应用数学和力学，第15卷 第1期（1994年1月）
APPlied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

具有n阶转向点方程的渐近解的完全表达式*

张 居 铃

（四川轻化工学院，1992年6月1日收到）

摘 要

本文研究二阶线性常微分方程，使用广义Airy函数得到了方程在转向点附近形式一致有效渐近解的完全表达式。

关键词 一致有效的 渐近解 转向点

一、前 言

在文[1]中我们已经介绍了转向点的概念，一般来说，二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}Q_i(x)\lambda^{-i}\right)y=0$$

$Q_0(x)$的零点称为此方程的转向点，其零点的阶数称为转向点的阶数。

本文[1]中我们仅仅得到渐近展开的第一项，关于高阶近似，难度要更大得多。

对于单一转向点的情况，其一阶转向点的高阶近似，很多的人从事过研究，如Langer (1949)，Cherry(1949，1960)，Olver(1954)[2]。

其二阶转向点的高阶近似也有不少的人从事研究，如Mckelvey(1955)[3]，Moriguchi (1959)[4]，Lynn和Keller(1970)[5]。

我们研究二阶常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[\lambda^2q_1(x)+\lambda q_2(x,\ \lambda)]y=0 \tag{1.1}$$

其中 $q_1(x)=(x-\mu)^nf(x)\ (f(\mu)\neq0)$，$n$为正整数，$\mu$为一实数，$\lambda$为大实参数，$f(x)$，$q_2(x,\ \lambda)$为实变量$x$的实函数，又假设$f(x)$在$x=\mu$的一邻域$|x-\mu|<\delta$内解析，$q_2(x,\ \lambda)$对$x$为解析的

$$q_2(x,\ \lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}q_i(x)\lambda^{-i}\qquad(\text{此时}q_0(x)\neq0) \tag{1.2}$$

* 丁协平推荐。

其中 $q_i(x)$均在邻域$|x-\mu|<\delta$内解析。
或者

$$q_2(x, \lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} q_i(x)\lambda^{-2i} \tag{1.3}$$

我们应用广义 Airy 函数，得到了方程在转向点附近形式一致有效渐近解的完全表达式，以这个形式解为其渐近解的真正解的存在性问题将在另外的文章中讨论。

二、广义Airy函数

在文[1]中我们介绍了广义 Airy 函数概念，这些都是整函数。

2.1 若n为奇数

定义第一类 Airy 函数如下

$$\mathrm{Ai}_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\cos\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{z}\left[I_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.-I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\cos\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{-z}\left[J_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.+J_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z<0)\end{cases}$$

定义第二类Airy函数如下：

$$\mathrm{Bi}_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\sin\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{z}\left[I_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.+I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\sin\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{-z}\left[J_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.-J_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z<0)\end{cases}$$

其中 J，I均为 Bessel 函数。

2.2 若n为偶数

定义第一类 Airy 函数如下：

$$
\mathrm{Ai}_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\cos\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{z}\left[J_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.-J_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\cos\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{-z}\left[J_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.+J_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z<0)\end{cases}
$$

定义第二类 Airy 函数如下：

$$
\mathrm{Bi}_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\sin\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{z}\left[J_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.+I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\sin\dfrac{\tau}{2(n+2)}}\sqrt{-z}\left[J_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.-J_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z<0)\end{cases}
$$

$\mathrm{Ai}_n(z)$，$\mathrm{Bi}_n(z)$均满足方程

$$
\frac{d^2v}{dz^2}+(-1)^n z^n v=0 \tag{2.1}
$$

2.3 若 n 为正偶数

定义第一类修正 Airy 函数如下：

$$
\mathrm{IAi}_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\cos\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{z}\left[I_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.-I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\cos\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{-z}\left[I_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+z}{2}}\right)\right.\\ \qquad\left.+I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z<0)\end{cases}
$$

定义第二类修正 Airy 函数如下：

$$\mathrm{IBi}_n(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\sin\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{z}\left[\left(I_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\right.\\ \left.\quad+I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}z^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z\geqslant 0)\\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}\sin\dfrac{\pi}{2(n+2)}}\sqrt{-z}\left[I_{-\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right.\\ \left.\quad-I_{\frac{1}{n+2}}\left(\dfrac{2}{n+2}(-z)^{\frac{n+2}{2}}\right)\right] \qquad (z<0)\end{cases}$$

