

正交异性复合材料J积分的研究*

王蔼勤 冯宝莲 杨维阳

(太原重型机械学院, 1992年11月26日收到)

摘 要

本文推导了正交异性复合材料板 I 型裂纹 J 积分与位移导数的关系式, 同时给出了应力强度因子 K_I 与位移的关系式。采用贴片云纹干涉法对三点弯曲梁进行了测试。由云纹图的位移场求出了 J 与 K_I 值, 进而验证了正交异性复合材料板 J 与 K_I 的关系式的正确性。

关键词 正交异性复合材料 J 积分 贴片云纹干涉

一、讨论的问题

J 积分在断裂力学中有很重要的地位。对于各向同性均匀材料板, 其 I 型裂纹 J 积分与应力强度因子 K_I 有以下周知的关系式^[1]

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad (\text{平面应力状态}) \quad (1.1)$$

对于正交异性复合材料板, 文[1]、[2]借助了微积分和复变函数的理论, 推出了 J 积分与应力强度因子 K_I 之间有以下关系式

$$J = K_I^2 \frac{b_{22}}{2} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \cdot \beta_2} = K_I^2 \frac{b_{11}}{2} \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) \quad (\Delta > 0) \quad (1.2)$$

$$J = K_I^2 b_{22} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = K_I^2 b_{11} \beta (\alpha^2 + \beta^2) \quad (\Delta < 0) \quad (1.3)$$

其中

$$\Delta = \left(\frac{2b_{12} + b_{000}}{b_{22}} \right)^2 - 4 \frac{b_{11}}{b_{22}} \quad (1.4)$$

它是下列特征方程的判别式

$$1 + \frac{2b_{12} + b_{000}}{b_{22}} S^2 + \frac{b_{11}}{b_{22}} S^4 = 0 \quad (1.5)$$

当 $\Delta > 0$ 时, 特征方程(1.5)有两对共轭纯虚根:

$$S_1 = i\beta_1, S_2 = i\beta_2, S_3 = -i\beta_1, S_4 = -i\beta_2 \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1^2 &= \frac{2b_{12} + b_{000}}{2b_{11}} - \sqrt{\left(\frac{2b_{12} + b_{000}}{2b_{11}} \right)^2 - \frac{b_{22}}{b_{11}}} & (\beta_1 > 0) \\ \beta_2^2 &= \frac{2b_{12} + b_{000}}{2b_{11}} + \sqrt{\left(\frac{2b_{12} + b_{000}}{2b_{11}} \right)^2 - \frac{b_{22}}{b_{11}}} & (\beta_2 > 0) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

* 樊大钧推荐。

当 $\Delta < 0$ 时, 特征方程(1.5)有两对共轭复根:

$$S_1 = a + i\beta, S_2 = -a + i\beta, S_3 = \bar{S}_1, S_4 = \bar{S}_2 \quad (1.8)$$

$$2\alpha^2 = \left. \begin{aligned} &\sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}} - \frac{2b_{12} + b_{66}}{2b_{11}}} \\ &\sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}} + \frac{2b_{12} + b_{66}}{2b_{11}}} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

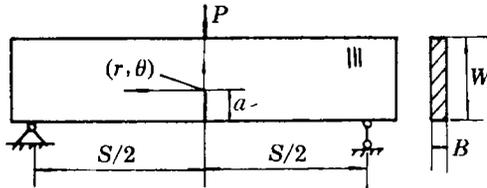


图 1

J 积分公式(1.2), (1.3)的正确性能否通过实验进行验证? 这就是本文所要讨论的问题。为此, 我们将以环氧为基体玻璃纤维增强的单向板加工成三点弯曲构件, 其裂纹方向与纤维增强方向平行, 如图1所示, 采用贴片云纹干涉法进行了有关的测试。

二、基本公式

下面我们推导贴片云纹干涉法进行实验测试时所要用到的两个基本公式。

1. J 积分的位移导数表达式

对于平面断裂问题, 已知^[2]

$$J = \int_{\Gamma} \left(\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left[\frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) - \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dy \quad (2.1)$$

其中 Γ 是环绕裂纹尖端从裂纹下表面一点逆时方向走到上表面一点的任意积分路径, 如图2所示。

对于线弹性正交异性复合材料板, 有应力-应变关系:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y \\ \varepsilon_y &= b_{12}\sigma_x + b_{22}\sigma_y \\ \gamma_{xy} &= b_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\}$$

由此解出 $\sigma_x = \frac{b_{22}}{B} \varepsilon_x - \frac{b_{12}}{B} \varepsilon_y$

$$\sigma_y = -\frac{b_{12}}{B} \varepsilon_x + \frac{b_{11}}{B} \varepsilon_y$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b_{66}} \gamma_{xy}$$

