应用数学和力学，第15卷第 2 期（1994 年 2 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

多裂纹圆柱弯曲问题的奇异积分*

王 晓 春

（北京大学力学系，1992年11月23日）

摘 要

本文在文[1]的基础上，利用文[2]给出的无裂纹柱体弯曲问题的通解，求得了多裂纹圆柱横力弯曲应力函数及横截面剪应力的奇异积分表达式。本文方法借助数值积分表达式[3]，极易在微机上实现，可以完全类似文[1]所做的那样进行数值计算。

关键词 裂纹 圆柱 弯曲 奇异积分

一、引 言

柱体的弯曲历来是力学和工程中的一类重要问题。虽然关于柱体的弯曲问题早已有相当成熟的结果可供工程应用，但对含有裂纹柱体弯曲问题的研究工作目前还不多，特别是对于多裂纹柱体的弯曲问题，还没有方便、统一的求解方法。本文利用文[1]、[2]的结果，导出了多裂纹圆柱横力弯曲应力函数和横截面剪应力的奇异积分表达式，这样，通过数值积分[3]，即能得到可供工程应用的有意义的数值结果，为结构的设计和安全评定提供了便捷的处理手段。

二、弯曲问题基本公式

取柱体中性轴为Z轴，x和y轴为柱体横截面Ω的惯性主轴，Γ为Ω的外边界，裂纹$\gamma_k(O_k,B_k)$为Ω的内边界，并记$\Omega^+=\Omega-\Gamma-\sum\gamma_k$。将坐标原点置于柱体的固定端，柱体的另一端作用一集中载荷$\boldsymbol{P}$，方向沿x轴正向，则由弹性理论有

$$\sigma_Z=-P(l-Z)x/I,\quad \sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0 \tag{2.1}$$

其中l为柱体的长度，I为横截面Ω的惯性矩。横截面上的剪应力可表示为[2]

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xZ}&=\mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right)-\frac{P}{2(1+\nu)I}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\nu(x^2+y^2)+(1-\nu)y^2\right\}\\ \tau_{yZ}&=\mu\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right)-\frac{P}{2(1+\nu)I}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial y}+(2+\nu)xy\right\}\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

式中μ为剪切模量，ν为泊松比，而α为扭率，φ为扭转函数，ψ为一调和函数，满足

* 钱伟长推荐。

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\psi=0, && (x,y)\in\Omega^+\\ &\partial\psi/\partial n=m(x,y), && (x,y)\in\Gamma\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

$$m(x,y)=-\left[\frac{1}{2}\nu(x^2+y^2)+(1-\nu)y^2\right]\cos(n,x)-(2+\nu)xy\cos(n,y)\tag{2.4}$$

当P通过弯曲中心，则扭率$\alpha=0$。为了从 (2.2) 计算剪应力τ_{xZ}，τ_{yZ}，我们必须先求出扭转函数φ和弯曲应力函数ψ。关于扭转函数 φ，我们已在文[1]中作过充分的讨论。本文主要讨论ψ，并用奇异积分的形式给出ψ和τ_{xZ},τ_{yZ}的表达式。

三、弯曲应力函数ψ及剪应力τ_{xZ}，τ_{yZ}的奇异积分表达式

为了讨论方便，我们令$\alpha=0$，即假设集中载荷P通过截面的弯曲中心，并设截面Ω的外边界Γ为一半径为R的圆。用与文献[1]类似的处理方法，我们定义函数$f_k(\zeta)$为

$$f_k(\zeta)=\frac{IE}{2P}\frac{\partial}{\partial\zeta}\{W(\zeta,\pi)-W(\zeta,-\pi)\},\qquad \zeta\in\gamma_k(O_k,B_k)$$

