应用数学和力学，第14卷第12期（1993年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

管道内激波的不稳定性*

徐 复 陈乐山

（中国科学院力学研究所，1992年4月2日收到）

摘 要

本文将无限大激波阵面的激波不稳定性理论[1]推广到矩形截面管道内的激波不稳定性问题。首先，给出这个问题的数学提法，包括扰动方程与三类边界条件。其次，给出扰动方程的普遍解。上游和下游的普遍解分别含有5个待定常数。再次，在一类边界条件和一个假定下，证明了激波前扰动为0，激波后两个声扰动之一为0。边界条件是，$x\to\pm\infty$处扰动物理量为0。假定只讨论激波不稳定性问题，从而可先设$\omega=i\gamma$，γ是不稳定性增长率，为正实数。另一类边界条件是管壁上法向速度扰动为0，它使波数只能取一组离散值。最后，用扰动激波上的5个守恒方程这一边界条件来决定激波后4个待定常数和扰动激波振幅这个未知量时，导出了色散关系。结果表明，正实数γ确是存在。不稳定激波有两种模式，一种模式为

$$\gamma=-W\cdot k \qquad (W<0)$$

它代表激波的绝对不稳定性，是新得到的模式。另一种模式与过去工作中给出的[2,3]大体相同。本文则进一步给出了这种模式的激波不稳定性增长率，并指出$j^2(\partial V/\partial P)_H=1+2M$为最不稳定点（即无量纲化的不稳定性增长率$\Gamma=\infty$）。

如果不假定ω是纯虚数，而是复数，其虚部为正实数$\mathrm{Im}(\omega)\geqslant0$。本文也严格证明了其不稳定性判据仍有两种模式，$\omega$仍为纯虚数。

关键词 激波 激波不稳定性 管道中激波 激波稳定性

一、引 言

激波稳定性研究的一个方向是从Landau-Lifschitz[4]开始的。对一维小扰动波，他们得到的稳定性判据是

$$M_1>1,\ M_2<1$$

这个研究方向后来被称作激波进化性。1982年，文献[5]中证明了：对二维小扰动波，无论是无限大激波阵面还是管道内的激波阵面，其进化性条件仅满足上面不等式$M_1>0$，$M_2<1$是不够的。实际上，进化性条件还与小扰动波的频率有关。一般说来，激波对二维小扰动波是非进化的。

激波稳定性研究的另一个方向是采用简正模法进行分析。这是从Дьяков[2]开始的。随后，Swan和Fowles等继续进行了类似工作[3]。他们假定了介质的Hugoniot曲线是任意的，得到了激波不稳定性判据是：

* 钱伟长推荐。

$$j^2(\partial V/\partial P)_H<-1 \text{ 或 } j^2(\partial V/\partial P)_H>1+2M$$

1981年，Fowles 和Houwing指出[6]，满足这个条件，一个激波会自发分裂为两个激波和一个接触间断面．1985年，Book用这个判据来讨论Sedov 点爆炸波的稳定性问题[7]．1987年，文献[1]给出了满足这个不稳定性判据的激波不稳定性增长率．

大家知道，平面问题激波后的扰动，一般应由4个独立的小扰动组成，它们是熵扰动、涡旋扰动和两个声扰动．四个扰动具有相同的ω和k，而l一般是不相同的．但无论是Дьяков的论文，还是Swan-Fowles 的论文，都有一个不当之处，即他们实际上丢掉了一个声扰动，保留了另一个，而未加任何证明或说明．文献[1]在补充这个证明的同时，得到了两种激波不稳定性模式：一种新模式，代表激波的绝对不稳定性．另一种模式，与过去的结果[2,3]相同．本文讨论矩形截面管道内的激波不稳定性问题．激波是在三维空间中的．激波后的扰动一般由5个小扰动组成：一个熵扰动，两个涡旋扰动和两个声扰动．我们认为，一般说来激波前也可能有扰动，也有如上的5个小扰动．但对讨论不稳定性问题而言，正是无限远处扰动物理量为0的条件，限制了激波前不应有扰动，并应丢掉激波后的一个声扰动．对剩下的4个小扰动，以及未知的扰动激波振幅，用扰动激波上的5个守恒方程来求解，就得到了色散关系．结果表明，和文献[1]的结果相似，我们仍有两种激波不稳定性模式．而且扰动振幅随时间作指数增长，即ω为纯虚数，且虚部为正实数．Дьяков给出的不稳定性判据现在修改为$j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)<-1$或$j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H\geqslant 1+2M$．