其中 $B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$, 注意到应变-位移关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.2)$$

于是有

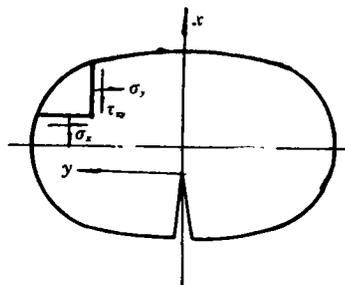


图 2

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{b_{22}}{B} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{b_{12}}{B} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_y &= -\frac{b_{12}}{B} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_{11}}{B} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{b_{66}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

将(2.2)、(2.3)代入(2.1), 得到J积分的位移导数表达式

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{b_{66}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{1}{b_{66}} - \frac{b_{12}}{B} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_{11}}{B} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx + \left\{ \frac{1}{2b_{66}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2B} \left[b_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - b_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dy \end{aligned} \quad (2.4)$$

可取积分路线 Γ 为正向矩形, 如图3所示, 有

$$J = J_{AB} + J_{BC} + J_{CD} + J_{DE} + J_{EF} + J_{FA} \quad (2.5)$$

由于对称性,

$$J_{BC} = -J_{EF}, \quad J_{AB} = J_{FA}, \quad J_{CD} = J_{DE}$$

注意到线段 AB 、 CD 、 $dx=0$, 于是(2.5)可化

简为

$$J = \int_{AB+CD} \left\{ \frac{1}{b_{66}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{1}{B} \left[b_{22} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - b_{11} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dy \quad (2.6)$$

我们采用贴片云纹干涉法测得 u 、 v 位移场, 用差分法近似代替位移导数, 由(2.6)式可以求出J积分的值。

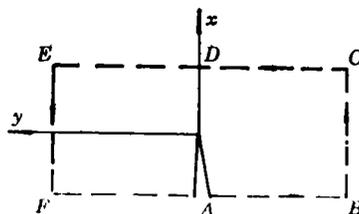


图 3

2. 应力强度因子的位移表达式

对于正交异性复合材料板, 当裂纹线与材料主轴平行时, 由文献[3]知

$$\begin{aligned} v &= K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_1 - S_2} (S_1 q_2 \sqrt{\cos\theta + S_2 \sin\theta} - S_2 q_1 \sqrt{\cos\theta + S_1 \sin\theta}) \right] \\ &\quad + K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{S_1 - S_2} (q_2 \sqrt{\cos\theta + S_2 \sin\theta} - q_1 \sqrt{\cos\theta + S_1 \sin\theta}) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中

$$q_k = b_{12} S_k + \frac{b_{22}}{S_k} \quad (k=1, 2) \quad (2.8)$$

$$\sqrt{\cos\theta + S_k \sin\theta} = \psi_k^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\varphi_k}{2} + i \sin \frac{\varphi_k}{2} \right) \quad (k=1, 2) \quad (2.9)$$

当 $\Delta > 0$ 时, 由(1.6)可知

$$\left. \begin{aligned} \psi_k &= \sqrt{\cos^2\theta + \beta_k^2 \sin^2\theta} \\ \varphi_k &= \arctg \beta_k \operatorname{tg}\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

当 $\Delta < 0$ 时, 由 (1.8) 可知

$$\left. \begin{aligned} \psi_k &= \sqrt{[\cos\theta + (-1)^{k-1} a \sin\theta]^2 + \beta^2 \sin^2\theta} \\ \varphi_k &= \arctg \frac{\beta \operatorname{tg}\theta}{a + (-1)^{k-1} a \operatorname{tg}\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

这样, 公式 (2.7) 可改写为

$$\begin{aligned} v &= K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \left[S_1 q_2 \psi_2^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_2 q_1 \psi_1^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right\} + K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \right. \\ &\quad \left. \times \left[q_2 \psi_2^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) - q_1 \psi_1^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

对 I 型裂纹, 上式可化简为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{S_1 - S_2} \left[S_1 q_2 \psi_2^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + i \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_2 q_1 \psi_1^{1/2} \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + i \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right\} \quad (2.13) \end{aligned}$$

