应用数学和力学，第15卷 第1期（1994年1月）
APPlied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义对策的一个新的平衡存在定理*

丁 协 平

（四川师范大学，1992年9月16日收到）

摘 要

在本文中，我们对具有不可数多个经纪人，具有非紧选择集和具有一般选择对应的广义对策证明了一个新的平衡存在定理．这里既不要求选择对应有开图也不要求它有开下截口．这个定理改进了Kim的一个最近结果．

关键词 广义对策 平衡 局部凸拓扑向量空间

一、引 言

Debreu[1]和 Arrow-Debreu[2]对具有有限多个经纪人，有限维策略空间和拟凹效用函数的广义对策(=抽象经济)首先证明了平衡的存在性．此后，他们的结果已在几个方向上被推广．Shafer-Sonnenschein[3]和Borglin-Keiding[4]推广了Debreu的结果到选择对应有开图或有开下截口的广义对策．近几年，许多作者(例如，Yannelis-Prabhakar[5]，Toussaint[6]，Tulcea[7]，Tarafdar[8,9]和Rim-Kim[10]）已经对具有有限或无限多个经纪人，具有无限维策略空间的广义对策证明了平衡的存在性．然而上面提及的所有存在性定理的证明都依赖于选择集（=策略空间）的紧性和依赖于选择对应的开图性质或开下截口性质．最近Ding-Kim-Tan[11]，Ding-Tan[12,13]和Tian[14]已经推广了上述某些存在性定理到具有定义在非紧选择集上的$\mathscr{L}^*$-控制选择对应和$\mathscr{L}_c$-控制选择对应的非紧广义对策．

在本文中，我们将对具有不可数多无限多个经纪人，具有非紧选择集和一般选择对应的广义对策证明一个新的平衡存在性定理．我们既没假设选择对应有开图也没假设它具有开下截口．我们的定理改进和推广了Kim[15]的一最近结果．

二、预 备 知 识

设A是拓扑空间X的一子集，我们将用2^A表A的一切子集的族，用$\mathrm{cl}A$表A的闭包．如果A是拓扑向量空间的子集，我们将用$\mathrm{co}A$和$\overline{\mathrm{co}}\,A$分别表$A$的凸包和$A$的闭凸包．如果$Y$是一拓扑向量空间和$S$，$T:A\to 2^Y$是对应，则$\mathrm{co}T$，$\overline{\mathrm{co}}T$，$\mathrm{cl}T$，$T\cap S$：$X\to 2^Y$是如下定义的对应：$(\mathrm{co}T)(x)=\mathrm{co}T(x)$，$(\overline{\mathrm{co}}T)(x)=\overline{\mathrm{co}}T(x)$，$(\mathrm{cl}T)(x)=\mathrm{cl}T(x)$和$(T\cap S)(x)=T(x)$

* 国家自然科学基金资助项目．

$\cap S(x)$.

设X和Y是拓扑空间。称对应T：$X\to 2^Y$是上半连续的（几乎上半连续的，见[9]）如果对每一$x\in X$和每一开集$V\subset Y$具有$T(x)\subset V$，存在x在X内的一开邻域U使得$T(y)\subset V(T(y)\subset \mathrm{cl}V)$对每一$y\in U$成立。

现在回忆数理经济中平衡理论的下述一般定义，见[11]。令I是有限或无限（可数或不可数）个经纪人或局中人的集。对每一$i\in I$，X_i是选择集或策略集。令$X=\Pi_{i\in I}X_i$。对每一$i\in I$，P_i：$X\to 2^{X_i}$是选择对应和A_i，B_i：$X\to 2^{X_i}$是约束对应。一个广义对策$\Gamma=(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$是一有序四元组（$X_i$，$A_i$，$B_i$，$P_i$）的族，其中$X_i$是拓扑向量空间和非空子集。$\Gamma$的平衡点是一点$\hat{x}\in X$使得对每一$i\in I$，$\hat{x}_i\in \mathrm{cl}B_i(\hat{x})$和$A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x})=\phi$。当$A_i=B_i$，$\forall i\in I$，广义对策的这个定义与通常的标准定义一致，例如见Borglin-Keiding[4]或Yannelis-Prabhakar[5]。

