应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

非线性弹性动力学率型广义变分原理及子域原理*

赵国桥

（中石化北京设计院，1992年5月25日收到）

摘　要

本文基于拖带坐标描述和S-R分解定理，建立了包含速变梯度、动量、速度、应力和应变率等五类独立场变量的非线性弹性动力学率型广义变分原理和广义子域混合杂交变分原理。

关键词　率型广义子域　混合杂交变分原理　拖带坐标　S-R定理

一、引　　言

作为有限元法和动力子结构方法的基础，研究变分原理的重要性毋容置疑．经典的两种原理，最小位能原理和最小余能原理曾由Courant与Hillbert[1]（1953）作了严格论证，其中位移和应力被分别作为独立的场变量．Hellinger[2]和Reissner[3]先后于1914年和1950年提出了弹性力学中包含位移和应力二个独立场变量的一种广义变分原理．之后，胡海昌[4]和Washizu[5]先后于1954年和1955年提出了另一种广义变分原理（即H-W原理），其中位移、应变和应力被视为三类独立的场变量．对动力学问题，Toupin[6]（1952）和Crandall[7]（1957）建立了余能型原理．Barr[8]（1966）建立了包含速度、位移、应变和应力等4个独立场变量的弹性动力学广义H-W原理．钱伟长等[9]（1984）给出了动力学分区变分原理及其广义变分原理．邢京堂[10][11]给出了不同时端条件下的弹性动力学变分原理及其应用．对非线性问题，钱伟长[12]（1988）建立了大位移非线性弹性理论的变分原理和广义变分原理．郑兆昌和邢京堂[13]（1990）建立了包含动量、速度、位移、应变和应力等5个独立场变量的非线性弹性动力学广义变分原理及子域原理．郑兆昌和赵国桥[14]（1992）进一步推广了动力学多变量广义变分原理，视位移梯度、动量、位移、应变和应力等为独立场变量，建立了相应的非线性弹性动力学广义变分原理．上述变分原理大多基于Lagrange描述法，并以Green应变张量作为变形的几何表达．自陈至达[15]（1979）提出应变与转动的和分解定理（简称S-R定理）以后，基于拖带坐标描述和S-R定理的非线性理论及有限元方法已取得一些进展，涉及的工程面包括岩石、金属大变形、非线性效应、物性方程、生物工程和细胞工程等[16]．

---

* 陈至达推荐．
中国石化北京设计院资助课题．

新理论的创立为非线性力学的发展奠定了基础。

本文基于拖带坐标描述和S-R定理，建立了非线性弹性动力学率型广义变分原理和广义子域混合杂交变分原理。给出了包含速度梯度、动量、速度、应力和应变率等五类独立场变量的势能率和余能率型泛函表达。根据驻值原理，通过变分得到非线性弹性动力学的全部控制方程和Lagrange乘子。

二、非线性弹性动力学控制方程

在拖带坐标系描述下，考虑一占有三维空间域Ω且具有给定几何边界S_g和给定力边界S_σ的弹性体($S=S_g+S_\sigma$)，采用以S-R定理为基础的应变张量S^i_j和应力张量$\sigma_i^{\cdot j}$表达，不计体矩，可以写出非线性弹性动力学的基本方程和定解条件

运动方程

$$\sigma_i^{\cdot j}\|_j+f_i=\dot{p}_i \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.1}$$

几何方程

$$\dot{S}^i_j=(V^i\|_j+V^i\|_j^T)/2 \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.2}$$

或

$$\dot{S}^i_j=(Q^i_j+Q^{iT}_j)/2 \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.3}$$

应力-应变关系

$$\dot{\sigma}_i^{\cdot j}=\frac{\partial\dot{A}(S^i_j)}{\partial S^i_j} \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.4}$$

或

$$\dot{S}^i_j=\frac{\partial\dot{B}(\sigma_i^{\cdot j})}{\partial\sigma_i^{\cdot j}} \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.5}$$

或

$$\dot{A}(S^i_j)+\dot{B}(\sigma_i^{\cdot j})=\dot{\sigma}_i^{\cdot j}S^i_j+\sigma_i^{\cdot j}\dot{S}^i_j \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.6}$$

力边界条件

$$\sigma_i^{\cdot j}n_j=T_i \qquad (x^i,t)\in S_\sigma\times(t_1,t_2) \tag{2.7}$$

