应用数学和力学，第15卷 第1期（1994年1月）
APPlied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

三阶线性变系数差分方程的Mikusiński算符解法(Ⅲ)*

周 之 虎

（安徽建筑工业学院，1993年6月20日收到）

摘 要

本文在[3]，[4]工作的基础上，利用变数算符的思想以及 Mikusiński 算符域中移动算符和变系数移动算符级数的有关结果，解决了一般的三阶线性变系数差分方程的求解问题，并且给出了一些特殊的三阶线性变系数差分方程的更好的解式；此外，还试图为实现更高阶线性变系数差分方程的求解提供思想方法．

关键词 Mikusiński算符 移动算符 差分方程

一、引 言

众所周知，在 Mikusiński 算符域中，利用移动算符以及常系数的移动算符级数的有关结果，可以求解某些线性常系数差分方程．在文[3]中利用解析函数与某类移动算符级数一一对应的思想方法和解析函数的性质，成功地解决了一般的常系数差分方程的求解问题，且解法简洁易行；而在文[4]中利用变数算符[2]的思想以及移动算符和变系数移动算符级数的有关结果，解决了二阶线性变系数差分方程的求解问题．本文正是在以上工作的基础上，探索了一般的三阶线性变系数差分方程的求解问题，我们相信这势将对微分方程、力学特别是计算力学、运筹学等学科产生一些影响．

二、基 本 理 论

设$\mathscr{C}$为定义在全直线$-\infty<t<t\infty$上且在某点左方恒为零的复值连续函数$f=\{f(t)\}$全体，在$\mathscr{C}$中引入通常的加法和数乘运算以及卷积

$$f\cdot g=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}\qquad f,g\in\mathscr{C}$$

作为乘法运算，由 Titchmarsh 定理[1]知$\mathscr{C}$为一无零因子的可交换环，从而可扩充为商域，即 Mikusinski 算符域Q；对每个$x\in Q$，都有“分式”

* 林宗池推荐．安徽省科学基金资助课题．
1991年1月4日第一次收到．

$$x=\frac{a}{b} \qquad (a,\ b\in\mathscr{C},\ b\neq 0),$$

特别地，在自然嵌入意义下，函数类$\mathscr{C}$以及直线$-\infty<t<+\infty$上定义的且在某点左方几乎处处为零的局部可积函数$f=\{f(t)\}$全体$\mathscr{L}$均含于Q．其外，Q中还含有积分算符$l=\{g(t)\}$，微分算符$s=\frac{1}{l}$，移动算符$h^{\lambda}=s\{H_{\lambda}(t)\}$ $(\lambda>0)$等等，其中

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t\geqslant 0)\end{cases},\quad H_{\lambda}(t)=\begin{cases}0 & (t<\lambda)\\ 1 & (t\geqslant\lambda)\end{cases}$$

且对每个$\lambda>0$，$f=\{f(t)\}\in\mathscr{C}$，都有

（1） $h^{\lambda}\{f(t)\}=\{f(t-\lambda)\}$，（2） $h^{-\lambda}\{f(t)\}=\{f(t+\lambda)\}$.

现对每个复数α，数算符[1] $[\alpha]$被定义为

$$[\alpha]=\frac{\{\alpha\}}{l},$$

这里 $\{\alpha\}$为当$t<0$时取零，当$t\geqslant 0$时取数α的函数．

由于数算符$[\alpha]$和数α在 Mikusiński 算符演算中所起的作用一样，因此我们将不加区别地对待它们，且记$[\alpha]=\alpha$．

对每个函数$\omega=\{\omega(t)\}\in\mathscr{C}$，$\Lambda(\omega)\geqslant 0$以及每个$t\geqslant 0$，我们定义变数算符[2]为

$$\omega(t)=\frac{\{\omega(t)\}}{l}$$

其中 $\Lambda(\omega)=\sup\{\sigma：\omega(t)=0,\ t<\sigma\}(\omega\in\mathscr{C})$，这样，每个函数$\omega=\{\omega(t)\}\in\mathscr{C}$，$\Lambda(\omega)\geqslant 0$都将对应一簇数算符，即一个变数算符$\frac{\{\omega(t)\}}{l}$，且容易证明这种对应还是一对一的，（只需注意到：$v(t)\{\omega(t)\}=\omega(t)\{v(t)\}\overset{\text{def}}{=\!=}\{v(t)\omega(t)\}$(见后面)，$\omega(t)+v(t)\leftrightarrow\{\omega(t)+v(t)\}$，$\omega(t)v(t)\leftrightarrow\frac{\{\omega(t)v(t)\}}{l}$即可）．

