应用数学和力学，第15卷 第1期（1994年1月）
APPlied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

光测弹性理论中耦联系统的变分原理*

付　宝　连

（秦皇岛市燕山大学，1992年12月5日收到）

摘　　要

本文提出一能量原理，即光测弹性理论中耦联系统的零差功原理，并据此原理导出了光测弹性理论中耦联系统的势能、余能，广义势能和广义余能变分原理。

所谓耦联系统是指形状、尺寸、载荷和边界条件全同且都处于真实状态但材料不同的两个变形体。

光测弹性理论中的原型体和模型体实质上是耦联系统，因而上述原理就成为确定柏松比ν对冻结应力法精度影响的理论基础。

关键词　光测弹性力学　耦联系统　零差功原理　耦联变分原理

一、引　　言

在光测弹性理论中，存在一个学科性的重大课题，那就是对多连通的二维问题和三维问题。在用冻结应力法测出模型体应力后，如何将模型体的应力转换为原型体应力的问题。即柏松比ν对冻结应力法精度的影响问题。

这一问题的力学实质可归结为已知耦联系统的某一解如何求其对偶解。

这一课题难度很大。因此它长期未获解决。解决这一课题的另一困难还反映在，到目前为止，我们还未查阅到任何资料和文献。

上述能量原理和变分原理可能是我国学者在弹性力学变分原理和光测弹性理论领域中的又一贡献。

二、光测弹性理论中耦联系统的零差功原理

1. 基本方程

对小变形体，有下述基本方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (x_i\in V) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i \qquad (x_i\in S_p) \tag{2.2}$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (x_i\in V) \tag{2.3}$$

* 钱伟长推荐。1989年11月8日第一次收到。

$$u_i=\bar{u}_i, \qquad (x_i\in S_u) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial A(e)}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij},$$

或
$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij} \qquad (x_i\in V) \tag{2.5a,b}$$

2. 零差功原理

首先，让我们规定，耦联系统是由第一（模型）系统和第二（原型）系统构成并且假设第一系统的解是已知的而第二系统的解是未知的。

假设有一对耦联系统，它们的状态分别为：σ_{1ij}，e_{1ij}，u_{1i}，E_1和ν_1；σ_{2ij}，e_{2ij}，u_{2i}，E_2和ν_2。

应用式(2.1)于该耦联系统，我们得

$$\iiint_V(\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j})(u_{2i}-u_{1i})dV=\iiint_V\{[(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(u_{2i}-u_{1i})]_{,j}-[(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(e_{2ij}-e_{1ij})]\}dV=0 \tag{2.6}$$

据Green公式，(2.6)成为

$$\iint_{S_p+S_u}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j(u_{2i}-u_{1i})dS-\iiint_V[(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(e_{2ij}-e_{1ij})]dV=0 \tag{2.7}$$

由于该耦联系统均满足方程(2.2)和(2.4)，所以我们有

$$\iiint_V[(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})(e_{2ij}-e_{1ij})]dV=0 \tag{2.8}$$

式(2.8)表示着零差功原理.它表明，对于耦联系统，该耦联系统的应力差在相应变差上所做功的总和为零。

式(2.8)还可用另一方法得到．对于该耦联系统，分别有方程

$$\iiint_V\bar{F}_iu_{2i}dV+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_{2i}dS+\iint_{S_u}p_{2i}\bar{u}_idS=\iiint_V\sigma_{2ij}e_{2ij}dV \tag{2.9}$$

$$\iiint_V\bar{F}_iu_{1i}dV+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_{1i}dS+\iint_{S_u}p_{1i}\bar{u}_idS=\iiint_V\sigma_{1ij}e_{1ij}dV \tag{2.10}$$

$$\iiint_V\bar{F}_{1j}u_{1i}dV+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_{1i}dS+\iint_{S_u}p_{2i}\bar{u}_idS=\iiint_V\sigma_{2ij}e_{1ij}dV \tag{2.11}$$

$$\iiint_V\bar{F}_iu_{2i}dV+\iint_{S_p}\bar{p}_iu_{2i}dS+\iint_{S_u}p_{1i}\bar{u}_idS=\iiint_V\sigma_{1ij}e_{2ij}dV \tag{2.12}$$

