应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

具有转向点的三阶半线性奇摄动边值问题解的存在性*

蔡建平　　林宗池

（福建 漳州师范学院数学系）　　（福建师范大学数学系）

（1992年8月3日收到）

摘　要

本文应用微分不等式技术证明一类具有转向点的三阶半线性奇摄动边值问题解的存在性.

关键词　转向点　半线性　奇摄动

一、引　言

关于具有转向点的二阶常微分方程的边值问题已有很多作者研究过[1~5]，但具有转向点的三阶常微分方程的边值问题所见文章不多. 本文考察如下问题

$$\varepsilon y'''=a(x,\varepsilon)y''+f(x,y,y',\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$y'(-1)=A,\ y(1)=B,\ y'(1)=C \tag{1.2}$$

其中ε是正小参数，$x=0$是转向点，即$a(0,0)=0$.

退化方程及其边界条件为：

$$0=a(x,0)y''+f(x,y,y',0) \tag{1.3}$$

$$y'(-1)=A,\ y(1)=B \tag{1.4}$$

利用微分不等式技术，我们证明了问题(1.1)、(1.2)解的存在性，并给出解的估计. 文中恒假设：

(H₁)　$a(x,\varepsilon)$在$[-1,1]\times[0,\varepsilon_0]$上，$f(x,y,y',\varepsilon)$在$[-1,1]\times R^2\times[0,\varepsilon_0]$上充分光滑.

(H₂)　$a(x,\varepsilon)\leqslant 0$在$[-1,1]\times[0,\varepsilon_0]$上，且$\int_{-1}^{1}a^{-1}(x,0)dx>-\infty$.

(H₃)　$f(x,y,y',0)$使得：对任意$N>0$，存在$H(N)>0$使得退化方程(1.3)的任意解$u(x)$，只要$|u(x)|\leqslant N$，$x\in[-1,1]$，便有$|u'(x)|\leqslant H(N)$，$x\in[-1,1]$.

(H₄)　存在$\alpha(x)$，$\beta(x)\in C^2([-1,1])$，使得在$[-1,1]$上

$$\alpha(x)<\beta(x);\ \alpha'(-1)>A>\beta'(-1),\ \alpha(1)<B<\beta(1)$$

$$a(x,0)\alpha''+f(x,\alpha,\alpha',0)>0,\ a(x,0)\beta''+f(x,\beta,\beta',0)<0$$

* 国家自然科学基金资助课题.

(H_5) $f(x,y,y',\varepsilon)$在$\Omega=\{(x,y,y',\varepsilon)\,|-1\leqslant x\leqslant 1,-\infty<y,\ y'<\infty,0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$上关于$y$为不减函数。

(H_6) $f_{y'}(x,y,y',\varepsilon)\geqslant M>0$于$\Omega$上成立。

二、主要结果

首先给出两个引理

引理 考察奇异边值问题

$$a(t,x,x')x''=f(t,x,x') \tag{2.1}$$

$$Ax(0)-Bx'(0)=\alpha,\ Cx(1)+Dx'(1)=\beta \tag{2.2}$$

假设

1° $a\in C([0,1]\times R\times R,\ R)$，对固定的$(x,x_1)\in R\times R$，集合$\{t\in[0,1],\ a(t,x,x')=0\}$非空且测度为零。$a(t,x,x_1)\geqslant 0$，于$[0,1]\times R\times R$；对任意$x,x_1\in C([0,1],R)$，

$$\int_0^1 a^{-1}(s,\ x(s),\ x_1(s))ds<\infty.$$

2° $f\in C([0,1]\times R\times R,R)$，满足对任意$M>0$，存在$N(M)>0$，使得对任意方程(2.1)的解$x(t)$，只要$|x(t)|\leqslant M$，$t\in[0,1]$，便有$|x'(t)|\leqslant N(M)$，$t\in[0,1]$。

3° $A,B,C,D\geqslant 0$且$A^2+B^2>0$，$C^2+D^2>0$。

4° 存在$\bar{w},\underline{w}\in C^2([0,1],R)$，使得在$[0,1]$上

$$\underline{w}(t)<\bar{w}(t)$$

$$A\underline{w}(0)-B\underline{w}'(0)<\alpha<A\bar{w}(0)-B\bar{w}'(0)$$

$$C\underline{w}(1)+D\underline{w}'(1)<\beta<C\bar{w}(1)+D\bar{w}'(1)$$

$$a(t,\underline{w},\underline{w}')\underline{w}''>f(t,\underline{w},\underline{w}'),\ a(t,\bar{w},\bar{w}')\bar{w}''<f(t,\bar{w},\bar{w}')$$