位移或速度边界条件

$$u^i=\bar{u}^i \qquad (x^i,t)\in S_g\times(t_1,t_2) \tag{2.8}$$

或

$$V^i=\bar{V}^i \qquad (x^i,t)\in S_g\times(t_1,t_2) \tag{2.9}$$

引入动能和动量或速度之间的关系

$$T(p_i)=p^ip_i/2\rho \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.10}$$

或

$$T(V^i)=\rho V_iV^i/2 \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.11}$$

并定义

$$\partial T/\partial p_i=V^i \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.12}$$

或

$$\partial T/\partial V^i=p_i \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.13}$$

引入速度梯度Q^i_j，并定义为

$$Q^i_j-V^i\|_j=0 \qquad (x^i,t)\in\Omega\times(t_1,t_2) \tag{2.14}$$

时端条件

$$\delta V^i(x^i,t_1)=\delta V^i(x^i,t_2)=0 \tag{2.15}$$

或

$$\delta\sigma_i^{\cdot j}(x^i,t_1)=\delta\sigma_i^{\cdot j}(x^i,t_2)=0 \tag{2.16}$$

其中，$\sigma_i^{\cdot j}$和S^i_j是在拖带坐标系中定义的应力和应变；$A(S^i_j)$和$(B\sigma_i^{\cdot j})$分别表示应变能密度函数和应变余能密度函数；f_i为体力；T_i，$\bar{u}^i$和$\bar{V}^i$分别为边界力、边界位移和边界速

度；ρ为材料密度；符号"$\|$"表示对瞬时拖带坐标x^i的协变导数，"$\cdot$"表示对时间的变化率.

三、非线性弹性动力学率型广义变分原理

1. 势能率型原理

我们构造下列泛函

$$\dot{\Pi}_{VP}=\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\iint_{\Omega}\Big[\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}\dot{S}^{j}_{i}-\dot{B}(\sigma^{\cdot i}_{\cdot j})-f_iV^i+\dot{T}(p_i)-p_i\dot{V}^i-\Big(\dot{S}^i_j-\frac{1}{2}Q^i_j-\frac{1}{2}Q^{i\,T}_j\Big)\lambda_i^{\cdot j}$$

$$-(Q^i_j-V^i\|_j)\mu_i^{\cdot j}\Big]d\Omega-\int_{S_\sigma}\bar{T}_iV^idS-\int_{S_v}(V^i-\bar{V}^i)\lambda_idS\Big\} \tag{3.1}$$

式中：符号"$\dot{\Pi}_{VP}$"表示含五个独立场变量的势能率型泛函，这五个独立场变量分别是$\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}$，$\dot{S}^i_j$，$V^i$，$Q^i_j$和$p_i$．$\lambda_i^{\cdot j}$，$\mu_i^{\cdot j}$和$\lambda_i$为Lagrange乘子，分别用于引入变分条件(2.3)、(2.14)、(2.9)．

非线性弹性动力学广义变分原理可表述为

对任意时刻t，在满足给定时端条件(2.15)的一切可能的运动中，真实运动的应力$\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}$，应变率$\dot{S}^i_j$，速度$V^i$，速度梯度$Q^i_j$和动量函数$p_i$必使泛函$\dot{\Pi}_{VP}$取驻值，即

$$\delta\dot{\Pi}_{VP}=0 \tag{3.2}$$

证明 对式(3.1)变分，利用时端条件(2.15)和散度定理，有

$$\delta\dot{\Pi}_{VP}=\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\iint_{\Omega}\Big[\delta\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}\dot{S}^j_i+\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}\delta\dot{S}^j_i-\frac{\partial\dot{B}(\sigma^{\cdot i}_{\cdot j})}{\partial\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}}\delta\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}-f_i\delta V^i+\frac{\partial\dot{T}(p_i)}{\partial p_i}\delta p_i-\delta p_i\dot{V}^i$$

$$-p_i\delta\dot{V}^i-\Big(\dot{S}^i_j-\frac{1}{2}Q^i_j-\frac{1}{2}Q^{i\,T}_j\Big)\delta\lambda_i^{\cdot j}-\Big(\delta\dot{S}^i_j-\frac{1}{2}\delta Q^i_j-\frac{1}{2}\delta Q^{i\,T}_j\Big)\lambda_i^{\cdot j}$$

$$-(Q^i_j-V^i\|_j)\delta\mu_i^{\cdot j}-(\delta Q^i_j-\delta V^i\|_j)\mu_i^{\cdot j}\Big]d\Omega-\int_{S_\sigma}\bar{T}_i\delta V^idS$$