为了不致引起混淆，我们特记

$$\mathscr{C}_l=\left\{\omega(t)=\frac{\{\omega(t)\}}{l}；\ \omega=\{\omega(t)\}\in\mathscr{C},\Lambda(\omega)\geqslant 0\right\}.$$

并且对每个$\alpha=\{\alpha(t)\}\in\mathscr{C}_l$，$x=\{x(t)\}\in\mathscr{C}$，定义

$$\alpha(t)\{x(t)\}=\{\alpha(t)x(t)\}.$$

另一方面，由于在Q中引入了变数算符的概念后，使得Q中原来的乘法可交换性在某些情形下已不成立，这一点在以下的算符演算过程中应特别小心．例如与本文有关的$\alpha(t)h^{\lambda}$和$h^{\lambda}\alpha(t)$一般不相等$(\alpha=\{\alpha(t)\}\in\mathscr{C}_l)$，这是因为：对每个$x=\{x(t)\}\in\mathscr{C}$，有

$$(\alpha(t)h^{\lambda})x=\alpha(t)h^{\lambda}\{x(t)\},$$

$$\begin{aligned}(h^{\lambda}\alpha(t))x&=h^{\lambda}\alpha(t)\{x(t)\}=h^{\lambda}\{\alpha(t)x(t)\}\\&=\{\alpha(t-\lambda)x(t-\lambda)\}=\alpha(t-\lambda)h^{\lambda}\{x(t)\},\end{aligned}$$

因此，对每个$\alpha=\{\alpha(t)\}\in\mathscr{C}_l$，我们定义

$$(\alpha(t)h^{\lambda})^2=(\alpha(t)h^{\lambda})(\alpha(t)h^{\lambda})=\alpha(t)\alpha(t-\lambda)h^{2\lambda}$$

这是因为对每个$x=\{x(t)\}\in\mathscr{C}$，有

$$\begin{aligned}(\alpha(t)h^{\lambda})(\alpha(t)h^{\lambda})x&=(\alpha(t)h^{\lambda})(\alpha(t)\{x(t-\lambda)\})\\&=\alpha(t)\{\alpha(t-\lambda)x(t-2\lambda)\}=\alpha(t)\alpha(t-\lambda)h^{2\lambda}x;\end{aligned}$$

一般地，我们定义

$$(a(t)h^{\lambda})^{n}=a(t)a(t-\lambda)\cdots a[t-(n-1)\lambda]h^{n\lambda}\qquad(n=2,3,\cdots),$$

为了运算方便，记

$$a(t)a(t-\lambda)\cdots a[t-(n-1)\lambda]=a(t)\,|_{(n\lambda)!}$$

又由于对每个复数β有公式[1]：

$$\frac{1}{1-\beta h^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta^{n}h^{n\lambda},\quad\frac{1}{(1-\beta h^{\lambda})^{1+k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\beta^{n}h^{n\lambda}$$

其中 $k=1,2,3,\cdots$, $\binom{n+k}{k}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k!}$, $\binom{n}{0}=1$.

鉴于此，我们推广并容易验证对每个$\beta=\{\beta(t)\}\in\mathscr{C}_{l}$,以及对每个$t\geqslant0$成立公式

$$\frac{1}{1-\beta(t)h^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}\beta(t)\Big|_{(n\lambda)!}h^{n\lambda},$$

$\left(\text{这里}\frac{1}{1-\beta(t)h^{\lambda}}\text{表示为算符}1-\beta(t)h^{\lambda}\text{的左逆，下同}\right)$

$$\frac{1}{(1-\beta(t)h^{\lambda})^{1+k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\cdot\beta(t)\Big|_{(n\lambda)!}h^{n\lambda}$$

$(k=1,2,3,\cdots)$，另外，我们下面考虑的算符

$$a_0(t)h^{3\lambda}+a_1(t)h^{2\lambda}+a_2(t)h^{\lambda}+1$$

的逆 $\frac{1}{a_0(t)h^{3\lambda}+a_1(t)h^{2\lambda}+a_2(t)h^{\lambda}+1}$均表示为左逆，这里$a_i=\{a_i(t)\}\in\mathscr{C}_{l}$ $(i=0,1,2)$.