在假设1°～4°之下，问题(2.1)、(2.2)有解$x(t)$，满足

$$\underline{w}(t)\leqslant x(t)\leqslant\bar{w}(t),\qquad t\in[0,1]$$

证明 这是文[6]之定理1，显然命题对于$a(t,x,x')\leqslant 0$，$t\in[0,1]$也成立。

引理2 考察如下边值问题：

$$y'''=F(x,y,y',y'') \tag{2.3}$$

$$y'(a)=\alpha,\ y(b)=\beta,\ y'(b)=\gamma \tag{2.4}$$

假设

1° $F(x,y,z,w)$在$\Omega=\{(x,y,z,w)\,|a\leqslant x\leqslant b,-\infty<y,z,w<\infty\}$上连续。

2° 任意$M>0$，存在$h(M)>0$，当$a\leqslant x\leqslant b$，$|y|\leqslant M$，$-\infty<z$，$w<\infty$时

$$|F(x,y,z,w)|\leqslant h(M)\Phi_p(|z|)\Phi_q(|w|)$$

这里$0\leqslant p\leqslant 1$，$q\geqslant 0$，$p+2q\leqslant 3$，且$r\geqslant 0$时

$$\Phi_r(s)=\max\{1,s^r\},\qquad (0\leqslant s<\infty).$$

3° $F(x,y,z,w)$在Ω中对y为不减函数。

4° 存在$\underline{w}(x),\bar{w}(x)\in C^3[a,b]$，当$a\leqslant x\leqslant b$时

$$\underline{w}(x)\leqslant\bar{w}(x),\ \underline{w}'(x)\geqslant\bar{w}'(x)$$

$$\bar{w}'''(x)\geqslant F(x,\bar{w}(x),\bar{w}'(x),\bar{w}''(x)),\ \underline{w}'''(x)\leqslant F(x,\underline{w}(x),\underline{w}'(x),\underline{w}''(x))$$

那么对α,β,γ，当$\underline{w}'(a)\geqslant\alpha\geqslant\bar{w}'(a)$，$\underline{w}(b)\leqslant\beta\leqslant\bar{w}(b)$，$\underline{w}'(b)\geqslant\gamma\geqslant\bar{w}'(b)$时问题(2.3)、(2.4)

有解$y(x)$适合

$$\underline{w}(x)\leqslant y(x)\leqslant \overline{w}(x),\quad \underline{w}'(x)\geqslant y'(x)\geqslant \overline{w}'(x)$$

证明 这是文[7]的引理2.

定理1 在假设$(H_1)\sim(H_6)$之下，问题(1.1)、(1.2)有解$y(x,\varepsilon)$，满足

$$\underline{w}(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant \overline{w}(x),\qquad x\in[-1,1]$$
$$\underline{w}'(x)\geqslant y'(x,\varepsilon)\geqslant \overline{w}'(x),\qquad x\in[-1,1]$$

证明 在$(H_1)\sim(H_4)$之下，由引理1知，问题(1.3)、(1.4)有解$u(x)$，且存在正数d使得当$-1\leqslant x\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时

$$|\varepsilon u''' - a(x,\varepsilon)u'' - f(x,u,u',\varepsilon)|\leqslant d\varepsilon$$

由假设(H_1)，(H_5)，(H_6)可知，存在正数K，M，l_1，l_2，l_3，δ，使得

$$a(x,\varepsilon)\leqslant 0 \qquad (-\delta\leqslant x\leqslant\delta,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$
$$a(x,\varepsilon)\leqslant -K \qquad (-1\leqslant x\leqslant -\delta \text{或} \delta\leqslant x\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$
$$0\leqslant f_y(x,y,y',\varepsilon)\leqslant l_1 \qquad (-1\leqslant x\leqslant -\delta,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$
$$0\leqslant f_y(x,y,y',\varepsilon)\leqslant l_2 \qquad (-\delta\leqslant x\leqslant\delta,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$
$$0\leqslant f_y(x,y,y',\varepsilon)\leqslant l_3 \qquad (\delta\leqslant x\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$
$$f_{y'}(x,y,y',\varepsilon)\geqslant -M \qquad (-1\leqslant x\leqslant -\delta \text{或} \delta\leqslant x\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$
$$f_{y'}(x,y,y',\varepsilon)\geqslant M \qquad (-\delta\leqslant x\leqslant\delta,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$$