由(2.9)+(2.10)−(2.11)−(2.12)，我们得

$$\iiint_V(\sigma_{2ij}e_{2ij}+\sigma_{1ij}e_{1ij}-\sigma_{2ij}e_{1ij}-\sigma_{1ij}e_{2ij})dV=0 \tag{2.13}$$

式(2.13)即式(2.8)。

推导上述原理时，我们并没有用到任何物理关系．故该原理适用于两线弹性体之间、线弹性体和非线弹性体之间和两弹塑性体之间。

三、光测弹性理论中耦联系统的变分原理

1. 耦联系统的势能原理

对式(2.13)取第二系统的应变变分，我们得

$$\iiint_V (\sigma_{2ij}\delta e_{2ij}-\sigma_{1ij}\delta e_{2ij})dV=0 \tag{3.1}$$

与变分式(3.1)相对应的泛函为

$$\Pi_{cp}=\iiint_V [A(e_2)-\sigma_{1ij}e_{2ij}]dV \tag{3.2}$$

应用式(2.3)且对泛函(3.2)取极值，我们得

$$\iiint_V\left[\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\ \frac{1}{2}(\delta u_{2i,j}+\delta u_{2j,i})-\sigma_{1ij}\ \frac{1}{2}(\delta u_{2i,j}+\delta u_{2j,i})\right]dV$$

$$=\iint_{S_p+S_u}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\right)n_j\delta u_{2i}dS-\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}-\sigma_{1ij,j}\right]\delta u_{2i}dV$$

$$=0 \tag{3.3}$$

由于在S_u上$\delta u_{2i}=0$且据变分法预备定理，我们得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}=\sigma_{1ij,j}\qquad (x_i\in V) \tag{3.4}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\sigma e_{2ij}}\right)n_j=\sigma_{1ij}n_j\qquad (x_i\in S_p) \tag{3.5}$$

式(3.4)和(3.5)分别是泛函(3.2)的欧拉方程和自然边界条件．

应用约束条件

$$\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{2ij}=0.$$

方程(3.4)和(3.5)分别成为

$$\sigma_{2ij,j}=\sigma_{1ij,j} \tag{3.4)'}$$

$$\sigma_{2ij}n_j=\sigma_{1ij}n_j \tag{3.5)'}$$

由另一方法也可得泛函(3.2)．对于第二系统的最小势能原理，有表达式

$$\delta\Pi_{2p}=\iiint_V\delta A(e_2)dV-\iiint_V\bar{F}_i\delta u_{2i}dV$$

$$-\iint_{S_p}\bar{p}_i\delta u_{2i}dS=0 \tag{3.6}$$

式(2.12)对第二系统的位移取变分，我们得

$$\iiint_V\bar{F}_i\delta u_{2i}dV+\iint_{S_p}\bar{p}_i\delta u_{2i}dS=\iiint_V\sigma_{1ij}\delta e_{2ij}dV \tag{3.7}$$

将式(3.7)代入式(3.6)，我们有

$$\delta\Pi_{cp}=\iiint_V\delta A(e_2)dV-\iiint_V\sigma_{1ij}\delta e_{2ij}dV \tag{3.8}$$

式(3.8)的泛函即式(3.2)．

2. 耦联系统的余能原理

对式(2.13)取第二系统的应力变分，我们得

$$\iiint_V (e_{2ij}\delta\sigma_{2ij}-e_{1ij}\delta\sigma_{2ij})dV=0 \tag{3.9}$$

对应于变分方程(3.9)的泛函可写成为

$$\Pi_{oc}=\iiint_V [B(\sigma_2)-e_{1ij}\sigma_{2ij}]dV \tag{3.10}$$

对式(3.10)取极值，我们有

$$\delta\Pi_{oc}=\iiint_V\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}\delta\sigma_{2ij}-e_{1ij}\delta\sigma_{2ij}\right)dV=0 \tag{3.11}$$