三、三阶线性变系数差分方程的解

定义 对每个自然数n，我们称差分方程

$$a_0(t)x(t)+a_1(t)x(t+\lambda)+\cdots+a_{n-1}(t)x[t+(n-1)\lambda]+x(t+n\lambda)=f(t)$$

为n阶线性变系数差分方程；其中$a_i=\{a_i(t)\}\in\mathscr{C}_{l}$，$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，$a_0(t)\neq0$，$f=\{f(t)\}\in\mathscr{C}$.

设三阶线性变系数差分方程为

$$a_0(t)x(t)+a_1(t)x(t+\lambda)+a_2(t)x(t+2\lambda)+x(t+3\lambda)=f(t)\tag{3.1}$$

将(3.1)转化为算符方程

$$a_0(t)x+a_1(t)h^{-\lambda}x+a_2(t)h^{-2\lambda}x+h^{-3\lambda}x=f$$

则有

$$x=\frac{1}{a_0(t)+a_1(t)h^{-\lambda}+a_2(t)h^{-2\lambda}+h^{-3\lambda}}\cdot f$$

$$=\frac{1}{a_0(t)h^{3\lambda}+a_1(t)h^{2\lambda}+a_2(t)h^{\lambda}+1}\cdot h^{3\lambda}f\tag{3.2}$$

(Ⅰ) 若有$a_0(t)h^{3\lambda}+a_1(t)h^{2\lambda}+a_2(t)h^{\lambda}+1=(1+p(t)h^{\lambda})^{3}$

即 $$a_0(t)h^{3\lambda}+a_1(t)h^{2\lambda}+a_2(t)h^{\lambda}+1=p(t)p(t-\lambda)p(t-2\lambda)h^{3\lambda}$$

$$+3p(t)p(t-\lambda)h^{2\lambda}+3p(t)h^{\lambda}+1$$

亦即函数$\alpha_0(t)$，$\alpha_1(t)$，$\alpha_2(t)$满足

$$\begin{cases} p(t)=\frac{1}{3}\alpha_2(t) \\ \alpha_0(t)=\frac{1}{9}\alpha_1(t)\alpha_2(t-2\lambda) \\ \alpha_1(t)=\frac{1}{3}\alpha_2(t)\alpha_2(t-\lambda) \end{cases}$$

这说明方程(3.1)中含有一个任意变系数$\alpha_2(t)$的情形，从而(3.2)为

$$x=\frac{1}{(1+p(t)h^{\lambda})^3}h^{3\lambda}f=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\binom{n+2}{2}\cdot\alpha_2(t)\Big|_{(n\lambda)!}h^{(n+3)\lambda}\cdot f,$$

即

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\binom{n+2}{2}\cdot\alpha_2(t)\Big|_{(n\lambda)!}f[t-(n+3)\lambda] \tag{3.3}$$

注 1 容易证明级数(3.3)具有如下性质：

(PⅠ) 级数(3.3)在每个有限区间上一致收敛，

(PⅡ) 对每个实数t，级数(3.3)为有限和.