引理1[10] 设X是拓扑空间的非空子集和D是X的一紧子集。设T：$X\to 2^D$是几乎上半连续对应使得对每一$x\in X$，$T(x)$是闭的。则T是上半连续的。

引理2[10] 设X是局部凸Hausdorff拓扑向量空间E的非空子集和D是X的一非空紧子集。设T：$X\to 2^D$是几乎上半连续对应使得对每一$x\in X$，$\mathrm{co}T(x)\subset D$。则$\overline{\mathrm{co}}T$是几乎上半连续的。

三、平衡存在性定理

定理1 设$\Gamma=(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$是一广义对策使得对每一$i\in I$。

（1） X_i是局部凸Hausdorff拓扑向量空间的非空凸子集。

（2） 对每一$x\in X=\Pi_{i\in I}X_i$，$\phi=A_i(x)\subset B_i(x)\subset D_i$和$B_i(x)$是凸的，其中$D_i$是$X_i$的一非空紧子集。

（3） 对应$\mathrm{cl}B_i$：$X\to 2^{D_i}$是上半连续的，

（4） 对应$\overline{\mathrm{co}}P_i$：$X\to 2^{X_i}$是闭的，即它的图在$X\times X_i$内是闭的。

（5） 集$W_i=\{x\in X:\ (A_i\cap P_i)(x)\neq\phi\}$是闭的，

（6） 对每一$x\in W_i$，$x_i\notin \overline{\mathrm{co}}P_i(x)$。

则Γ有一平衡选择$\hat{x}\in X$，即有对每一$i\in I$，

$$\hat{x}_i\in \mathrm{cl}B_i(\hat{x}) \text{ 和 } (A_i\cap P_i)(\hat{x})=\phi.$$

证明 令$I_0=\{i\in I:\ W_i\neq\phi\}$。如果$I_0\neq\phi$，对每一$i\in I_0$，我们定义对应$\varphi_i$：$X\to 2^{D_i}$如下：

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\mathrm{cl}B_i(x), & \\ (\mathrm{cl}B_i\cap\overline{\mathrm{co}}P_i)(x) & (x\notin W_i)\end{cases}$$

则每一$\varphi_i(x)$是D_i的非空闭凸子集。由条件(3)和(4)，从Aubin-Ekeland[6]的定理3.1.8推得$\mathrm{cl}B_i\cap\overline{\mathrm{co}}P_i$是上半连续的。现在我们证明$\varphi_i$也是上半连续的。设$V$是$X_i$的任意开子集且$\varphi_i(x)\subset V$，则我们有

$$\begin{aligned}U&=\{x\in X:\ \varphi_i(x)\subset V\}\\&=\{x\in W_i:\ \varphi_i(x)\subset V\}\cup\{x\in X\backslash W_i:\ \varphi_i(x)\subset V\}\\&=\{x\in W_i:\ (\mathrm{cl}B_i\cap\overline{\mathrm{co}}P_i)(x)\subset V\}\cup\{x\in X\backslash W_i:\ \mathrm{cl}B_i(x)\subset V\}\end{aligned}$$

$$=\{x\in X:\ (\mathrm{cl}B_i\cap\overline{\mathrm{co}}P_i)(x)\subset V\}\cup\{x\in X\backslash W_i:\ \mathrm{cl}B_i(x)\subset V\}.$$

因为$\mathrm{cl}B_i\cap\overline{\mathrm{co}}P_i$和$\mathrm{cl}B_i$是上半连续的和$X\backslash W_i$是开集，故$U$是开的且因此$\varphi_i$是上半连续的.