由 (2.13) 式即可由裂纹尖端附近与测点坐标 (r, θ) 对应的 v 位移分量求出 K_I 值。

三、测试方法

1. 贴片云纹干涉法

首先, 在复合材料弯曲试件粘上 I 型全息软片, 把粘上胶片的试件放到图 4 所示正交光路。试件第一次曝光, 在胶片感光药膜上形成虚光栅, 相当于普通云纹的基准栅, 加载后再曝光, 此时记录的光栅, 相当于普通云纹的试件栅。经两次曝光后, 将胶片与复合材料试件分离, 分离后的胶片显影、定影处理, 经白光或激光再现, 即得位移云纹图。

如图 4 所示, 由水平的两束光形成竖直光栅, 由竖直的两束光形成水平光栅, 本实验同步获得 u, v 两个方向上的位移信息。经几何法精确测得栅线频率。

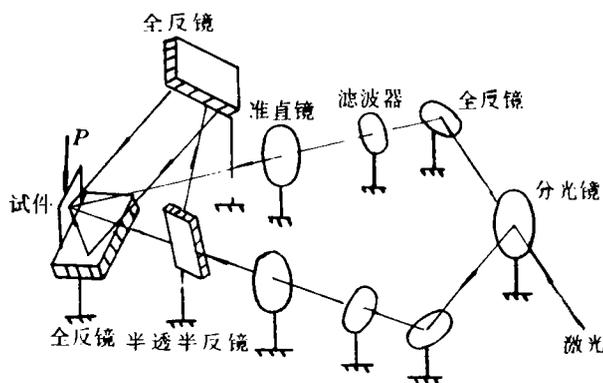


图 4

x向 $f_x=1438$ 线/mm, y向 $f_y=1053$ 线/mm

由云纹法知^[4]

$$v = n_v \cdot \frac{1}{f_y} \quad (3.1)$$

其中 n_v 为 v 位移图上条纹级别。

(3.1)代入(2.13)即能得应力强度因子 k_I 测试值。

2. 位移导数的测定

位移导数用几何法计算得

对 u 位移场 (如图5a)

有:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{p}{f_{xx}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{p'}{f_{yy}} \quad (3.2)$$

同理, 对 v 位移场 (如图5(b))

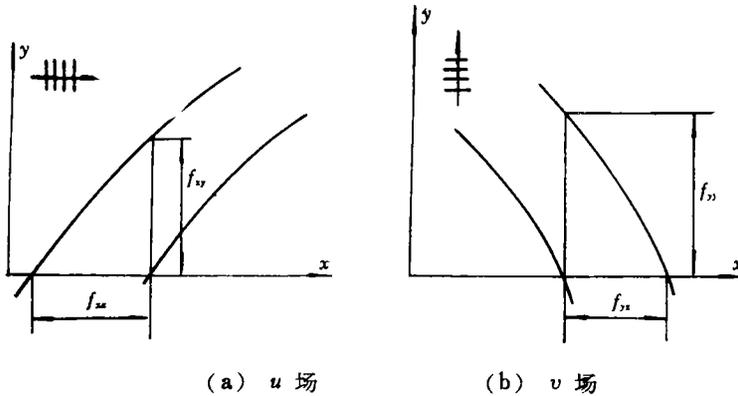


图 5

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{p'}{f_{yy}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{p}{f_{xx}} \quad (3.3)$$

其中

p 为水平方向栅线节距,

p' 为竖直方向栅线节距。

将(3.2)、(3.3)代入(2.6)式, 且以差分形式表达

$$J = \frac{1}{b_{66}} \left[\sum_{n=1}^k \left(\frac{p}{f_{yy}^{(n)}} \right)^2 f_x y^{(n)} - \sum_{n=1}^k \left(\frac{p'}{f_{xx}^{(n)}} \right)^2 f_y y^{(n)} \right] - \frac{1}{B} \left[b_{22} \sum_{n=1}^k \left(\frac{p}{f_{xx}^{(n)}} \right)^2 f_x y^{(n)} - b_{11} \sum_{n=1}^k \left(\frac{p'}{f_{yy}^{(n)}} \right)^2 f_y y^{(n)} \right] \quad (3.4)$$