由于第二系统的应力分量是容许的，故我们有

$$\iiint_V u_{1i}\delta\sigma_{2ij,j}dV=\iint_{S_u}u_{1i}\delta\sigma_{2ij}n_j dS-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{1i,j}+u_{1j,i})\delta\sigma_{2ij}dV=0 \tag{3.12a}$$

$$\iiint_V u_{2i}\delta\sigma_{2ij,j}dV=\iint_{S_u}u_{2i}\delta\sigma_{2ij}n_j dS-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\delta\sigma_{2ij}dV=0 \tag{3.12b}$$

将式(3.12b)和式(3.11)相加和式(3.11)减去式(3.12a)，我们得到

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{oc}=\iiint_V\Big\{&\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]\\&-\left[e_{1ij}-\frac{1}{2}(u_{1i,j}+u_{1j,i})\right]\Big\}\delta\sigma_{2ij}dV\\&+\iint_{S_u}(u_{2i}-u_{1i})\delta\sigma_{2ij}n_j dS=0\end{aligned} \tag{3.13}$$

由于第一系统的状态已是已知的，再据变分法预备定理，可从式(3.13)导出

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \qquad (x_i\in V) \tag{3.14}$$

$$u_{2i}=u_{1i} \qquad (x_i\in S_u) \tag{3.15}$$

式(3.14)和(3.15)分别是泛函(3.10)的欧拉方程和自然边界条件。

应用约束条件

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}-e_{2ij}=0,$$

式(3.14)成为

$$e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \tag{3.14$'$}$$

泛函(3.10)也可利用其它方法得到。对于第二系统。最小余能原理被表示为

$$\delta\Pi_{2c}=\iiint_V\delta B(\sigma_2)dV-\iint_{S_u}\bar{u}_i\delta p_{2i}dS=0 \tag{3.16}$$

对式(2.11)第二系统的应力分量取变分，我们得

$$\iint_{S_u} \bar{u}_i \delta p_{2i} dS = \iiint_V e_{1ij} \delta \sigma_{2ij} dV \tag{3.17}$$

将式(3.17)代入式(3.16)，我们得

$$\delta \Pi_{oc} = \iiint_V [\delta B(\sigma_2) - e_{1ij} \delta \sigma_{2ij}] dV \tag{3.18}$$

式(3.18)的泛函即式(3.10)。

四、光测弹性理论中耦联系统具有二变量的广义变分原理

1. 耦联系统具有变量u_{2i}和σ_{2ij}的广义余能原理

首先，让我们应用零差功原理来构造耦联系统的广义余能泛函。

对第二系统，有Hellinger-Reissner广义余能泛函

$$\Pi_{HR} = \iiint_V [B(\sigma_2) + (\sigma_{2ij,j} + \bar{F}_i) u_{2i}] dV - \iint_{S_u} \sigma_{2ij} n_j \bar{u}_i dS - \iint_{S_p} u_{2i} (\sigma_{2ij} n_j - \bar{p}_i) dS \tag{4.1}$$

将式(2.13)中的$\iiint_V \sigma_{2ij} e_{2ij} dV$代入式(4.1)中并注意式(2.9)，则式(4.1)可改写成

$$\Pi_{HR} = \iiint_V [B(\sigma_2) + \sigma_{2ij} e_{1ij} + \sigma_{1ij} e_{2ij} - \sigma_{1ij} e_{1ij} + \sigma_{2ij,j} u_{2i}] dV - 2\iint_{S_u} \sigma_{2ij} n_j \bar{u}_i dS - \iint_{S_p} p_{2i} u_{2i} dS \tag{4.2}$$