$\mathrm{IAi}_n(z)$，$\mathrm{IBi}_n(z)$均满足方程

$$\frac{d^2v}{dz^2}-z^nv=0 \tag{2.2}$$

三、Langer变换

对 (1.1) 进行 Langer 变换，即令 $z=\phi(x)$ （设 $\phi(x)$ 为单调增函数且 $\phi'(x)>0$，$\phi(\mu)=0$）

$$v=\psi(x)y(x) \qquad (\psi(x)=\sqrt{\phi'(x)})$$

则(1.1)变成

$$\frac{d^2v}{zd}+\left[\lambda^2\frac{q_1}{\phi'^2}+\frac{\lambda q_2(x,\lambda)}{\phi'^2}+\frac{3}{4}\frac{\phi''^2}{\phi'^4}-\frac{1}{2}\frac{\phi'''}{\phi'^3}\right]v=0$$

当$q_1(x)\geqslant 0$时，令

$$\frac{q_1}{\phi'^2}=|\phi|^n \text{即} \sqrt{q_1}=|\phi|^{\frac{n}{2}}\phi'$$

当$q_1(x)\leqslant 0$时，令

$$\frac{-q_1}{\phi'^2}=|\phi|^n \text{即} \sqrt{-q_1}=|\phi|^{\frac{n}{2}}\phi'$$

故$x\geqslant\mu$时，（使$\phi\geqslant 0$）

当$q_1(x)\geqslant 0$，则

$$\frac{2}{n+2}\phi^{\frac{n+2}{2}}=\int_\mu^x\sqrt{q_1(\tau)}\,d\tau,$$

$$\phi=\left[\frac{n+2}{2}\int_\mu^x\sqrt{q_1(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$q_1(x)\leqslant 0$，则

$$\frac{2}{n+2}\phi^{\frac{n+2}{2}}=\int_\mu^x\sqrt{-q_1(\tau)}\,d\tau$$

$$\phi=\left[\frac{n+2}{2}\int_\mu^x\sqrt{-q_1(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

而$x\leqslant\mu$时，（使$\phi\leqslant 0$）

若$q_1(x)\geqslant 0$，则

$$\frac{2}{n+2}(-\phi)^{\frac{n+2}{2}}=\int_x^{\mu}\sqrt{q_1(\tau)}\,d\tau,$$

$$\phi=-\left[\frac{n+2}{2}\int_x^{\mu}\sqrt{q_1(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$q_1(x)\leqslant 0$，则

$$\frac{2}{n+2}(-\phi)^{\frac{u+2}{2}}=\int_x^{\mu}\sqrt{-q_1(\tau)}\,d\tau,$$

$$\phi=-\left[\frac{n+2}{2}\int_x^{\mu}\sqrt{-q_1(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

总之$z=\phi(x)$在$x=\mu$的邻域内为一解析函数，且$\phi'>0$.

因而令

$$p(z,\lambda)=\frac{q_2}{\phi'^2}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{4}\frac{\phi''^2}{\phi'^4}-\frac{1}{2}\frac{\phi'''}{\phi'^3}\right)$$则$p(z,\lambda)$对z为解析的．因为

(1) 若$q_1(x)=(x-\mu)^n f(x)$，解析函数$f(x)<0$，n为偶数．

当$x\geqslant\mu$时，$q_1(x)\leqslant 0$，则

$$\phi=\left[\frac{n+2}{2}\int_{\mu}^{x}\sqrt{-(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

由于

$$\int_{\mu}^{x}\sqrt{-(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau=\sqrt{-f(\bar{x})}\,\frac{2}{n+2}(x-\mu)^{\frac{n+2}{2}}\qquad(\mu\leqslant\bar{x}\leqslant x).$$

又因

$$\int_{\mu}^{x}\sqrt{-(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau=\int_{\mu}^{x}(\tau-\mu)^{\frac{n}{2}}\Big[\sqrt{-f(\mu)}$$

$$+\frac{d}{d\tau}\sqrt{-f(\tau)}\Big|_{\tau=\mu}(\tau-\mu)+\cdots\Big]d\tau$$

$$=\sqrt{-f(\mu)}\,\frac{2}{n+2}(x-\mu)^{\frac{n+2}{2}}+\frac{2}{n+4}\,\frac{d}{d\tau}\sqrt{-f(\tau)}\Big|_{\tau=\mu}(x-\mu)^{\frac{n+2}{2}}+\cdots$$

故 $$\sqrt{-f(\bar{x})}=\sqrt{-f(\mu)}+\frac{n+2}{n+4}\,\frac{d}{d\tau}\sqrt{-f(\tau)}\Big|_{\tau=\mu}(x-\mu)+\cdots$$

则$\phi=(-f(\bar{x}))^{\frac{1}{n+2}}(x-\mu)=(-f(\mu))^{\frac{1}{n+2}}(x-\mu)+O((x-\mu)^2)$.