从 u , v 位移图上取得条纹截距, 代入(3.4)式, 经差分数据处理即得云纹法实测的 J 积分值。

四、测试结果与分析

图1所示弯曲梁: 跨度 $S=12$ cm, 高 $W=30$ mm, 宽 $B=6$ mm, 裂纹长度 $a=9$ mm。

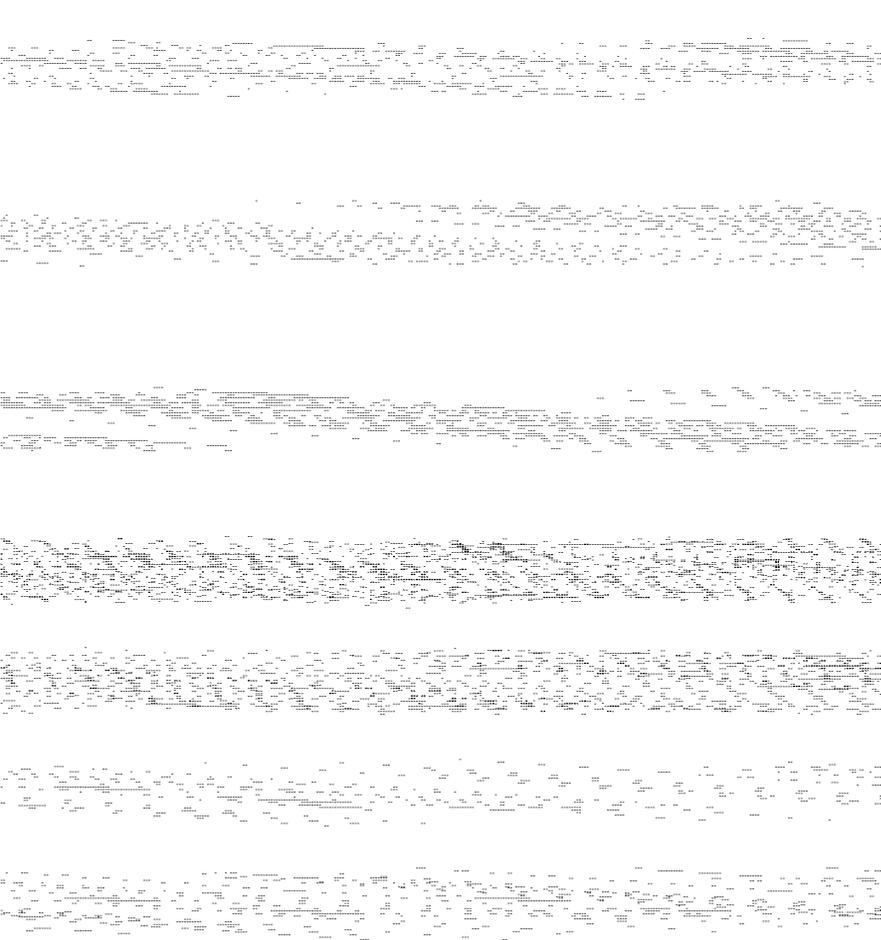


表 1

E_L (GN/m ²)	E_T (GN/m ²)	ν_{LT}	ν_{TL}	G_{LT} (GN/m ²)
46	11.4	0.33	0.082	5.3

2. K_I 测试

当 $\Delta > 0$, (2.3)式可化为

$$v = K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[\left(b_{22} \frac{\beta_2}{\beta_1} - b_{12} \beta_1 \beta_2 \right) \sin \frac{\varphi_1}{2} \psi_1^{1/2} - \left(b_{22} \frac{\beta_1}{\beta_2} - b_{12} \beta_1 \beta_2 \right) \sin \frac{\varphi_2}{2} \psi_2^{1/2} \right] \quad (4.3)$$

当测点 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 由(2.10), (4.2)代入(4.3)解得

$$v = 0.812 \times 10^{-6} K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}}$$

$$K_I = \frac{v \times 10^6}{0.812 \sqrt{\frac{2r}{\pi}}} \quad (4.4)$$

同理, 当测点 $\theta = \pi$, 有

$$K_I = \frac{v \times 10^6}{1.514 \sqrt{\frac{2r}{\pi}}} \quad (4.5)$$

当 r 、 v 单位取cm时, K_I 的单位是 $N/cm^{3/2}$ 。 K_I 测试值见表2、表3。如表所示, 随着测点 r 值的加大, K_I 测试值相应增大。为此, 用回归分析法由线性回归外推求出与 $r=0$ 对应的真正的测试值。表2、3中三点弯曲梁各向同性理论解参照文献[5]计算得。

由表2、表3可看出: 各向异性材料 K_I 测试值与各向同性材料的 K_I 理论解比较吻合, 这样的吻合与文献[6]测试结果相同。这是因为, 裂纹方向与纤维增强方向一致, 纤维增强未

表2 K_I 实验数据($P=88N$)

条纹级次 (n)	r(cm) $\theta=\pi$	r/a	$K_I(N/cm^{3/2})$
1.5	0.047	0.06	544
2	0.07	0.088	595
2.5	0.098	0.123	627
3	0.127	0.16	654
3.5	0.153	0.19	704
4	0.185	0.23	731
4.5	0.223	0.28	748
拟合值			530(16.8N/mm ^{3/2})
各向同性理论解			505(16N/mm ^{3/2})