二、小扰动方程及其普遍解

直角坐标系$Oxyz$固定在激波上，坐标原点在管轴，x轴与管轴重合．未扰激波位于$x=0$．气流从$x>0$（速度W_0）区域经激波流到$x<0$（速度W）区域．我们采用的符号类似Swan-Fowles的文[3]．假定

$$M_0=-W_0/C_0>1,\quad M=-W/C<1$$

并且气体的状态方程是任意的．

激波后的扰动方程为：

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}+W\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+V\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t}+W\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}+V\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}+W\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}+V\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t}+W\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\frac{C^2}{V}\left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right)=0$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t}+W\frac{\partial \bar{s}}{\partial x}=0 \text{ 或 } \left(\frac{\partial}{\partial t}+W\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\bar{p}+\frac{C^2}{V^2}\bar{v}\right)=0$$

如果用W_0，V_0，C_0代替W，V，C，就得到激波前的小扰动方程．

扰动方程的普遍解是：

$$\bar{u}_x=(\cos k_y\cdot y)\cdot(\cos k_z\cdot z)\exp[-i\omega t]\Big[Bk_y\exp[il_1x]+E\cdot k_z\exp[il_1x]$$

$$+F\frac{Vl^{(1)}}{\omega-Wl^{(1)}}\exp[il^{(1)}x]+G\cdot\frac{Vl^{(2)}}{\omega-Wl^{(2)}}\exp[il^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{u}_y=i(\sin k_y y)\cdot(\cos k_z z)\exp[-i\omega t]\Big[-Bl_1\exp[il_1x]$$

$$+F\frac{Vk_y}{\omega-Wl^{(1)}}\exp[il^{(1)}x]+G\cdot\frac{Vk_y}{\omega-Wl^{(2)}}\exp[il^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{u}_z=i(\cos k_y y)\cdot(\sin k_z z)\exp[-i\omega t]\Big[-El_1\exp[il_1x]$$

$$+F\frac{Vk_z}{\omega-Wl^{(1)}}\exp[il^{(1)}x]+G\cdot\frac{Vk_z}{\omega-Wl^{(2)}}\exp[il^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{v}=(\cos k_y y)\cdot(\cos k_z z)\exp[-i\omega t]\Big[A\exp[il_1x]$$

$$-F\frac{V^2}{C^2}\exp[il^{(1)}x]-G\frac{V^2}{C^2}\exp[il^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{p}=(\cos k_y y)\cdot(\cos k_z z)\exp[-i\omega t][F\exp[il^{(1)}x]+G\exp[il^{(2)}x]]$$

其中

$$x<0,\quad |y|\leqslant a,\quad |z|\leqslant b$$

$$k_y=n\pi/a\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

$$k_z=m\pi/b\qquad(m=1,2,3,\cdots)$$

而

$$l_1=\omega/W,\quad k^2=k_y^2+k_z^2$$

$$l^{(1)}=\frac{-W\omega+\sqrt{C^2\omega^2+C^2k^2W^2-C^4k^2}}{C^2-W^2}$$

$$l^{(2)}=\frac{-W\omega-\sqrt{C^2\omega^2+C^2k^2W^2-C^4k^2}}{C^2-W^2}$$

请注意这个解已满足固壁上的边界条件

$$\bar{u}_y|_{y=\pm a}=0,\quad \bar{u}_z|_{z=\pm b}=0$$

A，B，E，F，G为5个任意常数，依次代表一个熵扰动，两个涡旋扰动和两个声扰动。

类似地，我们可以给出激波前小扰动方程的普遍解：

$$\bar{u}_x=\cos k_y y\cdot\cos k_z z\exp[-i\omega t]\Big[B_0k_y\exp[il_{10}x]+E_0k_z\exp[il_{10}x]$$

$$+F_0\frac{V_0l_0^{(1)}}{\omega-W_0l_0^{(1)}}\exp[il_0^{(1)}x]+G_0\frac{V_0l_0^{(2)}}{\omega-W_0l_0^{(2)}}\exp[il_0^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{u}_y=i\sin k_y y\cdot\cos k_z z\exp[-i\omega t]\Big[-B_0l_{10}\exp[il_{10}x]$$

$$+F_0\frac{V_0k_y}{\omega-W_0l_0^{(1)}}\exp[il_0^{(1)}x]+G_0\frac{V_0k_y}{\omega-W_0l_0^{(2)}}\exp[il_0^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{u}_z=i\cos k_y y\cdot\sin k_z z\exp[-i\omega t]\Big[-E_0l_{10}\exp[il_{10}x]$$