(Ⅱ) 考虑方程

$$\alpha_0(t)x(t)+\alpha_0(t)x(t+\lambda)+x(t+2\lambda)+x(t+3\lambda)=f(t) \tag{3.4}$$

其中 $\alpha_0=\{\alpha_0(t)\}\in\mathscr{C}_l$，$\alpha_0(t)\neq-1$；

将(3.4)转化为算符方程

$$\alpha_0(t)x+\alpha_0(t)h^{-\lambda}x+h^{-2\lambda}x+h^{-3\lambda}x=f.$$

则有

$$\begin{aligned} x&=\frac{1}{\alpha_0(t)h^{3\lambda}+\alpha_0(t)h^{2\lambda}+h^{\lambda}+1}\cdot h^{3\lambda}\cdot f \\ &=\frac{1}{(\alpha_0(t)h^{2\lambda}+1)(h^{\lambda}+1)}\cdot h^{3\lambda}\cdot f \\ &=\frac{1}{1+\alpha_0(t)}\left[(\alpha_0(t)-\alpha_0(t)h^{\lambda})\frac{1}{1+\alpha_0(t)h^{2\lambda}}+\frac{1}{1+h^{\lambda}}\right]h^{3\lambda}\cdot f \\ &=\frac{\alpha_0(t)}{1+\alpha_0(t)}(1-h^{\lambda})\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\alpha_0(t)\Big|_{(n\lambda)!}h^{(2n+3)\lambda}\cdot f \\ &\quad+\frac{1}{1+\alpha_0(t)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n h^{(n+3)\lambda}\cdot f \end{aligned} \tag{3.5}$$

即有

$$x(t)=\frac{\alpha_0(t)}{1+\alpha_0(t)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\alpha_0(t)\Big|_{(n\lambda)!}f[t-(2n+3)\lambda]$$

$$+\frac{a_0(t)}{1+a_0(t)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_0(t-\lambda)\Big|_{(n\lambda)!}f[t-2(n+2)\lambda]$$

$$+\frac{1}{1+a_0(t)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}f[t-(n+3)\lambda] \tag{3.6}$$

注2 级数(3.6)具有性质(PⅠ)，(PⅡ)。

（Ⅱ） 考虑方程

$$a_2(t)x(t)+x(t+\lambda)+a_2(t)x(t+2\lambda)+x(t+3\lambda)=f(t) \tag{3.7}$$

将(3.7)转化为算符方程

$$a_2(t)x+h^{-\lambda}x+a_2(t)h^{-2\lambda}x+h^{-3\lambda}x=f,$$

则有

$$x=\frac{1}{a_2(t)+h^{-\lambda}+a_2(t)h^{-2\lambda}+h^{-3\lambda}}\cdot f$$

$$=\frac{1}{a_2(t)h^{3\lambda}+h^{2\lambda}+a_2(t)h^{\lambda}+1}\cdot h^{3\lambda}\cdot f$$

$$=\frac{1}{(a_2(t)h^{\lambda}+1)(h^{2\lambda}+1)}\cdot h^{3\lambda}\cdot f \tag{3.8}$$

这里 $$\frac{1}{(a_2(t)h^{\lambda}+1)(h^{2\lambda}+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)h^{n\lambda}.$$

其中 函数$A_n(t)$满足如下递推公式（不必求差分方程）

$$A_0(t)=1$$

$$A_1(t)+a_2(t)A_0(t-\lambda)=0$$

$$A_2(t)+a_2(t)A_1(t-\lambda)+A_0(t-2\lambda)=0$$

($A_{n+3}(t)+a_2(t)A_{n+2}(t-\lambda)+A_{n+1}(t-2\lambda)+a_2(t)A_n(t-3\lambda)=0$

$n=0,1,2,\cdots$)。

亦即 $A_0(t)=1$，$A_1(t)=(-1)a_2(t)$

$$A_2(t)=(-1)^2a_2(t)a_2(t-\lambda)-1$$

且当$n>1$为奇数时有：

$$A_n(t)=(-1)^n\cdot a_2(t)\,|_{(n\lambda)!}+(-1)^{n-1}a_2(t-2\lambda)a_2(t-3\lambda)\cdots a_2[t-(n-1)\lambda]$$
$$+(-1)^{n-2}a_2(t-4\lambda)\cdots a_2[t-(n-1)\lambda]+\cdots+(-1)^1a_2[t-(n-1)\lambda],$$

当$n>1$为偶数时有：

$$A_n(t)=(-1)^n\cdot a_2(t)\,|_{(n\lambda)!}+(-1)^{n-1}a_2(t-2\lambda)a_2(t-3\lambda)\cdots a_2[t-(n-1)\lambda]$$
$$+(-1)^{n-2}a_2(t-4\lambda)\cdots a_2[t-(n-1)\lambda]+\cdots$$
$$+(-1)^{\frac{n}{2}+1}a_2[t-(n-2)\lambda]a_2[t-(n-1)\lambda]+(-1)^{\frac{n}{2}},$$