对式(2.11)中σ_{2ij}取变分，则得

$$\iint_{S_u} \bar{u}_i \delta \sigma_{2ij} n_j dS = \iiint_V e_{1ij} \delta \sigma_{2ij} dV \tag{4.3}$$

且将(4.3)代入(4.2)的驻值式，我们得

$$\delta \Pi_{HR} = \iiint_V \delta [B(\sigma_2) + \sigma_{1ij} e_{2ij} + \sigma_{2ij,j} u_{2i}] dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta \sigma_{2ij} n_j dS - \iint_{S_p} \delta (p_{2i} u_{2i}) dS = 0 \tag{4.4}$$

对于零差功原理，两系统都处于真实状态，故有

$$\iiint_V \sigma_{1ij} \delta e_{2ij} dV = \iint_{S_p} \sigma_{1ij} n_j \delta u_{2i} dS - \iiint_V \sigma_{1ij,j} \delta u_{2i} dV \tag{4.5}$$

但在式(4.4)中$\iint_{S_u} \sigma_{1ij} n_j \delta u_{2i} dS$不为零，因而泛函可写成

$$\Pi_{cgc} = \iiint_V [B(\sigma_2) + \sigma_{2ij,j} u_{2i} + \sigma_{1ij} \frac{1}{2} (u_{2i,j} + u_{2j,i})] dV - \iint_{S_u} (u_{1i} \sigma_{2ij} n_j + u_{2i} \sigma_{1ij} n_j) dS - \iint_{S_p} u_{2i} \sigma_{2ij} n_j dS \tag{4.6}$$

它就是耦联系统具有变量u_{2i}和σ_{2ij}的广义余能泛函。

对泛函(4.6)取驻值，我们得

$$\delta\Pi_{cgc}=\iiint_V\left\{\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]\delta\sigma_{2ij}+(\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j})\delta u_{2i}\right\}dV+\iint_{S_u}(u_{2i}-u_{1i})\delta\sigma_{2ij}n_j dS-\iint_{S_p}(\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j)\delta u_{2j}dS=0 \tag{4.7}$$

据变分法预备定理，我们最后得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2ij,j}+u_{2j,i})=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.8}$$

$$\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.9}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{4.10}$$

$$\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{4.11}$$

利用约束条件

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{2ij}}-e_{2ij}=0$$

式(4.8)成为

$$e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \tag{4.8$'$}$$

式 (4.8)[或(4.8)′]，(4.9)，(4.10)和(4.11)分别是泛函 (4.7) 的欧拉方程和自然边界条件。

2. 耦联系统具有变量u_{2i}和e_{2ij}的广义势能原理

对于第二系统，有以u_{2i}和e_{2ij}为变量的广义势能泛函[2]

$$\Pi_{gp}=\iiint_V\left\{A(e_2)-\frac{\partial A(e_2)}{\partial e_{2ij}}\left[e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]-\bar{F}_i u_{2i}\right\}dV-\iint_{S_p}\bar{p}_i u_{2i}dS-\iint_{S_u}\frac{\partial A(e_2)}{\partial e_{2ij}}n_j(u_{2i}-\bar{u}_{2i})dS \tag{4.12}$$

用与构造泛函(4.6)相同的方法，可得耦联系统具有变量为u_{2i}和e_{2ij}的广义势能泛函如下

$$\Pi_{cgp}=\iiint_V\left\{A-\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\left[e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]-\sigma_{1ij}\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right\}dV+\iint_{S_u}\sigma_{1ij}n_j u_{2i}dS-\iint_{S_u}\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}n_j(u_{2i}-u_{1i})dS \tag{4.13}$$