同理当$x\leqslant\mu$时，$q_1(x)\leqslant 0$

$$\phi=-\left[\frac{n+2}{2}\int_x^{\mu}\sqrt{-(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}=-\left[\sqrt{-f(\bar{x})}\,(\mu-x)^{\frac{n+2}{2}}\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$$=(-f(\mu))^{\frac{1}{n+2}}(x-\mu)+O((x-\mu)^2)$$

故ϕ解析，且$\phi'(\mu)=(-f(\mu))^{\frac{1}{n+2}}>0$

因而得$\dfrac{d^2v}{dz^2}+[-\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\lambda)]v=0$

同理若$q_1(x)=(x-\mu)^n f(x)$，解析函数$f(x)<0$，n为奇数．

当$x\geqslant\mu$时$q_1(x)\leqslant 0$，则

$$\phi=\left[\frac{n+2}{2}\int_{\mu}^{x}\sqrt{-(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+[-\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0$$

当$x\leqslant\mu$时$q_1(x)\geqslant 0$，则

$$\phi=-\left[\frac{n+2}{2}\int_{x}^{\mu}\sqrt{(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$$\frac{d^2v}{{}^2zd}+[\lambda^2(-z)^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0$$

总之$\frac{d^2v}{dz^2}+[-\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0$

（2） 同理若$q_1(x)=(x-\mu)^n f(x)$，$f(x)>0$，n为偶数

$x\geqslant\mu$时，$\phi=\left[\frac{n+2}{2}\int_{\mu}^{x}\sqrt{(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$

$x\leqslant\mu$时，$\phi=-\left[\frac{n+2}{2}\int_{x}^{\mu}\sqrt{(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$

得 $\frac{d^2v}{dz^2}+[\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0$

又若$q_1(x)=(x-\mu)^n f(x)$，$f(x)>0$，n为奇数

当$x\geqslant\mu$时$q_1(x)\geqslant 0$，则

$$\phi=\left[\frac{n+2}{2}\int_{\mu}^{x}\sqrt{(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+[\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0$$

当$x\leqslant\mu$时，$q_1(x)\leqslant 0$，则

$$\phi=-\left[\frac{n+2}{2}\int_{x}^{\mu}\sqrt{-(\tau-\mu)^n f(\tau)}\,d\tau\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}+[-\lambda^2(-z)^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0$$

总之

$$\frac{d^2v}{dz^2}+[\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0.$$

四、一致有效渐近解

4.1 $$\frac{d^2v}{dz^2}+[-\lambda^2 z^n+\lambda p(z,\ \lambda)]v=0 \tag{4.1}$$

对应(1.2)若$p(z,\ \lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(z)\lambda^{-i}$，

$p_i(z)$均在$z=0$的某邻域解析($i=0$，1，2，3，…)

若 $p_0(z)$ 在 $z=0$ 的零点阶数 $m\geqslant\frac{n-1}{2}$

考虑(4.1)的比较方程 $\frac{d^2v}{dz^2}-\lambda^2z^nv=0$ 的二线性无关解：

若 n 为偶数，由(2.2)知

第一类解为 $\mathrm{IAi}_n(\lambda^{\frac{2}{n+2}}z)$

第二类解为 $\mathrm{IBi}_n(\lambda^{\frac{2}{n+2}}z)$

若 n 为奇数，由(2.1)知

第一类解为 $\mathrm{Ai}_n(\lambda^{\frac{2}{n+2}}z)$

第二类解为 $\mathrm{Bi}_n(\lambda^{\frac{2}{n+2}}z)$

令第一类解为 $\zeta_1(z,\lambda)$，第二类解为 $\zeta_2(z,\lambda)$，故

$$\zeta_i''=\lambda^2z^n\zeta_i \qquad (i=1,\ 2)$$

仿照Olver的方法[2]，假设(4.1)的渐近解为

$$v=A(z,\lambda)\zeta_i+B(z,\lambda)\zeta_i' \tag{4.2}$$

$$v'=A'\zeta_i+(A+B')\zeta_i'+B\zeta_i''=(A'+\lambda^2z^nB)\zeta_i+(A+B')\zeta_i'$$