$$-\int_{S_v}(V^i-\bar{V}^i)\delta\lambda_idS-\int_{S_v}\delta V^i\lambda_idS\Big\}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\iint_{\Omega}\Big[\delta\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}\Big(\dot{S}^j_i-\frac{\partial\dot{B}(\sigma^{\cdot i}_{\cdot j})}{\partial\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}}\Big)+\delta\dot{S}^i_j(\sigma_i^{\cdot j}-\lambda_i^{\cdot j})+\delta p_i\Big(\frac{\partial\dot{T}(p_i)}{\partial p_i}-\dot{V}^i\Big)$$

$$+\delta V^i(\dot{p}_i-f_i-\mu_i^{\cdot j}\|_j)+\delta Q^i_j\Big(\frac{1}{2}\lambda_i^{\cdot j}+\frac{1}{2}\lambda_i^{\cdot j}-\mu_i^{\cdot j}\Big)-\delta\lambda_i^{\cdot j}\Big(\dot{S}^i_j-\frac{1}{2}Q^i_j$$

$$-\frac{1}{2}Q^{i\,T}_j\Big)-\delta\mu_i^{\cdot j}(Q^i_j-V^i\|_j)\Big]d\Omega+\int_{S_\sigma}\delta V^i(\mu_i^{\cdot j}n_j-\bar{T}_i)dS$$

$$+\int_{S_v}\delta V^i(\mu_i^{\cdot j}n_j-\lambda_i)dS-\int_{S_v}\delta\lambda_i(V^i-\bar{V}^i)dS\Big\}$$

令 $\delta\dot{\Pi}_{VP}=0$

得到下列Euler方程

$$\mu_i^{\cdot j}\|_j+f_i=\dot{p}_i$$

式(2.3)(2.5)(2.12)(2.14)

和边界条件

$$\mu_i^{\cdot j}n_j=\bar{T}_i$$

式(2.9)

及Lagrange乘子

$$
\begin{aligned}
&\lambda_i^{\cdot j}=\sigma_i^{\cdot j}\\
&\mu_i^{\cdot j}=\frac{1}{2}(\lambda_i^{\cdot j}+\lambda_i^{\cdot jT}) \qquad (3.3)\\
&\lambda_i=\mu_i^{\cdot j}n_j
\end{aligned}
$$

由于不计体矩，故$\sigma_i^{\cdot j}$等于$\sigma_j^{\cdot i}$。因此式(3.3)可写为

$$\mu_i^{\cdot j}=\lambda_i^{\cdot j}$$

将Lagrange乘子代入上述Euler方程和边界条件，便得到非线性弹性动力学的全部控制方程，即式(2.1)、(2.3)、(2.5)、(2.7)、(2.9)、(2.12)、(2.14)。

证毕。

2. 余能率型原理

我们构造下列泛函

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_{\text{Ⅲ}C}=\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\int_\Omega[\dot{\sigma}_i^{\cdot j}S_j^i-\dot{A}(S_j^i)+\dot{T}(V^i)-\dot{p}_iV^i+(\sigma_i^{\cdot j}\|_j+f_i-\dot{p}_i)\mu^i]d\Omega\\
+\int_{S_v}\sigma_i^{\cdot j}n_j\bar{V}^idS-\int_{S_\sigma}(\sigma_i^{\cdot j}n_j-\bar{T}_i)\alpha^idS\Big\}
\end{aligned}
\qquad (3.4)
$$

式中：符号“$\dot{\Pi}_{\text{Ⅲ}C}$”表示含四个独立场变量的余能率型泛函，这四个独立场变量分别是$\sigma_{\cdot j}^{i}$，S_j^i，V^i和p_i。μ^i和α^i为Lagrange乘子，分别用于引入变分条件(2.1)和(2.7)。

非线性弹性动力学广义变分原理可表述为

对任意时刻t，在满足给定时端条件(2.16)的一切可能的运动中，真实运动的应力$\sigma_{\cdot j}^{i}$，应变率S_j^i，速度V^i和动量函数p_i必使泛函$\dot{\Pi}_{\text{Ⅲ}C}$取驻值，即