令 $$\overline{w}(x)=u(x)+\phi(x),\quad \underline{w}(x)=u(x)-\phi(x)$$

其中

$$\phi(x)=\begin{cases}\varepsilon r[\exp[(\lambda_1-\lambda_2)\delta]\exp[\lambda_1 x]-d_1], & x\in[-1,-\delta]\\ \varepsilon r[\exp[\lambda_2 x]-d_1], & x\in[-\delta,\delta]\\ \varepsilon r[\exp[(\lambda_2-\lambda_3)\delta]\exp[\lambda_3 x]-d_1], & x\in[\delta,1]\end{cases}$$

这里$d_1=\dfrac{1}{2}\min\{\exp[-\lambda_1\delta],\exp[\lambda_2\delta],\exp[\lambda_3]\}>0$，$r$而为充分大常数使得$rd_1>d$. 而

λ_1是$\varepsilon\lambda^3+K\lambda^2+M\lambda-l_1=0$的负根，且$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_1=-\dfrac{M+\sqrt{M^2+4Kl_1}}{2K}$

λ_2是$\varepsilon\lambda^3-M\lambda-l_2=0$的负根，且$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_2=-\dfrac{l_2}{M}$

λ_3是$\varepsilon\lambda^3+K\lambda^2+M\lambda-l_3=0$的负根，且$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lambda_3=-\dfrac{M+\sqrt{M^2+4Kl_3}}{2K}$

且当K，M，l_1，l_2，l_3满足适当条件时，例如

$$2\sqrt{K}<M<3\sqrt{K},\quad 6l_1/(2\sqrt{l_1+1}-3)<l_2<2\sqrt{l_3}$$

可使$0>\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$.

显然$\underline{w}(x)$和$\overline{w}(x)$都是$[-1,1]$上的连续函数，且在$[-1,1]$上$\underline{w}(x)<u(x)<\overline{w}(x)$，$\underline{w}'(x)>u'(x)>\overline{w}'(x)$. $\underline{w}(x)$，$\overline{w}(x)$在小区间$[-1,-\delta]$，$[-\delta,\delta]$，$[\delta,1]$上均为三次连续可微函数，并且由$\phi(x)$的表达式及$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$不难得到

$$\overline{w}'(-\delta-0)>\overline{w}'(-\delta+0),\quad \overline{w}'(\delta-0)>\overline{w}'(\delta+0)$$
$$\underline{w}'(-\delta-0)<\underline{w}'(-\delta+0),\quad \underline{w}'(\delta-0)<\underline{w}'(\delta+0)$$

对于初始条件亦有

$$\underline{w}'(-1)>A>\bar{w}'(-1),\ \underline{w}(1)<B<\bar{w}(1),\ \underline{w}'(1)>C>\underline{w}'(1)$$

最后一式要求r充分大使

$$u'(-1)-\varepsilon r\lambda_3\exp[(\lambda_2-\lambda_3)\delta]\exp[\lambda_3]>C>u\ (-1)$$
$$+\varepsilon r\lambda_3\exp[(\lambda_2-\lambda_3)\delta]\exp[\lambda_3]$$

下证在$[-1,1]$上成立

$$\varepsilon\bar{w}'''\geqslant a(x,\varepsilon)\bar{w}''+f(x,\bar{w},\bar{w}',\varepsilon) \tag{2.5}$$