对泛函(4.13)取驻值，可得变分方程

$$\delta\Pi_{cgp}=\iiint_V\left\{-\left[e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)\right.$$

$$-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}-\sigma_{1ij,j}\right]\delta u_{2i}\Big\}dV$$

$$+\iint_{S_p}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}n_j-\sigma_{1ij}n_j\right)\delta u_{2i}dS$$

$$-\iint_{S_u}(u_{2i}-u_{1i})n_j\delta\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)dS=0 \tag{4.14}$$

应用变分法预备定理，我们可得其欧拉方程及自然边界条件为

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}-\sigma_{1ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.15}$$

$$e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.16}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}\right)n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{4.17}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_1\in S_u) \tag{4.18}$$

应用约束条件

$$\frac{\partial A}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{2ij}=0$$

式(4.15)和(4.17)分别为

$$\sigma_{1j,j}-\sigma_{1ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.15$'$}$$

$$\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{4.17$'$}$$

五、原理的解析应用

1. 零差功原理的应用

假设有两球体，它们被相同的引力作用，但是由不同材料构成的。对第一个球体，其解是[1]

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=\frac{1}{5}\frac{5\lambda_1+6\mu_1}{3\lambda_1+2\mu_1}k_1a^2r-\frac{1}{5}k_1r^3=A_1r-B_1r^3\\
e_{r1}&=\frac{1}{5}\frac{5\lambda_1+6\mu_1}{3\lambda_1+2\mu_1}k_1a^2-\frac{3}{5}k_1r^2=A_1-3B_1r^2\\
e_{\theta1}=e_{\varphi1}&=\frac{1}{5}\frac{5\lambda_1+6\mu_1}{3\lambda_1+2\mu_1}k_1a-\frac{1}{5}k_1r^2=A_1-B_1r^2\\
\sigma_{r1}&=\frac{1}{5}(5\lambda_1+6\mu_1)k_1(a^2-r^2)\\
&=A_1(3\lambda_1+2\mu_1)-B_1(5\lambda_1+5\mu_1)r^2\\
\sigma_{\theta1}=\sigma_{\varphi1}&=\frac{1}{5}(5\lambda_1+6\mu_1)k_1a^2-\frac{1}{5}(5\lambda_1+2\mu_1)k_1r^2\\
&=A_1(3\lambda_1+2\mu_1)-B_1(5\lambda_1+2\mu_1)r^2
\end{aligned}\right\} \tag{5.1a,b,c,d,e}$$

这里$k_1=\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_1+2\mu_1}\frac{\rho g}{a}$，$\lambda_1=\frac{E_1\nu_1}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}$，$\mu_1=\frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$，$E_1$和$\nu_1$分别是第一球体的杨氏模量和柏松比，而$\rho$表示两球体的密度，即两球体的密度彼此相同，

将E_2和ν_2分别代入式(5.1)中的E_1和ν_1，极易将第二球体的解。但是现在我们的问题是如何应用零差功原理求第二球体的解。

对于第二球体，我们假设

$$\left.\begin{aligned}
&u_2=A_2r-B_2r^3\\
&e_{r2}=A_2-3B_2r^2\\
&e_{\varphi2}=e_{\theta2}=A_2-B_2r^2\\
&\sigma_{r2}=A_2(3\lambda_2+2\mu_2)-(5\lambda_2+6\mu_2)B_2r^2\\
&\sigma_{\theta2}=\sigma_{\varphi2}=A_2(3\lambda_2+2\mu_2)-B_2(5\lambda_2+2\mu_2)r^2
\end{aligned}\right\}\tag{5.2a,b,c,d,e}$$

应用零差功原理于该两球体，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[(\sigma_{r2}e_{r2}+\sigma_{\theta2}e_{\theta2}+\sigma_{\varphi2}e_{\varphi2})+(\sigma_{r1}e_{r1}+\sigma_{\theta1}e_{\theta1}+\sigma_{\varphi1}e_{\varphi1})\\
&\qquad-(\sigma_{r2}e_{r1}+\sigma_{2\theta}e_{\theta1}+\sigma_{\varphi2}e_{\varphi1})-(\sigma_{r1}e_{r2}+\sigma_{\theta1}e_{\theta2}+\sigma_{\varphi1}e_{\varphi2})]r^2drd\theta d\varphi\\
&\qquad=0
\end{aligned}\tag{5.3}$$

