

$$P_s=\sum_{i=1}^{N}\left\{m_i(\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}'_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}'_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}'_i\right)\frac{\partial m_i}{\partial \dot q_s}\right\}$$

其中$\boldsymbol{r}'_i$、$\boldsymbol{r}'_c$分别为i质点和系统质心C相对于非惯性系原点O的位矢，$[I_0]$为系统对O点的惯性张量。变质量非完整系统相对于非惯性系的运动方程可以表为Routh形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q'_s+P_s+Q^{\varepsilon}_s+\Gamma_s+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot q_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.3}$$

其中$L_r=T_r-V-V^0-V^\omega$为变质量系统相对运动的 Lagrange 函数，λ_ρ为待定乘子。方程(2.3)等价于文[1]中(2.31)的凝固导数形式。

对于运动方程(2.1)和(2.3)，如果满足如下条件

1° Lagrange函数L_r不显含广义坐标q_l，即

$$\partial L_r/\partial q_l=0 \qquad (l=1,2,\cdots,\alpha;\ \alpha\leqslant n) \tag{2.4}$$

2° 循环坐标q_l对应的各广义力之和为零，即

$$Q'_l+P_l+Q^{\varepsilon}_l+\Gamma_l=0 \qquad (l=1,2,\cdots,\alpha;\ \alpha\leqslant n) \tag{2.5}$$

3° 约束方程不显含$\dot q_l$，即

$$\partial f_\rho/\partial \dot q_l=0 \qquad (l=1,2,\cdots,\alpha;\ \alpha\leqslant n) \tag{2.6}$$

则变质量非完整系统相对于非惯性系的运动存在如下α个循环积分

$$\partial L_r/\partial \dot q_l=\text{const} \qquad (l=1,2,\cdots,\alpha;\ \alpha\leqslant n) \tag{2.7}$$

为了求得系统广义能量积分存在的条件，对于(2.3)，我们计算$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s}\dot q_s-L_r\right)$，有

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s}\dot q_s-L_r\right)=\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s}\dot q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_s}\ddot q_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}$$

$$-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}(Q'_s+P_s+Q^e_s+\Gamma_s)\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t} \tag{2.8}$$

关系式 (2.8) 称为变质量非完整系统相对于非惯性系的广义能量方程．由 Γ_s 的性质知 $\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s\equiv 0$．因此，如果满足如下条件

1° 约束方程对$\dot{q}_s$是齐次的，即

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=kf_\rho \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{2.9}$$

2° 非势广义力与广义迴旋惯性力的功率之和等于零，即

$$\sum_{s=1}^{n}(Q'_s+Q^e_s)\dot{q}_s=0 \tag{2.10}$$

3° 广义反推力的功率等于Lagrange函数对时间t的偏导数，即

$$\sum_{s=1}^{n}P_s\dot{q}_s=\frac{\partial L_r}{\partial t} \tag{2.11}$$

则变质量非完整系统相对于非惯性系的运动存在广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r=h=\text{const} \tag{2.12}$$

三、变质量非完整系统相对于非惯性系的正则方程和变分方程

Новоселов В. С. 曾证明[13]，非完整系统可作为一个有条件的完整系统力学问题来处理，系统的约束方程作为运动方程的特殊的第一积分．我们延用这种思想，把方程 (2.3) 作为一个有条件的变质量完整系统相对于非惯性系的力学问题来研究，其中非完整约束(2.1)是方程(2.3)的特殊的第一积分．对(2.1)、(2.3) 式，可在运动微分方程积分之前求出λ_ρ作为q_s，$\dot{q}_s$，t的函数．引入广义动量及Hamilton函数

$$p_s=\partial L_r/\partial \dot{q}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1}$$

$$H_r=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L_r \tag{3.2}$$

则方程(2.3)可表为正则形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H_r}{\partial p_s},\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H_r}{\partial q_s}+\tilde{Q}'_s+\tilde{P}_s+\tilde{Q}^e_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.3}$$

其中

$$\tilde{\Lambda}_s=\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho(q,\dot{q}(q,p,t),t)\left(\widetilde{\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}}\right) \tag{3.4}$$

而记号"～"表示其中$\dot{q}$用(q,p,t)来表出. 我们称(3.3)式为变质量非完整系统相对于非惯性系的相应完整系统的正则方程. 在求解(2.1)、(2.3)式的运动时，可先积分相应完整系统的方程(3.3). 然后再施加非完整约束(2.1)式对初始条件的限制.