表3 K_I 实验数据($P=100N$)

条纹级次 (n)	r(cm) $\theta=\pi$	r/a	$K_I(N/cm^{3/2})$
2	0.053	0.06	686
2.5	0.079	0.088	700
3	0.11	0.122	710
3.5	0.144	0.160	727
4	0.182	0.202	738
4.5	0.222	0.247	750
5	0.266	0.295	761
拟合值			651.5(20.6N/mm ^{3/2})
各向同性理论解			617(19.5N/mm ^{3/2})

起到应有的作用。

3. J 积分测试

取试件积分回路如图7所示, 在云纹图上沿 $AB(A'B')$ 及 $CD(C'D')$ 方向上量取截距, 由于(2.6)式中一阶位移导数均是二次项, 故而在云纹处理时, 不必考虑条纹增加(或减少)的方向, 数据处理结果见表4, 表中同时附上由(1.2)理论式计算而得的 J 值, (1.2)式中 K_I 值及柔度系数均为本文测试值。

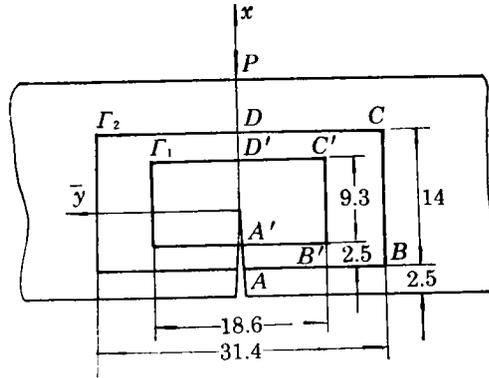


图 7

表4

J 积分值(单位: N/mm)

积分路线	$P=100\text{ N}$		$P=88\text{ N}$	
	测试值	计算式解	测试值	计算式解
Γ_1	30.24×10^{-3}	28.8×10^{-3}	20.89×10^{-3}	19.4×10^{-3}
Γ_2	26.1×10^{-3}		17.3×10^{-3}	

J 积分值应与积分路线无关, 但从表4中看出不同积分回路上的 J 测试值有一定差值, 这主要是条纹间距的测读有累计误差, 因而 J 积分测试中数据处理的精度有待于提高。

五、结 束 语

1. 本文推导出的 J 积分位移导数表达式, 对平面问题 J 积分的计算具有普遍意义。
2. 贴片云纹干涉法是一种非破坏性的测定方法, 故可推广应用于工程构件 K_I 与 J 积分等断裂实测。本文测试用的材料是在判别式 $\Delta > 0$ 情况下, 但该测试方法完全能适用于测试 $\Delta < 0$ 的复合材料。
3. 由测试表明: J 积分测试值与文献[2]作者推导出的理论公式解基本接近。从而本文在 K_I 与 J 积分实测同时, 在已知材料弹性常数情况下, K_I 与 J 积分关系式得到了验证校核。

参 考 文 献

- [1] 杨维阳、张少琴、陈华才, 关于平面断裂中的 J 积分, 应用数学和力学, 11(6)(1990), 55—564.
- [2] 杨维阳、张少琴, 线弹性正交异性复合材料板 I、II 型裂纹尖端的 J 积分, 应用数学和力学, 11(7)(1990), 643—650.
- [3] Wang, S. S., J. F. Yau and H. T. Corten, A mixed-mode crack analysis of rectilinear anisotropic solids using conservation laws of elasticity. *Inter Jour of Fracture*, 16(3)(1980), 241—259.
- [4] 罗至善、袁福湘、张桂琴, 贴片云纹干涉法, 力学学报, 22(1)(1990), 120.
- [5] 中国航空研究院, 《应力强度因子手册》, 科学出版社(1981), 188.
- [6] Mojtahed, M. and L. W. Zachary, Use of photoelasticity to determine orthotropic K_I stress-intensity factor, *Exp. Mech.*, 27(2), June(1987), 184—189.

A Study of J-Integral of the Orthotropic Composite Material

Wang Ai-qin Feng Bao-lian Yang Wei-yang

(Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan)

Abstract

The relation between J-integral near model I crack tip in the orthotropic plate and displacement derivative is derived in this paper. Meanwhile, the relation between stress intensity factor K_I and displacement is also given in this paper. With sticking film moire interferometry method, the three-point bending beam is tested, thus the values of J-integral and K_I can be obtained from the displacement field, and then the truth of the relation formula between J-integral and K_I in the orthotropic composite materials is experimentally verified.

Key words orthotropic composite material, J-integral, sticking film moire interferometry