$$+F_0\frac{V_0k_z}{\omega-W_0l_0^{(1)}}\exp[il_0^{(1)}x]+G_0\frac{V_0k_z}{\omega-W_0l_0^{(2)}}\exp[il_0^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{v}=\cos k_y y\cdot\cos k_z z\exp[-i\omega t]\Big[A_0\exp[il_{10}x]$$

$$-F_0\frac{V_0^2}{C_0^2}\exp[il_0^{(1)}x]-G_0\frac{V_0^2}{C_0^2}\exp[il_0^{(2)}x]\Big]$$

$$\bar{p}=\cos k_y y\cdot\cos k_z z\exp[-i\omega t][F_0\exp[il_0^{(1)}x]+G_0\exp[il_0^{(2)}x]]$$

其中

$$x>0,\ |y|\leqslant a,\ |z|\leqslant b$$
$$k_y=n\pi/a \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$
$$k_z=m\pi/b \qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

而

$$l_{10}=\omega/W_0,\ k=k_y^2+k_z^2$$
$$l_0^{(1)}=\frac{W_0\omega+\sqrt{C_0^2\omega^2+C_0^2k^2W_0^2-C_0^4k^2}}{W_0^2-C_0^2}$$
$$l_0^{(2)}=\frac{W_0\omega-\sqrt{C_0^2\omega^2+C_0^2k^2W_0^2-C_0^4k^2}}{W_0^2-C_0^2}$$

这个解也已满足固壁上的边界条件

$$\bar{u}_y|_{y=\pm a}=0,\ \bar{u}_z|_{z=\pm b}=0$$

A_0，B_0，E_0，F_0，G_0为5个待定常数，依次代表一个熵扰动，两个涡旋扰动和两个声扰动．

除固壁上的边界条件外，还有其他两类边界条件．一类是扰动激波上的守恒关系，这将在下一节讨论．另一类边界条件是扰动量在正负无限远处应为0，即

$$x\to\pm\infty,\ \bar{u}_x,\ \bar{u}_y,\ \bar{u}_z,\ \bar{v},\ \bar{p}\to 0$$

它要求

$$\mathrm{Im}(l)<0,\ \text{当}x<0 \qquad (l\text{为}l_1,\ l^{(1)},\ l^{(2)})$$
$$\mathrm{Im}(l_0)>0,\ \text{当}x>0 \qquad (l_0\text{为}l_{10},\ l_0^{(1)},\ l_0^{(2)})$$

假定气体介质是无耗散的，而且我们只讨论不稳定激波的情况，因此可以先假定

$$\omega=i\gamma, \qquad \gamma\text{为正实数}$$

这时，将ω代入l，l_0，很容易看到

$$x<0\text{时},\ \mathrm{Im}(l_1)<0,\ \mathrm{Im}(l^{(1)})>0,\ \mathrm{Im}(l^{(2)})<0$$
$$x>0\text{时},\ \mathrm{Im}(l_{10})<0,\ \mathrm{Im}(l_0^{(1)})<0,\ \mathrm{Im}(l_0^{(2)})<0$$

因此，我们保留激波后的A，B，E，G，而令

$$F=A_0=B_0=E_0=F_0=G_0=0$$

如果ω不是纯虚数，而是复数，其虚部为正实数，这种情况将在第五节中讨论．我们将证明，这时并不存在新的不稳定区．

三、扰动激波上的守恒方程和色散关系

首先给出扰动激波上应满足的守恒方程，结合上节给出的解，导出色散方程．

设扰动激波的形状为：

$$x=g(y,z,t)=g_0\cdot\cos k_y y\cdot\cos k_z z\cdot\exp[-i\omega t]$$

则

法向单位矢量 $\boldsymbol{n}=(1,-\partial g/\partial y,-\partial g/\partial z)$

切向单位矢量 $\boldsymbol{t}_y=(-\partial g/\partial y,-1,0)$

$\boldsymbol{t}_z=(-\partial g/\partial z,0,-1)$

在扰动激波上，激波最后切向速度相等，即

在 $x=0$

$$\begin{cases}(W+\bar{u}_x,\bar{u}_y,\bar{u}_z)\cdot \boldsymbol{t}_y=(W_0,0,0)\boldsymbol{t}_y\\(W+\bar{u}_x,\bar{u}_y,\bar{u}_z)\cdot \boldsymbol{t}_z=(W_0,0,0)\boldsymbol{t}_z\end{cases}$$