由(3.3)式容易导出其变分方程. 只要用$q_s+\delta q_s$替代q_s, 用$p_s+\delta p_s$替代p_s, 并忽略δq, δp的二阶小量，我们有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\delta q_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial p_k}\delta p_k\\
&\frac{d}{dt}\delta p_s=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial p_k}\delta p_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}(\tilde{Q}_s'+\tilde{P}_s\\
&\qquad+\tilde{Q}_s^e+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta q_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}(\tilde{Q}_s'+\tilde{P}_s+\tilde{Q}_s^e+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta p_k\\
&\qquad\qquad(s=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

方程(3.5)称为变质量非完整系统相对于非惯性系的变分方程. 当已知H_r, $\tilde{Q}_s'$, $\tilde{P}_s$, $\tilde{Q}_s^e$, $\tilde{\Gamma}_s$, $\tilde{\Lambda}_s$时，就可组成这组方程. 方程(3.5)不同于常质量完整保守系统相对于惯性系的变分方程，在于出现带$\tilde{Q}_s'$、$\tilde{P}_s$、$\tilde{Q}_s^e$, $\tilde{\Gamma}_s$, $\tilde{\Lambda}_s$对q_k和p_k的偏导数项.

四、变质量非完整系统相对于非惯性系的积分不变量

现在由变质量非完整系统相对于非惯性系的第一积分构造一类积分不变量.

定理1 如果方程组(3.3)有形如

$$\Phi_r(q_s,p_s,t)=\text{const}\tag{4.1}$$

的一个第一积分，那么表达式

$$\int\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\delta p_s\right)\tag{4.2}$$

是变质量非完整系统相对于非惯性系的一个积分不变量.

证明 利用(3.3)、(3.5)式，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}&\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\delta p_s\right)=\sum_{s=1}^{n}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial q_k\partial q_s}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial p_k\partial q_s}\left(-\frac{\partial H_r}{\partial q_k}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+\tilde{Q}_k'+\tilde{P}_k+\tilde{Q}_k^e+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k\right)\right]+\left.\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial t\partial q_s}\right\}\delta q_s\\
&+\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial q_k\partial p_s}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial p_k\partial p_s}\left(-\frac{\partial H_r}{\partial q_k}+\tilde{Q}_k'+\tilde{P}_k+\tilde{Q}_k^e+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k\right)\right]\right.\\
&\left.+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial t\partial p_s}\right\}\delta p_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial p_k}\delta p_k\right)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\Big[-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial p_k}\delta p_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}(\tilde{Q}'_s+\tilde{P}_s+\tilde{Q}^{\varepsilon}_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta q_k$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_s+\tilde{P}_s+\tilde{Q}^{\varepsilon}_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta p_k\Big]$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\Big\{\frac{\partial}{\partial q_s}\Big[(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\Big]$$

$$-\Big(\Phi_r,\ \frac{\partial H_r}{\partial q_s}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\ \frac{\partial}{\partial q_s}\ (\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\Big\}\delta q_s$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\Big\{\frac{\partial}{\partial p_s}\Big[(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\ (\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\Big]$$

$$-\Big(\Phi_r,\ \frac{\partial H_r}{\partial p_s}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\ \frac{\partial}{\partial p_s}\ (\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\Big\}\delta p_s$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\Big[\Big(\Phi_r,\ \frac{\partial H_r}{\partial q_s}\Big)\delta q_s+\Big(\Phi_r,\ \frac{\partial H_r}{\partial p_s}\Big)\delta p_s\Big]+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\ \frac{\partial}{\partial q_s}\ (\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k$$

$$+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\delta q_s+\ \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\ \frac{\partial}{\partial p_s}(\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\delta p_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\Big\{\frac{\partial}{\partial q_s}\Big[(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\ \frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\Big]\delta q_s$$

$$+\frac{\partial}{\partial p_s}\Big[(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\ (\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\ \frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\Big]\delta p_s\Big\} \tag{4.3}$$

其中(,)为Poisson括号.因(4.1)式是(3.3)式的第一积分，于是有

$$(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{P}_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\ \frac{\partial\Phi_r}{\partial t}=0 \tag{4.4}$$

将(4.4)式代入(4.3)式，便得

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\delta p_s\Big)=0 \tag{4.5}$$

这就证明了(4.2)式为积分不变量.