式中E为杨氏模量，$W(\zeta,\pm\pi)$为裂纹$\gamma_k(O_k,B_k)$上、下岸沿Z轴的位移分量，则弯曲应力函数ψ可用$f_k(\zeta)$表示为

$$\psi(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k}\{\ln\overline{(Z-z_k)}+\ln(R^2-\bar{z}_kZ)\}f_k(\zeta)d\zeta+\psi^*(x,y)\tag{3.1}$$

其中

$$\psi^*(x,y)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int\frac{dZ}{Z}\oint_{\Gamma}\frac{m(x,y)R}{t-Z}dt$$

将(2.4)代入上式，即得

$$\psi^*(x,y)=-\frac{2\nu+3}{4}R^2x+\frac{1}{4}(x^3-3xy^2)+\mathrm{cost}$$

因此

$$\psi(x,y)=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k}\left\{\ln\overline{(Z-z_k)}+\ln(R^2-\bar{z}_kZ)\right\}f_k(\zeta)d\zeta$$

$$-\frac{2\nu+3}{4}R^2x+\frac{1}{4}(x^3-3xy^2)+\mathrm{const}\tag{3.2}$$

式中N为裂纹条数，z_k的为k第根裂纹γ_k上点的复坐标(图1)：

$$z_k=Z_{Ok}-\zeta\exp[-i\theta_k]$$

将(3.2)代入(2.2)并令$\alpha=0$，则τ_{xZ}，τ_{yZ}可以写为

$$\tau_{xZ}=\frac{P}{2(1+\nu)I}\left\{-\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k}\left(\frac{-1}{Z-z_k}+\frac{z_k}{R^2-z_kZ}\right)f_k(\zeta)d\zeta\right.$$

$$\left.+\frac{2\nu+3}{4}(R^2-x^2)+\frac{2\nu-1}{4}y^2\right\}$$

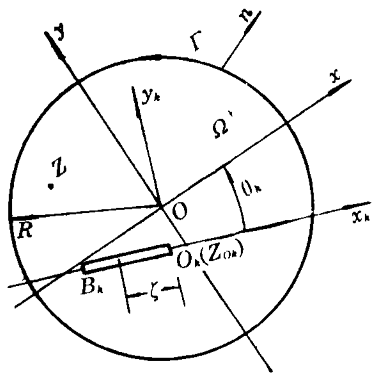

图 1

$$\tau_{yz}=\frac{P}{2(1+\nu)I}\left\{-\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_k}\left(\frac{-1}{Z-z_k}+\frac{-z_k}{R^2-z_k Z}\right)f_k(\zeta)d\zeta-\frac{2\nu+1}{2}xy\right\} \tag{3.3}$$

这里得到的剪应力分量 τ_{xz}，τ_{yz}具有与扭转问题[1]相同的形式，不同的只是方程(3.3) 右端前面的系数和后面的与 $f_k(\zeta)$ 无关的有限项，这样有关弯曲问题的讨论，可以毫不费力地仿照文[1]的方法进行。

当圆截面内无裂纹时，有$f_k(\zeta)\equiv 0$，因此

$$\psi=\psi^*=-\frac{2\nu+3}{4}R^2x+\frac{1}{4}(x^3-3xy^2)+\mathrm{const}$$

这个结果与文献[2]所得的解答完全一致。

参 考 文 献

[1] 王晓春、汤任基，关于多裂纹圆柱体的扭转，应用数学和力学，9(8) (1988)，693—702.

[2] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, the second English edition, Leyden, Noordhoff International Publishing, The Netherlands (1977).

[3] Erdogan, F., Mixed boundary-value problems in mechanics, *Mechanics Today*, (4) (1978).

Bending Integral Expressions of a Cylinder with Cracks

Wang Xiao-chun

(*Mechanics Department, Peking University, Beijing*)

Abstract

In this paper, based on paper [1] and [2], bending integral expressions of the stress function and shear stresses of a cylinder with several cracks are obtained. Using the numerical method of the singular integral equations[3], it is easy for us to do numerical calculation of the stresses and stress intensity factors, which is similar to that of paper[1].

Key words crack, cylinder, bending, singular integral