类似地，法向速度满足

在 $x=0$

$$(W+\bar{u}_x,\ \bar{u}_y,\ \bar{u}_z)\boldsymbol{n}-(W_0,0,0)\cdot\boldsymbol{n}-[(V_0-V-\bar{v})\cdot(P-P_0+\bar{p})]^{\frac{1}{2}}$$

激波Hugoniot关系及质量守恒分别给出

在 $x=0$

$$\bar{p}=(\partial P/\partial V)_H\cdot\bar{v}$$

$$(\bar{D}-W_0)^2=V_0^2(P+\bar{p}-P_0)\cdot(V_0-\bar{v}-V)^{-1}$$

其中扰动激波速度$\bar{D}$为

$$\bar{D}=\partial g/\partial t=-i\omega g_0\cos k_y y\cdot\cos k_z z\exp[-i\omega t]$$

对于不全为0的激波后4个小扰动A，B，E，G以及g_0，扰动激波上5个守恒方程给出下列色散关系：

$$2\frac{W}{W_0}\cdot\omega\left(k^2+\frac{\omega^2}{W^2}\right)=\left(\frac{\omega^2}{WW_0}+k^2\right)(\omega-Wl^{(2)})\left[1+j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H\right]$$

其中

$$j^2=(\rho_0W_0)^2=\left(\frac{W_0}{V_0}\right)^2=(\rho W)^2=\left(\frac{W}{V}\right)^2$$

$$k^2=k_y^2+k_z^2$$

$l^{(2)}$是ω的已知函数．将$l^{(2)}$的表达式代入后，得到ω满足的一个代数方程．方程的根ω决定稳定与不稳定．

令 $\Omega=\omega/Ck$

色散关系为

$$2\cdot\frac{W}{W_0}(1-M^2)\Omega(\Omega^2+M^2)$$
$$=\left(\frac{W}{W_0}\Omega^2+M^2\right)(\Omega-M\sqrt{\Omega^2+M^2-1})\left[1+j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H\right]$$

四、两种不稳定性模式

从上述色散关系，可以看出有一个解为

$$\Omega=iM$$

它使 $\Omega+M^2=0$，这个解也可写为

$$\Gamma=\gamma/Ck=M$$

或

$$\gamma=-W\cdot k\qquad(W<0)$$

下面，我们用统一方法来求色散方程的解．

令

$$\Omega=i(1-M^2)^{1/2}/\mathrm{sh}\theta \quad 或 \quad \Gamma=\gamma/Ck=(1-M^2)^{1/2}/\mathrm{sh}\theta$$

于是

$$\frac{l^2}{k}=i\frac{M-\mathrm{ch}\theta}{\sqrt{1-M^2}\,\mathrm{sh}\theta}$$

色散关系化为：

$$(M\mathrm{ch}\theta-1)(f\mathrm{ch}^2\theta+g\mathrm{ch}\theta+h)=0$$

式中

$$f=M^2\cdot[1+j^2(\partial V/\partial P)_H]$$

$$g=2M(1-M^2)W/W_0$$

$$h=-\left[M^2+\frac{W}{W_0}(1-M^2)\right]\left[1+j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H\right]+2\frac{W}{W_0}(1-M^2)$$