五、讨 论

本文的主要结果为(2.7)～(2.12)、(3.3)、(3.5)和定理1，具有广泛的意义.

对于惯性参考系，有

$$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\varepsilon}=0,\ \ V^0=V^{\bullet}=Q^{\varepsilon}_s=\Gamma_s=0$$

$$\boldsymbol{r}'_i=\boldsymbol{r}_i,\ L_r=T-V=L,\ H_r=H,\ \Phi_r=\Phi$$

则(2.4)～(2.12)给出变质量非完整系统相对于惯性系的第一积分，(3.3)、(3.5) 成为这类系统的正则方程和变分方程，定理1给出其积分不变量．本文的结果同样适用于 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\varepsilon}=0$ 的平动非惯性系和$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{\varepsilon}=0$的匀角速转动参考系．

对于常质量系统，有 $P_s\equiv 0$，则本文给出常质量非完整系统相对于非惯性系的第一积分和积分不变量．本文的结果同样适用于部分变质量质点构成的力学系统．

对于完整系统，有 $\Lambda_s\equiv 0$，则本文给出变质量完整系统相对于非惯性系的第一积分和积分不变量．

对于常质量非完整系统相对于惯性系的运动，本文定理给出文献[9]的结果；对于完整系统，则给出文献[4]的结果．

六、例　　子

质量为 $m=m(t)$ 的质点在平面上运动，而平面以极缓慢的角速度ω绕中心轴匀速转动，微粒分离质点的相对速度为

$$\boldsymbol{u}=\left(-\frac{1}{2}\dot{q}_1\right)\boldsymbol{i}+\left(-\frac{1}{2}\dot{q}_2\right)\boldsymbol{j} \tag{6.1}$$

质点受有非完整约束

$$f=\dot{q}_1+a\dot{q}_2=0 \tag{6.2}$$

广义力的非势力不存在，系统的Lagrange函数为

$$L_r=\frac{1}{2}m(t)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{6.3}$$

试给出此问题的第一积分，并用本文的方法构造其积分不变量．

首先，求出系统的第一积分．对此问题，条件 (2.9)、(2.10) 显然满足．又$\boldsymbol{r}'_i=q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}$，由$P_s=\dot{m}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}')\partial\boldsymbol{r}'_i/\partial q_s$算得

$$P_1=\dot{m}\dot{q}_1/2,\quad P_2=\dot{m}\dot{q}_2/2$$

因此有

$$P_1\dot{q}_1+P_2\dot{q}_2=\dot{m}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)/2=\partial L_r/\partial t$$

条件(2.11)也满足．因此，系统存在广义能量积分

$$\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_1}\dot{q}_1+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_2}\dot{q}_2-L_r=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)=h=\text{const} \tag{6.4}$$

其次，将问题的方程正则化．容易算得广义陀螺力

$$\Gamma_1=2m\omega\dot{q}_2,\quad \Gamma_2=-2m\omega\dot{q}_1$$

Routh方程(2.3)给出

$$m\ddot{q}_1+\dot{m}\dot{q}_1=\dot{m}\dot{q}_1/2+2m\omega\dot{q}_2+\lambda,\quad m\ddot{q}_2+\dot{m}\dot{q}_2=\dot{m}\dot{q}_2/2-2m\omega\dot{q}_1+\lambda a \tag{6.5}$$