故有

$$x=\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)h^{n\lambda}\right)h^{3\lambda}f=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)h^{(n+3)\lambda}\cdot f,$$

即为
$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(t)f[t-(n+3)\lambda]. \tag{3.9}$$

注 3 级数(3.9)亦具有性质(PⅠ)，(PⅡ)。

(Ⅳ)若三阶线性变系数差分方程(3.1)的算符解(3.2)具有形式，

$$x=\frac{1}{\alpha_0(t)h^{3\lambda}+\alpha_1(t)h^{2\lambda}+\alpha_2(t)h^{\lambda}+1}\cdot h^{3\lambda}f$$
$$=\frac{1}{(1+\beta(t)h^{\lambda})^3+r(t)h^{2\lambda}}\cdot h^{3\lambda}f \tag{3.10}$$

即
$$\alpha_0(t)h^{3\lambda}+\alpha_1(t)h^{2\lambda}+\alpha_2(t)h^{\lambda}+1=(1+\beta(t)h^{\lambda})^3+r(t)h^{2\lambda},$$

则有

$$\beta(t)=\frac{1}{3}\alpha_2(t),\quad r(t)=\alpha_1(t)-\frac{1}{3}\alpha_2(t)\alpha_2(t-\lambda),$$

$$\alpha_0(t)=\frac{1}{27}\alpha_2(t)\alpha_2(t-\lambda)\alpha_2(t-2\lambda);$$

这说明方程(3.1)中含有二个任意变系数$\alpha_1(t)$，$\alpha_2(t)$的情形，从而有

$$x=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)h^{n\lambda}\right)h^{3\lambda}\cdot f=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)h^{(n+3)\lambda}\cdot f \tag{3.11}$$

其中函数$B_n(t)$由如下递推公式给出（不必求差分方程）：

$$B_0(t)=1,\ B_1(t)=-3\beta(t)$$
$$B_2(t)=[(-3)^2+(-3)^1]\beta(t)\Big|_{(2\lambda)!}-r(t)$$
$$B_{n+3}(t)=-3\cdot\beta(t)\Big|_{(\lambda)!}B_{n+2}(t-\lambda)-[3\cdot\beta(t)\Big|_{(2\lambda)!}+r(t)]B_{n+1}(t-2\lambda)$$
$$-\beta(t)\Big|_{(3\lambda)!}B_n(t-3\lambda)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

故有
$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)f[t-(n+3)\lambda] \tag{3.12}$$

注 4 级数(3.12)亦具有性质(PⅠ)，(PⅡ)。

(Ⅴ)对于一般的三阶线性变系数差分方程(3.1)，其算符解(3.2)为

$$x=\frac{1}{\alpha_0(t)h^{3\lambda}+\alpha_1(t)h^{2\lambda}+\alpha_2(t)h^{\lambda}+1}\cdot h^{3\lambda}\cdot f$$
$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)h^{n\lambda}\right)\cdot h^{3\lambda}\cdot f=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)h^{(n+3)\lambda}\cdot f \tag{3.13}$$

其中函数$C_n(t)$由如下递推公式给出：

$$C_0(t)=1,\ C_1(t)=-\alpha_2(t),\ C_2(t)=(-1)^2\alpha_2(t)\Big|_{(2\lambda)!}-\alpha_1(t)$$
$$C_{n+3}(t)=-\alpha_2(t)C_{n+2}(t-\lambda)-\alpha_1(t)C_{n+1}(t-2\lambda)$$
$$-\alpha_0(t)C_n(t)C_n(t-3\lambda)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

故有：
$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)f[t-(n+3)\lambda]. \tag{3.14}$$