第一种不稳定性模式为

$$\mathrm{ch}\theta=1/M,\ \mathrm{sh}\theta=(1-M^2)^{1/2}/M$$

或 $$\Omega=iM,\ \Gamma=M,\ \gamma=CkM=-Wk>0 \qquad (W<0)$$

这就是上面已经指出的，是过去文献[2,3]中没有的不稳定性模式．

下面讨论第二种不稳定性模式．可以直接证明，如果

$$j^2(\partial V/\partial P)_H<-1$$

或者 $$j^2(\partial V/\partial P)_H>1+2M$$

则下列不等式成立．

（1） $g^2-4fh>0$

它表明二次方程的两个根$\mathrm{ch}\theta$，均为实数．

（2） $|f+h|>|g|$ 且 $|h|>|f|$

它表明两实根$\mathrm{ch}\theta$的绝对值均大于1，且一个为正，一个为负．

$\mathrm{ch}\theta$大于1的正实根给出正的$\mathrm{sh}\theta$．从Ω的表达式看出，这时对应于不稳定性，而

$$\mathrm{ch}\theta=[-g\pm\sqrt{g^2-4fh}]/2f$$

（1） 当 $j^2(\partial V/\partial P)_H<-1$．

这时$f<0$，$fh<0$，故正实根为

$$\mathrm{ch}\theta=[-g-\sqrt{g^2-4fh}]/2f$$

其不稳定性增长率为

$$\Gamma=\frac{-2\sqrt{1-M^2}\cdot f}{\sqrt{2g^2-4fh-4f^2+2g\sqrt{g^2-4fh}}}$$

（2） 当 $j^2(\partial V/\partial P)_H>1+2M$

这时 $f>0$，$fh<0$ 故正实根为

$$\mathrm{ch}\theta=[-g+\sqrt{g^2-4fh}]/2f$$

其不稳定性增长率为

$$\Gamma=\frac{2\sqrt{1-M^2}\cdot f}{\sqrt{2g^2-4fh-4f^2-2g\sqrt{g^2-4fh}}}$$

不难看出，本节中的γ或Γ果然均为正实数，这是和第二节中的假定相一致的．

五、ω是复数的情形

在这一节，我们取ω为复数，但仍限于讨论激波不稳定性问题．首先证明，色散关系仍和前面一样．其次证明，发生不稳定性的参数范围也和过去一样．

我们强调讨论的是激波不稳定性，是因为在对ω的虚部假定为正实数以后，加上无限远处的边界条件，就可以证明激波前应无扰动，激波后应有一个声扰动为0．但如果讨论的是激波稳定性，情况便大不相同。

对于激波后的气流，若令

$$\theta=\theta_r+i\theta_i$$

则

$$\mathrm{ch}\theta=C_r+iC_i=\mathrm{ch}\theta_r\cos\theta_i+i\,\mathrm{sh}\theta_r\sin\theta_i$$

$$\mathrm{sh}\theta=S_r+iS_i=\mathrm{sh}\theta_r\cos\theta_i+i\,\mathrm{ch}\theta_r\sin\theta_i$$

$$\Omega=\frac{\sqrt{1-M^2}}{S_r^2+S_i^2}\cdot S_i+i\frac{\sqrt{1-M^2}}{S_r^2+S_i^2}\cdot S_r$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{l^{(1)}}{k},\ \frac{l^{(2)}}{k}\right)=\frac{1}{S_r^2+S_i^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}\cdot\mathrm{sh}\theta_r[M\cos\theta_i\pm\mathrm{ch}\theta_r]$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{l_1}{k}\right)=-\frac{1}{M}\frac{\sqrt{1-M^2}}{S_r^2+S_i^2}\cdot S_r$$

激波不稳定性的充要条件是$S_r>0$，从而$\mathrm{Im}(l_1/k)<0$。为使激波前扰动为0，激波后两个声扰动保留一个，抛弃另一个，从上面$\mathrm{Im}(l^{(1)}/k, l^{(2)}/k)$的表达式看出，方括号内的项$[M\cos\theta_i\pm\mathrm{ch}\theta_r]$恒一个为正，一个为负．保留声扰动$G$，而抛去声扰动$F$的条件是：

$$\theta_r>0$$

由$S_r>0$，有$-\pi/2<\theta_i<\pi/2$。事实上假定$\theta_r>0$，$-\pi/2<\theta_i<\pi/2$是不失普遍性的．否则，如果$\theta_r<0$，$\pi/2<\theta_i<3\pi/2$，则保留声扰动F，略去声扰动G，得到的色散关系是：

$$(M\mathrm{ch}\theta+1)(f\mathrm{ch}^2\theta-g\mathrm{ch}\theta+h)=0$$

它的解ω仍和过去一样，即

$$\mathrm{ch}\theta=-\mathrm{ch}\theta_r$$

$$\mathrm{sh}\theta=\mathrm{sh}\theta_r\cos\theta_i=-\mathrm{sh}\theta_r=\mathrm{sh}(-\theta_r),\qquad \theta_r<0$$

为了证明在作不稳定性讨论时，激波前的扰动确应为0，令

$$\frac{\omega}{C_0k}=\Omega_0=i\frac{\sqrt{M_0^2-1}}{\mathrm{ch}\varphi}$$

其中φ为复数，

$$\varphi=\varphi_r+i\varphi_i$$

$$\mathrm{ch}\varphi=\bar{C}_r+i\bar{C}_i=\mathrm{ch}\varphi_r\cdot\cos\varphi_i+i\,\mathrm{sh}\varphi_r\cdot\sin\varphi_i$$

$$\mathrm{sh}\varphi=\bar{S}_r+i\bar{S}_i=\mathrm{sh}\varphi_r\cos\varphi_i+i\,\mathrm{ch}\varphi_r\sin\varphi_i$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{l_0^{(1)}}{k},\ \frac{l_0^{(2)}}{k}\right)=\frac{1}{\bar{C}_r^2+\bar{C}_i^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{M_0^2-1}}\cos\varphi_i\cdot[\pm\sin\varphi_i-M_0\mathrm{ch}\varphi_r]$$