将(6.2)对t求导数，并利用(6.5)消去$\ddot{q}_1$和$\ddot{q}_2$，得

$$\lambda=\frac{2m\omega(a\dot{q}_1-\dot{q}_2)}{1+a^2} \tag{6.6}$$

将(6.6)代入(6.5)式，并引入广义动量，我们得到正则方程

$$
\left.\begin{array}{l}
\dot{q}_1=\frac{p_1}{m}, \quad \dot{p}_1=\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}p_1+2\omega p_2+\frac{2\omega(ap_1-p_2)}{1+a^2} \\
\dot{q}_2=\frac{p_2}{m}, \quad \dot{p}_2=\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}p_2-2\omega p_2+\frac{2\omega a(ap_1-p_2)}{1+a^2}
\end{array}\right\} \tag{6.7}
$$

再次，建立变分方程．由(6.7)容易得到

$$
\left.\begin{array}{l}
\frac{d}{dt}\delta q_1=\frac{1}{m}\delta p_1, \quad \frac{d}{dt}\delta p_1=\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}\delta p_1+2\omega\delta p_2+\frac{2\omega a\delta p_1-2\omega\delta p_2}{1+a^2} \\
\frac{d}{dt}\delta q_2=\frac{1}{m}\delta p_2, \quad \frac{d}{dt}\delta p_2=\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}\delta p_2-2\omega\delta p_1+\frac{2\omega a^2\delta p_1-2\omega a\delta p_2}{1+a^2}
\end{array}\right\} \tag{6.8}
$$

最后，寻求问题的积分不变量．把问题的第一积分(6.4)化为正则形式

$$\Phi_r=(p_1^2+p_2^2)/2m=h \tag{6.9}$$

由第一积分(6.9)按照前面提供的方法，容易构造问题的积分不变量

$$\int\frac{1}{m}(p_1\delta p_1+p_2\delta p_2)=\text{const} \tag{6.10}$$

由(6.7)、(6.8)结合(6.2)容易验证，关系(6.10)为问题的积分不变量．

参 考 文 献

[1] 刘桂林等，变质量非完整力学系统的相对运动动力学，力学学报，21(6) (1989)，742—748．

[2] 罗绍凯，变质量系统相对于非惯性系的高阶Gibbs-Appell方法，黄淮学刊，7(3) (1991),11—21．

[3] 罗绍凯，变质量高阶非完整系统相对于非惯性系的 B-H 方程，科学通报，37(1) (1992),93—94．

[4] Whittaker, E.T., *A Treatise on the Analytical Mechanics of Particles and Rigid Bodies*, 4th Ed., Cambridge Press (1952), 269—271.

[5] Djukić, Dj. S., Integral invariant in classical nonconservative dynamical systems, *Acta Mechanica*, 23 (1975), 291—296.

[6] Vujanović, B., A variational principle for nonconservative dynamical systems, *ZAMM*, 55 (1975), 321—331.

[7] 刘成群、罗诗裕，非保守系统的积分不变量及其在现代物理学中的应用，应用数学和力学，6 (10) (1985)，879—885．

[8] 刘端，关于完整非保守动力学系统的基本积分变量关系，力学学报，23(5) (1991),617—625．

[9] 梅凤翔，非完整系统的第一积分和积分不变量，科学通报，36(11) (1991)，815—818．

[10] 李子平，非完整奇异系统的Poincaré-Cartan积分不变量，黄淮学刊，8(2) (1992),1—6．

[11] 罗绍凯，非完整非有势系统相对于非惯性系的Noether定理，应用数学和力学，12(9) (1991)，863—870．

[12] Luo Shao-kai, Generalized Noether theorem for variable mass higher order nonholonomic system in noninertial reference frames, *Chinese Science Bulletin*, 36(22) (1991), 1930—1932.

[13] Новоселов В. С., *Вариационные Метобы в Механике*, ЛГУ (1966), 49—51.

First Integrals and Integral Invariants for Variable Mass Nonholonomic System in Noninertial Reference Frames

Luo Shao-kai

(Shangqiu Normal College, He'nan)

Abstract

The first integrals and their conditions of existence for variable mass nonholonomic system in non-inertial reference frames are obtained, and the canonical equations and the variation equations of the system are extended. It is proved that using the first integral we can construct the integral invariant of the system. Finally, a series of deductions and an example are given.

Key words analytical mechanics, nonholonomic constraint, variable mass, noninertial reference frame, first integral, integral invariant