$$\begin{aligned}v''&=(A''+\lambda^2nz^{n-1}B+\lambda^2z^nB')\zeta_i+(2A'+\lambda^2z^nB+B'')\zeta_i'+(A+B')\zeta_i''\\&=(A''+\lambda^2Az^n+\lambda^2nz^{n-1}B+2\lambda^2z^nB')\zeta_i+(2A'+\lambda^2z^nB+B'')\zeta_i'\end{aligned}$$

代入(4.1)得

$$(A''+\lambda pA+\lambda^2nz^{n-1}B+2\lambda^2z^nB')\zeta_i+(2A'+B''+\lambda pB)\zeta_i'=0$$

由 ζ_i，ζ_i' 的系数为0得

$$\left.\begin{aligned}&2A'+B''+\lambda pB=0\\&A''+\lambda pA+\lambda^2nz^{n-1}B+2\lambda^2z^nB'=0\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

这些方程为如下的形式展开所满足

$$A=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{-i}A_i(z),\quad B=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}B_i(z)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&2A_0'+p_0B_1=0\\&2z^nB_1'+nz^{n-1}B_1+p_0A_0=0\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&2A_i'+p_0B_{i+1}=-B_i''-\sum_{l=1}^{i}p_lB_{i+1-l}=\alpha_i \qquad (i\geqslant1)\\&2z^nB_{i+1}'+nz^{n-1}B_{i+1}+p_0A_0=-A_{i-1}''-\sum_{l=1}^{i}p_lA_{i-l}=B_i \qquad (i\geqslant1)\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

(4.4)的解是

$$A_0=\cosh\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{n/2}}d\tau$$

$$B_1=-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\sinh\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

显然其中积分总是存在的。

(4.5)的解是

$$A_i=a_i(z)\cosh\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau+b_i(z)\sinh\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

$$z^{\frac{n}{2}}B_{i+1}=-a_i(z)\sinh\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau-b_i(z)\cosh\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

$$a_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z[\alpha_i(\tau)A_0(\tau)-\beta_i(\tau)B_1(\tau)]d\tau$$

$$b_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z\left[\tau^{\frac{n}{2}}\alpha_i(\tau)B_1(\tau)-\frac{\beta_i(\tau)A_0(\tau)}{\tau^{\frac{n}{2}}}\right]d\tau$$

则(4.1)形式一致有效渐近解的一般的形式为

$$y=A(a\zeta_1+b\zeta_2)+B(a\zeta_1'+b\zeta_2')$$

其中a，b为二常数。

对应(1.3)，在$p(z,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}p_i(z)\lambda^{-2i}$的情况下，(4.3)为下列形式所满足

$$A=A_0+\sum_{i=1}^{\infty}A_i(z)\lambda^{-2i}\qquad(A_0=1)$$

$$B=\sum_{i=1}^{\infty}B_i(z)\lambda^{-2i}$$

把这个展开式代入(4.3)使λ的同次幂的系数相等，得到

$$2A_i'=-B_i''-\sum_{l=0}^{i-1}p_lB_{i-l}=\alpha_i$$

$$2z^nB_{i+1}'+nz^{n-1}B_{i+1}=-A_i''-\sum_{l=0}^{i}p_lA_{i-l}=\beta_i$$

则

$$A_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z\alpha_i(\tau)d\tau$$

$$z^{\frac{n}{2}}B_{i+1}=\frac{1}{2}\int_0^z\frac{\beta_i(\tau)}{\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

4.2 $$\frac{d^2v}{dz^2}+[\lambda^2z^n+\lambda p(z,\lambda)]v=0\tag{4.2)'$$

其中 $p(z,\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(z)\lambda^{-i}$，$p_i(z)$的假设与4.1的相应情况相同。