现在定义对应F：$X\to 2^D$如下：

$$F(x)=\Pi_{i\in I}f_i(x),\quad \forall x\in X=\Pi_{i\in I}X_i,$$

其中$D=\Pi_{i\in I}D_i$和

$$f_i(x)=\begin{cases}\varphi_i(x), & (\text{如果}i\in I_0)\\ \mathrm{cl}B_i(x), & (\text{如果}i\notin I_0)\end{cases}$$

这里I_0可能是空集.

则每一$F(x)$是D的非空闭凸子集且由Fan[17]的引理3，F是上半连续的．因为D是X的一紧子集，由Himmelberg的不动点定理[18]，存在$\hat{x}\in X$使得$\hat{x}\in F(\hat{x})$，即对每一$i\in I$，$\hat{x}_i\in f_i(\hat{x})$.

对$i\in I_0$，$\hat{x}_i\in f_i(\hat{x})=\varphi_i(\hat{x})$.如果$\hat{x}\in W_i$，则

$$\hat{x}_i\in\varphi_i(\hat{x})=(\mathrm{cl}B_i\cap\overline{\mathrm{co}}P_i)(\hat{x})\subset\overline{\mathrm{co}}P_i(\hat{x})$$

这与条件(6)相矛盾.所以对每一$i\in I_0$，$\hat{x}\notin W_i$，即有$\hat{x}_i\in\mathrm{cl}B_i(\hat{x})$和$A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x})=\phi$.

对$i\notin I_0$(I_0可以是空集)，则$W_i=\phi$和$f_i(\hat{x})=\mathrm{cl}B_i(x)$．由此推得$\hat{x}_i\in\mathrm{cl}B_i(\hat{x})$和$A_i(\hat{x})\cap P_i(\hat{x})=\phi$.定理证毕.

注1 定理1改进和推广了Kim[15]的定理到选择集是非紧的情形.

定理2 设$\Gamma=(X_i, A_i, B_i, P_i)_{i\in I}$是一广义对策使得对每一$i\in I$，

(1) X_i是局部凸Hausdorff拓扑向量空间的非空凸子集，

(2) 对每一$x\in X$，$\phi\neq A_i(x)\subset B_i(x)$，$\mathrm{co}B_i(x)\subset D_i$和$D_i$是$X_i$的一非空紧子集，

(3) B_i，P_i：$X\to 2^{D_i}$是几乎上半连续的和$\mathrm{co}P_i(x)\subset D_i$，$\forall x\in X$，

(4) 集$W_i=\{x\in X:\ (A_i\cap P_i)(x)\neq\phi\}$是闭的，

(5) 对每一$x\in W_i$，$x_i\notin\mathrm{co}P_i(x)$.

则Γ有一平衡选择$\hat{x}\in X$.

证明 由条件(2)和(3)，从引理1和2推得对应$\overline{\mathrm{co}}B_i$，$\overline{\mathrm{co}}P_i$：$X\to 2^{D_i}$是上半连续的．由Aubin-Ekeland[16]的命题3.1.7知对应$\overline{\mathrm{co}}P_i$：$X\to 2^{D_i}$是闭的．本定理结论由定理1推得.

注2 定理1和定理2与Tarfdar[8]的定理3.2，Yannelis-Prabhakar[5]的定理6.1和Ding-Kim-Tan[19]的定理4相比较将会是有趣的.

按照[20]，称集合$(X_i, P_i)_{i\in I}$是一定性对策.称点$\hat{x}\in X=\Pi_{i\in I}X_i$是定性对策的平衡选择如果对一切$i\in I$，$P_i(\hat{x})=\phi$.

作为定理2的一个容易的推论，我们推导定性对应的下面平衡存在性定理.

定理3 设$\Gamma=(X_i, P_i)_{i\in I}$是一定性对策使得对每一$i\in I$，

(1) X_i是局部凸Hausdorff拓扑向量空间的非空凸子集和$D_i\subset X_i$是一紧凸集，

(2) P_i：$X\to 2^{D_i}$是几乎上半连续的，

(3) 集$W_i=\{x\in X: P_i(x)\neq\phi\}$是闭的，

(4) 对每一$x\in X$，$x_i\notin \overline{\mathrm{co}}P_i(x)$.