将(5.1)和(5.2)代入(5.3)，我们得

$$\begin{aligned}
&(A_1-A_2)[(3\lambda_1+2\mu_1)A_1-a^2(3\lambda_1+2\mu_1)B_1\\
&\qquad-(3\lambda_2+2\mu_2)A_2+a^2(3\lambda_2+2\mu_2)B_2]\\
&\qquad-(B_1-B_2)\left[(3\lambda_1+2\mu_1)a^2A_1-(25\lambda_1+22\mu_1)\frac{a^4}{\eta}B_1\right.\\
&\qquad\left.-(3\lambda_2+2\mu_2)a^2A_2+(25\lambda_2+22\mu_2)\frac{a^4}{\eta}B_2\right]=0
\end{aligned}\tag{5.4}$$

由于(A_1-A_2)和(B_1-B_2)是不为零的，任意的独立变量，因此我们有

$$\left.\begin{aligned}
&(3\lambda_2+2\mu_2)A_2-a^2(3\lambda_2+2\mu_2)B_2\\
&\qquad=(3\lambda_1+2\mu_1)A_1-a^2(3\lambda_1+2\mu_1)B_1\\
&(3\lambda_2+2\mu_2)A_2-\frac{a^2}{\eta}(25\lambda_2+22\mu_2)B_2\\
&\qquad=(3\lambda_1+2\mu_1)A_1-\frac{a^2}{\eta}(25\lambda_1+22\mu_1)B_1
\end{aligned}\right\}\tag{5.5a,b}$$

解此方程组，我们得第二球体的解为

$$A_2=\frac{1}{5}\frac{5\lambda_2+6\mu_2}{3\lambda_2+2\mu_2}k_2a^2,\quad B_2=\frac{1}{5}k_2,\quad k_2=\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_2+2\mu_2}\frac{\rho g}{a}\tag{5.6}$$

它也表明，该原理是正确的。

2. 耦联系统势能原理的应用

让我们考虑两矩形板，其一是示于图1(a)的均质板，另一个是示于图1(b)的正交各向异性板，它们是耦联系统，它们在$y=b$边上都受相同的分布载荷$P_{yb}=\sum\limits_{m=1,3}^{\infty}p_m\sin\frac{m\pi x}{a}$的作用。现在我们的问题是利用耦联势能原理求均质板的对偶解。

应用功的互等定理法可求得均质板的挠曲面方程，它为

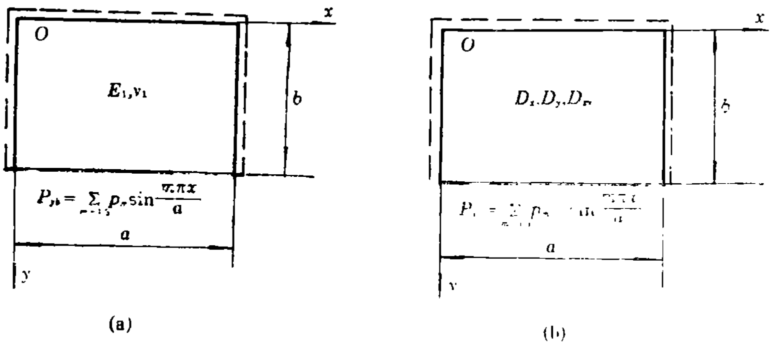

图 1

$$w_1(x,y)=\frac{1}{D_1(1-\nu_1)}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{p_m}{\left[\frac{1}{2}(3+\nu_1)\frac{\mathrm{ch}\beta_m}{\mathrm{sh}\beta_m}+\frac{1}{2}(1-\nu_1)\frac{\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\right]\left(\frac{m\pi}{a}\right)^3}$$
$$\left\{\left[\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}+\frac{1}{2}(1-\nu_1)\beta_m\frac{\mathrm{ch}\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\right]\mathrm{sh}\frac{\beta_m y}{b}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(1-\nu_1)\frac{1}{\mathrm{sh}\beta_m}\frac{\beta_m y}{b}\mathrm{ch}\frac{\beta_m y}{b}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{5.7}$$