不稳定性的必要充分条件是：

$$\mathrm{Im}(\Omega_0)>0$$

由

$$\Omega_0=\frac{\sqrt{M_0^2-1}}{\bar{C}_r^2+\bar{C}_i^2}\cdot(\bar{C}_i+i\bar{C}_r),\quad \bar{C}_r=\mathrm{ch}\varphi_r\cos\varphi_i$$

得知，在不稳定性研究中我们总有

$$\bar{C}_r>0$$

从而

$$\mathrm{ch}\varphi_r\cos\varphi_i>0 \quad 及 \quad \cos\varphi_i>0$$

成立，此外，还有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{l_0^{(1)}}{k},\ \frac{l_0^{(2)}}{k}\right)<0$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{l_{10}}{k}\right)=-\frac{1}{M_0}\frac{\sqrt{M_0^2-1}}{\bar{C}_r^2+\bar{C}_i^2}\mathrm{ch}\varphi_r\cdot\cos\varphi_i<0$$

成立．这就是说，对于不稳定性的研究以及要求的无限远处的边界条件，结果激波前果然是没有扰动的．

因此，在ω是复数的情形，对于研究不稳定性而言，只要有

$$\theta_r>0 \qquad (-\pi/2<\theta_i<\pi/2)$$

则仍有

$$F=A_0=B_0=E_0=F_0=G_0=0$$

仿照第二、三节的做法，可以得到同样的色散关系．

$$(M\mathrm{ch}\theta-1)(f\mathrm{ch}^2\theta+g\mathrm{ch}\theta+h)=0$$

f,g,h 的表达式同前．根的表达式为：

$$\mathrm{ch}\theta=C_r+iC_i=\mathrm{ch}\theta_r\cos\theta_i+i\mathrm{sh}\theta_r\sin\theta_i$$

不难证明，在$\theta_r>0$的条件下，C_r，S_r同号，而且二者有一为0时，另一个也为 0．

下面给出一个判别法：当$j^2(\partial V/\partial P)_H$在$(-\infty,\ \infty)$中取任一实数值时，从二次方程的根判别激波的稳定和不稳定状况．

激波稳定性判别法

(1) 若两根之一满足$C_r>1$及$C_i=0$，或者$C_r>0$及$C_i\neq0$，则为不稳定性；

(2) 若不属于上述情况，当两根之一满足$C_r=1$及$C_i=0$，或者$C_r=0$及$C_i\neq0$时，则

(A) $\Gamma=0$为边缘稳定；

(B) $\Gamma=\infty$为最不稳定；

(3) 若不属于上述两种情形，则为稳定．

第一种不稳定性模式仍和过去一样：

$$\mathrm{ch}\theta=1/M \qquad (C_i=0,\ C_r>1)$$

对于chθ的二次方程，我们将$j^2(\partial V/\partial P)_H$的数轴分为一些区间．由$g^2-4fh=0$给出

$$\Delta=j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H=Q_1=-1+\frac{(1-M^2)W/W_0}{1+\sqrt{(1-M^2)(1-W/W_0)}}$$

$$\Delta=j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H=Q_2=-1+\frac{(1-M^2)W/W_0}{1-\sqrt{(1-M^2)(1-W/W_0)}}$$

我们有

$-1<Q_1<Q_2<1+2M$

当$\Delta=j^2(\partial V/\partial P)_H\in(Q_1,Q_2)$时，因$f>0$，故$g^2-4fh<0$，二次方程的解是一对共轭复根，且$C_{r+}=C_{r-}<0$，$C_i\neq 0$。由上述判据，不存在不稳定的状况。当$\Delta$在区间$(Q_1,Q_2)$以外时，二次方程有两个实根($C_i=0$)。由不稳定性的条件$\mathrm{ch}\theta>1$求出$\Delta<-1$或$\Delta>1+2M$。从而当$-1<\Delta\leqslant Q_1$及$Q_2\leqslant\Delta<1+2M$时，由上述判据，也不存在不稳定的状况。