考虑其比较方程$\frac{d^2v}{dz^2}+\lambda^2z^nv=0$的二线性无关解

若n为偶数，由(2.1)知

$$\zeta_1=\mathrm{Ai}_n(\lambda^{\frac{2}{n+2}}z),\quad \zeta_2=\mathrm{Bi}_n(\lambda^{\frac{2}{n+2}}z)$$

n为奇数，由(2.1)知

$$\zeta_1=\mathrm{Ai}_n(-\lambda^{\frac{2}{n+2}}z),\quad \zeta_2=\mathrm{Bi}_n(-\lambda^{\frac{2}{n+2}}z).$$

此时$\zeta_i''=-\lambda^2z^n\zeta_i\qquad(i=1,\ 2)$

令$v=A(z,\ \lambda)\zeta_i+B(z,\ \lambda)\zeta_i'$则$v'=(A'-\lambda^2z^nB)\zeta_i+(A+B')\zeta_i'$

$$v''=(A''-A\lambda^2z^n-\lambda^2nz^{n-1}B-2\lambda^2z^nB')\zeta_i+(2A'-\lambda^2z^nB+B'')\zeta_i'$$

代入(4.2)′得

$$\begin{cases}2A'+B''+\lambda pB=0\\ A''+\lambda pA-\lambda^2nz^{n-1}B-2\lambda^2z^nB'=0\end{cases}\qquad(4.3)'$$

$$A=\sum_{i=0}^{\infty}A_i(z)\lambda^{-i},\quad B=\sum_{i=1}^{\infty}B_i(z)\lambda^{-i}$$

从而得到

$$\begin{cases}2A_0'+p_0B_1=0\\ 2z^nB_1'+nz^{n-1}B_1-p_0A_0=0\end{cases}\qquad(4.4)'$$

$$\begin{cases}2A_i'+p_0B_{i+1}=-B_i''-\sum_{l=1}^{i}p_lB_{i+1-l}=\alpha_i\qquad(i\geqslant1)\qquad(4.5)'\\ 2z^nB_{i+1}'+nz^{n-1}B_{i+1}-p_0A_i\\ \quad=A_{i-1}''+\sum_{l=1}^{i}p_lA_{i-l}=\beta_i\qquad(i\geqslant1)\qquad(4.5)'\end{cases}$$

(4.4)′的解是

$$A_0=\cos\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

$$B_1=\frac{1}{z^{\frac{n}{2}}}\sin\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

(4.5)′的解是

$$A_i(z)=a_i(z)\cos\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau+b_i(z)\sin\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{n}{2}}}d\tau$$

$$z^{\frac{n}{2}}B_{i+1}(z)=a_i(z)\sin\int_0^z\frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{1}{3}}}d\tau$$

$$-b_i(z)\cos\int_0^z \frac{p_0(\tau)}{2\tau^{\frac{1}{2}}}\,d\tau$$

$$a_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z [\alpha_i(\tau)A_0(\tau)+\beta_i(\tau)B_1(\tau)]\,d\tau$$

$$b_i(z)=\frac{1}{2}\int_0^z\left[\tau^{\frac{1}{2}}\alpha_i(\tau)B_1(\tau)-\frac{\beta_i(\tau)A_0(\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}}\right]d\tau$$

在 $p(z,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}p_i(z)\lambda^{-2i}$ 的情况下与4.1的相应情况有形式相同的结果。

参 考 文 献

[1] 张居铃，广义Airy函数与具有n个转向点的方程，应用数学和力学，12(9)(1991).

[2] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, (1973).

[3] Mckelvey, R.W., The solutions of the second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two, *Trans. Am. Math.Soc.*, 79(1955), 103—123.

[4] Moriguchi, H., An improvement of the WKB method in the presence of turning points and the asymptotic solutions of a class of Hill equation, *J. Phy. Soc. Japan*, 14(1959), 1711—1796.

[5] Lynn, R. Y. and J. B. Keller, Uniform asymptotic solutions of the second order linear differential equations with turning points, *Comm, Pure Appl Math.*, 23 (1970), 379—408.

A Complete Expression of the Asymptotic Solution of Differential Equation with a N-th Order Turning Point

Zhang Ju-ling

(Sichuan Institute of Light Industry and Chemical Technology, Zigong)

Abstract

A second order linear ordinary differential equation has been studied, and the complete expression of the formal uniformly valid asymptotic solutions to the equation near turning point is obtained by using extended airy function.

Key words uniformly valid, asymptotic solution, turning point