注5：级数(3.14)具有性质(PⅠ)，(PⅡ)。

四、结　　语

我们已经看到三阶线性变系数差分方程(3.1)的解已较复杂了，但对在某一点求解差分方程还是行之有效的，因为上述解的级数形式实为有限和；其外，就一般三阶线性变系数差分方程(3.1)的求解问题已较困难和复杂来说，其本质所在为 Q 中引入变数算符后，移动算符与变数算符的乘积不可交换；因此我们可以想象到求解四阶以上乃至一般的 n 阶线性变系数差分方程的问题，将是非常困难的。另一方面，类似于[6]的思想方法，我们亦可将差分方程(3.1)转化为相应的算符方程组进行求解且结果相同，即(3.1)转化为方程组

$$\left.\begin{aligned}&[h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda)]x-y=0\\&[P(t)h^{-2\lambda}+Q(t)h^{-\lambda}+R(t)]x+[h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda)]^2y=f\end{aligned}\right\}$$

其中
$$P(t)=\alpha_2(t-\lambda)+\alpha_2(t-2\lambda),$$
$$Q(t)=\alpha_2^2(t-2\lambda)+\alpha_2^2(t-\lambda)+\alpha_2(t-\lambda)\alpha_2(t-2\lambda)-\alpha_1(t),$$
$$R(t)=\alpha_2^3(t-2\lambda)-\alpha_0(t).$$

亦即
$$\begin{pmatrix}h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda) & -1\\ P(t)h^{-2\lambda}+Q(t)h^{-\lambda}+R(t) & [h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda)]^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$$

求这个算符方程的系数矩阵的左逆矩阵，设为
$$\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

其中
$$B_{11}=\frac{1}{\Delta}[h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda)^2]\qquad B_{12}=\frac{1}{\Delta}$$
$$B_{21}=\frac{1}{\Delta}[P(t)h^{-2\lambda}+Q(t)h^{-\lambda}+R(t)],$$
$$B_{22}=\frac{1}{\Delta}[h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda)]$$
$$\Delta=[h^{-\lambda}+\alpha_2(t-2\lambda)]^2-P(t)h^{-2\lambda}-Q(t)h^{-\lambda}-R(t)$$

从而有
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}$$

即有
$$x=B_{12}f=\frac{1}{\Delta}\cdot f=\frac{1}{\alpha_0(t)h^{3\lambda}+\alpha_1(t)h^{2\lambda}+\alpha_2(t)h^{\lambda}+1}\cdot h^{3\lambda}f.$$

鉴于这种思想（值得指出的是：类似于［6］的公式推广是困难的，因此，一般高阶差分方程的求解要比［6］的高阶微分方程求解更为困难）．我们能否进一步完善这种思想方法藉以实现把高阶的差分方程求解问题转化为低阶的差分方程求解问题；此外，我们能否把三阶线性变系数差分方程的级数解式进一步简化．使得更适合于应用，这一切都有待于不断探索．

参 考 文 献

[1] Mikusiński, J., *Operational Calculus*, Pergamon Press, New York (1959).

[2] Qiu Lian-rong, A direct method of operational calculus (I), *Acta Mathematica Scientia*, 2(4)(1982).

[3] 周之虎，差分方程的 Mikusiński 算符解法(I)（待发表）．

[4] Zhou Zhi-hu, Mikusiński's Operators solution of difference equation(Ⅱ)——The solution of the Second—order linear difference equation with variable coefficients, (to appear)

[5] 周之虎，关于"算符演算"中的移动算符级数的一点注记，数学的实践与认识，(4) (1990), 90—92.

[6] 邱廉荣，直接算符演算法的新进展——关于n阶变系数线性常微分方程的解法，西北工业大学学报，5 (4)(1987), 417—426.

Mikusiński's Operators Solution of Three-Order Linear Difference Equation with Variable Coefficients

Zhou Zhi-hu

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

Abstract

This paper proceeds with papers[3][4].We make use of the idea of the variable number operators and some concepts and conclusions of the shifting operators series with variable coefficients in the operational field of Mikusinski, it is devoted to the solution of the general three-order linear difference equation with variable coefficients, and it is also devoted to the better solution formula for some special three-order linear difference equations with variable coefficients; in addition, we try to provide the idea and method for realizing solution of the more than three-order linear difference equations with variable coefficients.

Key words Mikusinski operator, shift operator, difference equation