则存在$\hat{x}\in X$使得对每一$i\in I$，$P_i(\hat{x})=\phi$.

证明 对每一$i\in I$，定义对应A_i，B_i：$X\to 2^{X_i}$如下：对每一$x\in X$，$A_i(x)=B_i(x)=D_i$.则，由定理2知本定理结论成立.

注3 把定理3与Tarafdar[9]的定理3.2和系3.2相比较将是有趣的.

参 考 文 献

[1] Decreu, G., A social equilibrium existence theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38(1952), 886—893.

[2] Arrow, K. and G. Debreu, Existence of equilibrium for competitive economy, *Econometrica*, 22(1954), 265—290.

[3] Shafet, W. and H. Sonnenshein, Equilibribrium in abstract economics without ordered preferences, *J. Math. Economics*, 3(1976), 135—137.

[4] Borglin, A. and H. Keiding, Existence of equilibrium actions and of equilibrium: A note on the new existence theorem, *J. Math Economics*, 3(1976), 313—316.

[5] Yannelis, N.C. and N.D. Prabhakar, Existence in maximal elements and equilibria in linear topological spaces, *J. Math. Economics*, 12(1983), 133—244.

[6] Toussaint, S., On the existence of equilibria in economics with infinitely many commodities and without ordered preferences, *J. Math. Economics*, 33 (1984), 98—115.

[7] Tulcea, C. I., On the aproximation of upper semicontinuous correspondences and the equilibrium of the generalized games, *J. Math. Anal. Appl.*, 136(1988), 267—289.

[8] Tarafdar, E., An extension of Fan's fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 31(1990), 723—730.

[9] Tarafdar, E., A fixed point theorem and equilibrium point of an abstract economy, *J. Math. Economics*, 20(1991), 211—218.

[10] Rim, D.I. and W.K. Kim, A fixed point theorem and existence of equilibrium for abstract economies, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 45(1992), 385—384.

[11] Ding, X.P., W.K. Kim and K.K. Tan, Equilibria of non-compact generalized games with $\mathscr{L}^*$-majorized preference correspondences, *J. Math. Anal. Appl.*, 164(1992), 508—517.

[12] Ding, X.P. and K.K. Tan, Fixed point theorems and equilibria of non-compact generalized games, to appear in Proceedings of the Second International Conference on Fixed Point Theory and Applications.

[13] Ding, X.P. and K.K. Tan, On equilibria of non-compact generalized games, *J. Math. Appl.*, forthcoming.

[14] Tian, G., Equilibrium in abstract economics with a non-compact infinite dimensional strategy space, an infinite number of agents and without ordered preferences, *Economics Letters*, 33(1990), 203—206.

[15] Kim, W.K., A new equilibrium existence theorem, *Economics Letters*, forthcoming.

[16] Aubin, J.P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons, New York(1984).

[17] Fan Ky, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38(1952), 131—136.

[18] Himmelberg, C.J., Fixed points of compact multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.*, 38(1972), 205—207.

[19] Ding, X.P., W.K. Kim and K.K. Tan, A selection theorem and its applications, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 46(1992), 205—212.

[20] Gale, D. and A. Mas-Colell, On the role of complete, transitive preferences in equilibrium theory, *in Equilibrium and Disequilibrium in Economic Theory*, (G. Schwodiaues, Ed.), Reidel Dordrecht(1978), 7—14.

A New Equilibrium Existence Theorem of Generalized Game

Ding Xie-ping

(Sichuan Normal University, Chengdu)

Abstract

In the present paper, we prove a new equilibrium existence theorem for generalized games with uncountable number of agents, noncompact choice sets and general preference correspondences which do neither have open graph nor have open lower sections. This theorem improves a recent result of Kim.

Key words generalized game, equilibrium, locally convex topological vector space