考虑

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\bar{w}'''-a(x,\varepsilon)\bar{w}''-f(x,\bar{w},\bar{w}',\varepsilon)\\
&=\varepsilon(\bar{w}'''-u''')+\varepsilon u'''-a(x,\varepsilon)(\bar{w}''-u'')-a(x,\varepsilon)u''-[f(x,\bar{w},\bar{w}',\varepsilon)\\
&\quad-f(x,\bar{w},u',\varepsilon)]-[f(x,\bar{w},u',\varepsilon)-f(x,u,u',\varepsilon)]-f(x,u,u',\varepsilon)\\
&=\varepsilon(\bar{w}'''-u''')-a(x,\varepsilon)(\bar{w}''-u'')\\
&\quad-\left[\int_0^1 f_{y'}(x,\bar{w},u'+\theta(\bar{w}'-u'),\varepsilon)d\theta\right](\bar{w}'-u')\\
&\quad-\left[\int_0^1 f_y(x,u+\theta(\bar{w}-u),u',\varepsilon)d\theta\right](\bar{w}-u)+[\varepsilon u'''-a(x,\varepsilon)u''-f(x,u,u',\varepsilon)]\\
&\geqslant\begin{cases}\varepsilon(\bar{w}'''-u''')+K(\bar{w}''-u'')+M(\bar{w}'-u')-l_1(\bar{w}-u)-d\varepsilon, & x\in[-1,-\delta]\\ \varepsilon(\bar{w}'''-u''')-M(\bar{w}'-u')-l_2(\bar{w}-u)-d\varepsilon, & x\in[-\delta,\delta]\\ \varepsilon(\bar{w}'''-u''')+K(\bar{w}''-u'')+M(\bar{w}'-u')-l_3(\bar{w}-u)-d\varepsilon, & x\in[\delta,1]\end{cases}\\
&=\begin{cases}r\varepsilon\exp[(\lambda_1-\lambda_2)\delta]\exp[\lambda_1x][\varepsilon\lambda_1^3+K\lambda_1^2+M\lambda_1-l_1]+(rd_1-d)\varepsilon\\ r\varepsilon\exp[\lambda_2x][\varepsilon\lambda_2^3-M\lambda_2-l_2]+(rd_1-d)\varepsilon\\ r\varepsilon\exp[(\lambda_2-\lambda_3)\delta]\exp[\lambda_3x][\varepsilon\lambda_3^3+K\lambda_3^2+M\lambda_3-l_3]+(rd_1-d)\varepsilon\end{cases}\\
&>0
\end{aligned}$$

即得证$\varepsilon\bar{w}'''>a(x,\varepsilon)\bar{w}''+f(x,\bar{w},\bar{w}',\varepsilon)$. 类似地可证得 $\varepsilon\underline{w}'''<a(x,\varepsilon)\underline{w}''+f(x,\underline{w},\underline{w}',\varepsilon)$.

由上述验证知引理2的假设条件均成立，于是边值问题 (1.1)、(1.2) 的解存在，设为$y(x,\varepsilon)$，且有

$$\underline{w}(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{w}(x),\ \underline{w}'(x)\geqslant y'(x,\varepsilon)\geqslant\bar{w}'(x),\qquad x\in[-1,1]$$

至此，定理1证毕.

参 考 文 献

[1] Li Yong et al., Asymptotic behavior of solutions for singularly perturbed boundary value problems with high order turning points, 东北数学, 5(2) (1989), 65—74.

[2] 周钦德, 具有转向点的奇摄动边值问题, 东北数学, 2(1) (1986), 100—110.

[3] Deng Shou-an (邓寿安) and Zhou Qin-de (周钦德), A problem with a high order turning point, *Northeastern Math. J.*, 6(1) (1990), 221—226.

[4] 李勇、周钦德, 具有转向点的二阶拟线性奇摄动方程解的渐近展开, 吉林大学自然科学学报, (4) (1988), 1—7.

[5] 周钦德、王怀中, 带有高阶转向点的奇摄动边值问题解的一致有效估计, 吉林大学自然科学学报, (4) (1988), 19—26.

[6] 李勇、周钦德，奇异Robin边值问题解的存在性.（待发表）

[7] Zhao Wei-li (赵为礼), Singular perturbations of boundary value problems for the third order nonlinear ordinary differential equations. *Acta Mathematica Scientia*, 8(1) (1988), 95—108.

Existence of Solutions for a Singularly Perturbed Boundary Value Problem for the Third Order Semi-Linear Differential Equation with a Turning Point

Cai Jian-ping

(*Dept. of Math., Zhangzhou Normal College, Fujian*)

Lin Zong-chi

(*Dept. of Math., Fujian Normal University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper, by using the techniques of differential inequalities, we prove the existence of the solutions of a singularly perturbed boundary value problem for the third order semilinear differential equation with a turning point

Key words turning point, semi-linear, singular perturbation