现在讨论$\Delta=-1$附近的情况。当$(\Delta+1)\to 0^-$时，$C_{r+}\to -1/M$，而$C_{r-}\to+\infty$，后者给出$\Gamma\to 0$，相当于边缘稳定。$\Delta=-1$时只有一个根$C_r=-1/M$。

现在讨论$\Delta=1+2M$附近的情况。当$(\Delta-1-2M)\to 0^+$时，$C_{r+}\to 1^+$，$C_{r-}<-1$。前者给出$\Gamma\to+\infty$，故为不稳定性增长率最大的最不稳定点。当$\Delta=1+2M$时，$C_{r+}=1$，$C_{r-}<-1$，前者给出$\Gamma=+\infty$，故$\Delta=1+2M$为最不稳定点。

以上各种情况，综合列于表1。

表 1

$\Delta=j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H$	二次方程第一个根 $(\mathrm{ch}\theta)_+=C_{r+}+iC_{i+}$	二次方程第二个根 $(\mathrm{ch}\theta)_-=C_{r-}+iC_{i-}$	稳定情况
$\Delta<-1$	$C_{i+}=0$，$C_{r+}>1$	$C_{i-}=0$，$C_{r-}<-1$	不稳定
$(1+\Delta)\to 0^-$	$C_{i+}=0$，$C_{r+}\to -1/M$	$C_{i-}=0, C_{r-}\to\infty$，$\Gamma\to 0$	边缘稳定
$\Delta=-1$	$C_{i+}=0$　$C_{r+}=-1/M$	无	
$-1<\Delta\leqslant Q_1$	$C_{i+}=0$，$C_{r+}<1$	$C_{i-}=0$，$C_{r-}<-1$	稳　定
$Q_1<\Delta<Q_2$	$C_{i+}\neq 0$，$C_{r+}<0$	$C_{i-}\neq 0$，$C_{r+}=C_{r-}<0$	稳　定
$Q_2\leqslant\Delta<1+2M$	$C_{i+}=0$，　$C_{r+}<1$	$C_{i-}=0$，　$C_{r-}<1$	稳　定
$\Delta=1+2M$	$C_{i+}=0, C_{r+}=1$，$\Gamma=+\infty$	$C_{i-}=0$，　$C_{r-}<-1$	最不稳定
$\Delta>1+2M$	$C_{i+}=0$，$C_{r+}>1$	$C_{i-}=0$，$C_{r-}<-1$	不稳定

六、结　　论

1．本文讨论了矩形截面管道内的激波不稳定性问题，从数学上严格解决了这个问题．首先，给出了扰动方程的普遍解．激波上游和下游的普遍解分别包含5个待定常数，代表5种小扰动．其次，给出了三类边界条件．第一类边界条件是在正负无限远处($x\to\pm\infty$)，扰动物理量应当为0．我们假定只讨论不稳定激波，先令$\omega=i\gamma$，γ为不稳定性增长率，为正实数($\gamma\geqslant 0$)．由此证明了上游普遍解中的5个待定常数为0，即上游无扰动．而在下游，两个声扰

动之一应消失，即有一个待定常数为0. 第二类边界条件是在管壁上法向扰动速度为0，它规定了扰动波数所应取的一组离散值. 第三类边界条件加在扰动激波上，即为5个扰动量守恒方程. 它们用来决定激波后4个待定常数和未知的扰动激波振幅. 由此导出了色散关系.在色散方程中，正实数的γ是存在的，对应的有不稳定性判据. 对于ω是复数，其虚部为正实数的情形，我们用类似方法讨论，也得出了同样的色散方程. 方程的根和不稳定性判据也一样. 它表明，ω也是纯虚数.

2. 色散关系表明，矩形截面管道内的激波存在两种不稳定性模式. 第一种模式是新得到的，它与气体的热力学性质，如$j^2(\partial V/\partial P)_H$等无关. 不稳定性增长率$\gamma$为

$$\gamma=-W\cdot k \qquad (W<0)$$

或 $$\Gamma=M$$

它代表激波的绝对不稳定性，是一种短波不稳定性，在一定条件之下弱激波比强激波更不稳定.

第二种不稳定性模式与Дьяков[2],Swan-Fowles[3]的结果大体相同,不稳定性判据为

$$j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H<-1 \quad 或 \quad j^2\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_H>1+2M$$

从而与气体的热力学性质及流动密切相关. 本文给出其不稳定性增长率的表达式，证明了ω为纯虚数. 由此看出，它也是一种短波不稳定性. 此外本文指出，$j^2(\partial V/\partial P)_H=-1^-$为中性稳定点，而$j^2(\partial V/\partial P)_H=1+2M$为最不稳定点.