$$\delta\dot{\Pi}_{\text{Ⅲ}C}=0 \qquad (3.5)$$

证明 对式(3.4)变分，利用时端条件(2.16)和散度定理，并注意到应力张量的对称性，有

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{\Pi}_{\text{Ⅲ}C}&=\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\int_\Omega\Big[-\delta\sigma_i^{\cdot j}\dot{S}_j^i+\dot{\sigma}_i^{\cdot j}\delta S_j^i-\frac{\partial\dot{A}(S_j^i)}{\partial S_j^i}\delta S_j^i+\frac{\partial\dot{T}(V^i)}{\partial V^i}\delta V^i-\delta\dot{p}_iV^i\\
&\quad-\dot{p}_i\delta V^i+(\sigma_i^{\cdot j}\|_j+f_i-\dot{p}_i)\delta\mu^i-\delta\sigma_i^{\cdot j}\mu^i\|_j-\delta\dot{p}_i\mu^i\Big]d\Omega\\
&\quad+\int_{S_\sigma+S_v}\delta\sigma_i^{\cdot j}n_j\mu^idS+\int_{S_v}\delta\sigma_i^{\cdot j}n_j\bar{V}^idS-\int_{S_\sigma}\delta\sigma_i^{\cdot j}n_j\alpha^idS\\
&\quad-\int_{S_\sigma}(\sigma_i^{\cdot j}n_j-\bar{T}_i)\delta\alpha^idS\Big\}\\
&=\int_{t_1}^{t_2}dt\Big\{\int_\Omega\Big[\delta\mu^i(\sigma_i^{\cdot j}\|_j+f_i-\dot{p}_i)+\delta S_j^i\Big(\dot{\sigma}_i^{\cdot j}-\frac{\partial\dot{A}(S_j^i)}{\partial S_j^i}\Big)-\delta\sigma_i^{\cdot j}\Big(\dot{S}_j^i\\
&\quad+\frac{1}{2}\mu^i\|_j+\frac{1}{2}\mu^i\|_j^T\Big)+\delta V^i\Big(\frac{\partial\dot{T}(V^i)}{\partial V^i}-\dot{p}_i\Big)-\delta\dot{p}_i(\mu^i+V^i)\Big]d\Omega\\
&\quad+\int_{S_v}\delta\sigma_i^{\cdot j}n_j(\mu^i+\bar{V}^i)dS+\int_{S_\sigma}\delta\sigma_i^{\cdot j}n_j(\mu^i-\alpha^i)dS
\end{aligned}
$$

$$-\int_{S_\sigma}(\sigma_i^{\cdot j}n_j-\boldsymbol{T}_i)\delta\alpha^i dS\Big\}$$

令 $\delta\dot{\Pi}_{KC}=0$

得到下列Euler方程

式(2.1)(2.4)(2.13)

$$\dot{S}_j^i=-\frac{1}{2}(\mu^i\|_j+\mu^i\|_j^T)$$

和边界条件

式(2.7)

$$\mu^i=-\bar{V}^i$$

及Lagrange乘子

$$\mu^i=-V^i$$

$$\alpha^i=\mu^i$$

将Lagrange乘子代入上述Euler方程和边界条件，便可得到控制方程(2.1)、(2.2)、(2.4)、(2.7)、(2.9)、(2.13)。

证毕。

四、子域混合杂交变分原理

将弹性体整体域Ω分成两类子区域，一类用势能率表达，另一类用余能率表达，分别用P和C标记。此外，我们分别用m和n标记这两类区域的域号。整体系统的泛函将由所有子域及子域交界面处的泛函之和构成，即

$$\dot{\Pi}=\Sigma\dot{\Pi}_P^m+\Sigma\dot{\Pi}_C^n+\Sigma\dot{\Pi}_{PP}^{mm'}+\Sigma\dot{\Pi}_{CC}^{nn'}+\Sigma\dot{\Pi}_{PC}^{mn} \tag{4.1}$$

式中：$\dot{\Pi}_P^m$和$\dot{\Pi}_C^n$分别用式(3.1)和(3.4)表达，子域交界面处的泛函为

$$\dot{\Pi}_{PP}^{mm'}=\int_{t_2}^{t_1}dt\int_{S_{mm'}}(V^{im}-V^{im'})\sigma_i^{\cdot jm}n_j^m dS \tag{4.2}$$

$$\dot{\Pi}_{CC}^{nn'}=\int_{t_2}^{t_1}dt\int_{S_{nn'}}(\sigma_i^{\cdot jn}n_j^n+\sigma_i^{\cdot jn'}n_j^{n'})V^{in}dS \tag{4.3}$$

$$\dot{\Pi}_{PC}^{mn}=\int_{t_2}^{t_1}dt\int_{S_{mn}}\sigma_i^{\cdot jn}n_j^n V^{im}dS \tag{4.4}$$