耦联系统的总势能表示为

$$\Pi_{cy}=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left[D_x\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right)^2+2D_1\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.+D_y\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right)^2+4D_{xy}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b(M_{x_1}\chi_{x_2}+M_{y_1}\chi_{y_2}+2M_{xy1}\chi_{xy2})dxdy \tag{5.8}$$

假设正交各向异性板的容许位移为

$$w_2(x,y)=\sum_{m=1,3}^{\infty}\left[A_m\mathrm{sh}\frac{\beta_m y}{b}+B_m\left(\frac{\beta_m y}{b}\right)\mathrm{ch}\frac{\beta_m y}{b}\right]\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{5.9}$$

经过计算，我们得耦联系统的外力势为

$$\int_0^a\int_0^b(M_{x1}\chi_{x2}+M_{y1}\chi_{y2}+2M_{xy1}\chi_{xy2})dxdy$$
$$=\frac{a}{2}\sum_{m=1,3}^{\infty}p_m(A_m\mathrm{sh}\beta_m+B_m\beta_m\mathrm{ch}\beta_m) \tag{5.10}$$

正交各向异性板的外力势也为

$$\int_0^a\sum_{m=1,3}^{\infty}p_m\sin\frac{m\pi x}{a}w_{2yb}dx$$
$$=\frac{a}{2}\sum_{m=1,3}^{\infty}p_m(A_m\mathrm{sh}\beta_m+B_m\beta_m\mathrm{ch}\beta_m) \tag{5.11}$$

该算例亦说明，该耦联系统的势能原理是正确的。

3．耦联系统余能原理的应用

图2(a)和图2(b)表示两个均质矩形板．图2(a)中的第一块板是由E_1和ν_1的材料构成的．而第二块为E_2和ν_2．在$y=b$边上，它们都受相同的指定位移$w_{yb}=\sum\limits_{m=1,3}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi x}{a}$的作用．它们是耦联系统．在下面．我们将利用耦联系统余能原理来求第二块板的挠曲面方程．即第一块板的对偶解．

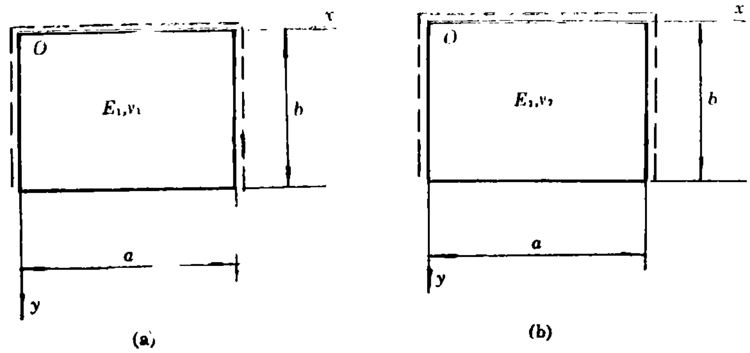

图 2

应用功的互等定理法，我们可得图2(a)中第一块板的挠曲面方程如下

$$w_1(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{m=1,3}^{\infty}\left[2+(1-\nu)\left(\beta_m\operatorname{cth}\beta_m-\frac{\beta_m y}{b}\operatorname{cth}\frac{\beta_m y}{b}\right)\right]$$

$$\frac{a_m}{\operatorname{sh}\beta_m}\operatorname{sh}\frac{\beta_m y}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{5 12}$$