3. 一般地,第二种模式对于$j^2(\partial V/\partial P)_H$取任何实数值时的稳定与不稳定性情况,见表1.

4. 如果$a\to\infty$，$b\to\infty$，则本文的结果变成无限大激波阵面的结果. 与过去的论文[2,3]相比，本文严格地从数学上解决了无限大激波阵面的不稳定性问题，并得到两种不稳定性模式. 此外，还证明了不稳定激波波振幅随时间作指数增长，或者说ω为纯虚数. 这些和文献[1]的结果相同.

5. 与文献[1]相比，本文在几何上已从二维推广到了矩形截面管道内的三维情形. 此外，补充证明了假定ω为复数而其虚部为正实数的结果，与假定ω为纯虚数时的结果相同. 最后，对$j^2(\partial V/\partial P)_H$取任何实数值时第二种模式的稳定与不稳定情况，作了一般讨论，见表1.其中指出$j^2(\partial V/\partial P)_H=-1^-$为中性稳定点，而$j^2(\partial V/\partial P)_H=1+2M$为最不稳定点.

参 考 文 献

[1] Xu Fu, Shock wave instability, *Proc. Int. Conf. Fluid Mech.*, Beijing (1987), 243—247.

[2] Дьяков С. П., Об устойчивости ударных волн, *Ж. Э. Т. Ф.*, 27(3) (1954), 288—295.

[3] Swan, G. M. and G. R. Fowles, Shock wave stability, *Phys. Fluids*, 18 (1975), 28—35.

[4] Landau, L. D. and E. M. Lifschiz, *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley Reading M. A. (1959).

[5] 徐复，激波与小扰动波的相互作用，力学学报，14(2) (1982), 144—154.

[6] Fowles, G. R. and A. F. P. Houwing, Instabilities of shock and detonation waves, *Phys. Fluids*, 27 (1984), 1982—1990.

[7] Book, D. L., Role of the boundary conditions in the problem of the linear stability of the Sedov point blast solution, *Proc. 5th Int. Symp. Shock Waves and Shock Tubes*, D. Bershader et al. Ed. (1986), 431—437.

Instability Theory of Shock Wave in a Channel

Xu Fu Chen Le-shan

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)

Abstract

The instability theory of shock wave was extended from the case with an infinite front[1] to the case of a channel with a rectangular cross section. First, the mathematical formulation of the problem was given which included a system of disturbed equations and three kinds of boundary conditions. Then, the general solutions of the equations upstream and downstream were given and each contained five constants to be determined. Thirdly, under one boundary condition and one assumption, it was proved that all of the disturbances in front of the shock front and one of the two acoustic disturbances behind the shock front should be zero. The boundary condition was that all of the disturbed physical quantities should approach to zero at infinity. The assumption was that only the unstable shock wave was concerned here. So it was reasonable to assume $\omega=i\gamma$, γ was the instability growth rate and was a positive real number. Another kind of boundary conditions was that the normal disturbed velocities should be zero at the solid wall of the channel, and it led to the result that the wave numbers of disturbances could only be a set of discrete values. Finally, a total of five conservation equations across the disturbed shock front was the third kind of boundary conditions which was used to determine the remained four undetermined constants downstream and an undetermined constant representing the amplitude of disturbed shock front. Then a dispersion relation was derived. The results show that a posi-

tive real γ does exist, so the assumption made above is self-consistent, and there are two modes, instead of one, for unstable shock. One mode corresponds to $\gamma=-Wk(W<0)$. It is a newly discovered mode and represents an absolute instability of shock. The instability criterion derived from another mode is nearly the same as the one obtained in [2,3], in addition, its growth rate is newly derived in this paper, and on this basis, it is further pointed out that at $j^2(\partial V/\partial P)_H=1+2M$, the shock wave is most unstaale, i.e. its nondimensional growth rate $\Gamma=\infty$.

If ω is assumed to be a complex number with $\mathrm{Im}(\omega)\geqslant 0$ instead of being assumed a pure imaginary number at the beginning, it can be proved in section V that there are still two modes for the instability criteria, besides, the roots ω of the dispersion equation are still imaginary.

Key words shock wave, shock wave in a channel, instability theory of shock wave, shock wave stability