根据驻值泛函原理，即

$$\delta\dot{\Pi}=0 \tag{4.5}$$

结合时端条件(2.15)、(2.16)，即可得到每一个子域内的控制方程和边界条件，以及各子域交界面上的速度连续条件

$$V^{im}=V^{im'}\qquad (x^i,t)\in S_{mm'}\times(t_1,t_2) \tag{4.6}$$

$$V^{in}=V^{in'}\qquad (x^i,t)\in S_{nn'}\times(t_1,t_2) \tag{4.7}$$

$$V^{im}=V^{in}\qquad (x^i,t)\in S_{mn}\times(t_1,t_2) \tag{4.8}$$

和力平衡条件

$$\sigma_i^{\cdot jm}n_j^m+\sigma_i^{\cdot jm'}n_j^{m'}=0\qquad (x^i,t)\in S_{mm'}\times(t_1,t_2) \tag{4.9}$$

$$\sigma_i^{\cdot jn} n_j^n + \sigma_i^{\cdot jn'} n_j^n = 0 \qquad (x^i, t) \in S_{nn'} \times (t_1, t_2) \tag{4.10}$$

$$\sigma_i^{\cdot jm} n_j^m + \sigma_i^{\cdot jn} n_j^n = 0 \qquad (x^i, t) \in S_{mn} \times (t_1, t_2) \tag{4.11}$$

具体证明这里不再细述。

五、结　论

本文基于拖带坐标描述和S-R分解定理，建立了非线性弹性动力学率型广义变分原理和子域混合杂交变分原理。该原理在实际工程中的应用有待进一步研究。文[17]、[18]等基于势能率原理和更新拖带坐标法给出了平面弹塑性大变形静、动力分析实例。

参 考 文 献

[1] Courant, R. and D. Hilbert., Method of mathematical physics, *Interscience*, 1 (1953).

[2] Hellinger, E. H., Der allgemeine ausatz der machanik der kontinua, *Encyclopadie Der Mathematischen Wissenschaften*, Part4 (1914), 602—694.

[3] Reissner, E., On a variational theorem in elasticity, *J. Math. Phy.*, 29 (1950).

[4] 胡海昌，论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理，物理学报，(3) (1954).

[5] Washizu, K., On the variational principles of elasticity and plasticiy, Aeroelastic and Structures Research Laboratory, MIT, Technical Report 25—8 (1955).

[6] Toupin, R.A., A variational principle for the mesh-type analysis of a mechanical system, *J. Appl. Mech.*, 19(2) (1952).

[7] Crandall, S. H., Complementary extremes principles for dynamics, *9th. Int. Conf. Appl. Mech.*, Rome, Ⅴ(1957), 80—87.

[8] Barr, A. S., An extension of the Hu-Washizu variational principle in linear elasticity for dynamic problems, *J. Appl. Mech.*, 33 (1966), 465.

[9] 钱伟长、卢文达、王蜀，动力学分区变分原理及其广义变分原理，力学学报，(3) (1989).

[10] 邢京堂，弹性动力学变分原理的理论及应用研究，《现代数学与力学》，钱伟长和郭友中主编，科学出版社 (1989), 84—90.

[11] 邢京堂，包含终值条件为驻值条件的哈氏型弹性动力学变分原理，上海力学，(3) (1990).

[12] 钱伟长，大位移非线性弹性理论的变分原理和广义变分原理，应用数学和力学，9(1) (1988).

[13] Zheng Zhao-chang and Xing Jing-tang, Generalized sub-region mixed and hybrid variational principles in nonlinear elastodynamics, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 3(2) (1990).

[14] Zheng Zhao-chang and Zhao Guo-qiao, Generalized variational principles in nonlinear elastodynamics with six independent fields, *Advances in Enqineering Mech.*, Eds: Zhu De-chao et al., Peking University Press (1992).

[15] 陈至达，连续介质有限变形力学几何场论，力学学报，(2) (1979), 107—117.

[16] 陈至达，《有理力学》，中国矿业大学出版社 (1986).

[17] 李平，非线性大变形有限元分析的更新拖带坐标法及其应用，中国矿业大学博士学位论文，北京 (1991).

[18] 赵国桥，核反应堆管道系统动力响应分析，清华大学博士学位论文，北京 (1992).

Rated Generalized Sub-Region Variational Principles in Nonlinear Elastodynamics

Zhao Guo-qiao

(Beijing Design Institute of SINOPEC, Beijing)

Abstract

In this paper, the rated generalized sub-region mixed and hybrid variational principles in nonlinear elastodynamics are constructed on the basis of co-moving coordinate description and S-R decomposition theorem, which contain five independent arguments, or velocity gradient, momentum, velocity, stress and strain rate.

Key words rated generalized sub-region, mixed and hybrid variational principle, co-moving coordinate description, S-R decomposition theorem