设第二块板的容许弯矩和扭矩分别为

$$M_{x2}=\sum_{m=1,3}^{\infty}\left(A_m\operatorname{sh}\frac{\beta_m y}{b}+B_m\frac{\beta_m y}{b}\operatorname{ch}\frac{\beta_m y}{b}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$M_{y2}=\sum_{m=1,3}^{\infty}\left(\operatorname{sh}\frac{\beta_m y}{b}-\frac{1}{\beta_m}\operatorname{th}\beta_m\frac{\beta_m y}{b}\operatorname{ch}\frac{\beta_m y}{b}\right)C_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$M_{xy2}=\sum_{m=1,3}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left[B_m-A_m+C_m\left(1-\frac{1}{\beta_m}\operatorname{th}\beta_m\right)\right]\operatorname{ch}\frac{\beta_m y}{b}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(\frac{C_m}{\beta_m}\operatorname{th}\beta_m+B_m\right)\frac{\beta_m}{b}\operatorname{sh}\frac{\beta_m y}{b}\right\}\cos\frac{m\pi x}{a}\tag{5.13}$$

耦联系统的余能泛函为

$$\Pi_{ee}=\frac{1}{2D_2(1+\nu_2^2)}\int_0^a\int_0^b[M_{x2}^2+M_{y2}^2-2\nu_2M_{x2}M_{y2}$$

$$+2(1+\nu_2)M_{xy2}^2]dxdy-\int_0^a\int_0^b(M_{x2}\chi_{x1}+M_{y2}\chi_{y1}+2M_{xy2}\chi_{xy1})dxdy$$

$$\tag{5.14}$$

经过计算，我们得该耦联系统指定位移的余势是

$$\int_0^a\int_0^b(M_{x2}\chi_{x1}+M_{y2}\chi_{y1}+2M_{xy2}\chi_{xy1})dxdy$$

$$=\frac{a}{2}\sum_{m=1,3}^{\infty}a_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[A_m\frac{b}{\beta_m}\operatorname{ch}\beta_m+B_m\left(b\operatorname{sh}\beta_m-\frac{b}{\beta_m}\operatorname{ch}\beta_m\right)\right] \quad (5.15)$$

对于第二系统，指定位移的余势也为

$$\int_0^a\left(\frac{\partial M_{y2}}{\partial y}+2\frac{\partial M_{xy2}}{\partial x}\right)_{y=b}\sum_{m=1,3}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$=\frac{a}{2}\sum_{m=1,3}^{\infty}a_m\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[A_m\frac{b}{\beta_m}\operatorname{ch}\beta_m+B_m\left(b\operatorname{sh}\beta_m-\frac{b}{\beta_m}\operatorname{ch}\beta_m\right)\right] \quad (5.16)$$

该计算也证明，耦联系统余能原理是正确的。

最后，我们必须指出，对上述板的两个例题，它们的挠曲面方程都和自己的柏松比 ν 有关，因此该两算例更令人信服。

参 考 文 献

[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，北京(1956)。

[2] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社，北京(1985)。

[3] Kyuichiro Washizy, *Variational Methods in Elysticity and Plasticity*, Pergamon-press(1975).

The Variational Principles of Coupled Systems in Photoelasticity

Fu Bao-lian

(Yanshan University, Qinhuangdao)

Abstract

This paper presents an energy principle, zero different work principle of coupled systems in photoelaticity, from which potential energy, complementary energy, generalized potential energy and generalized complementary energy variational principles of the coupled systems in photoelasticity are derived.

What is called the coupled systems means that two deformational bodies, for which figures, sizes, loads and boundary conditions are all the same and they are all in actual states but they are made of different materials.

Prototype body and model body in photoelasticity are essentially the coupled systems, therefore the above principles become theoretical basis of defining the influnce of Poissons ratio ν on accuracy of the frozen-stress method.

Key words photoelasticity, coupled systems, zero different work principle, coupled variational principle