

# 轴对称变厚度扁球壳的非线性弯曲问题\*

牛 忠 荣

(合肥工业大学应用力学所, 1992年10月5日收到)

## 摘 要

基于导出的变厚度扁球壳轴对称非线性弯曲的控制方程, 引用插值矩阵法<sup>[1]</sup>数值求解. 通过算例分析表明, 本法易于实施, 精度高, 且内力与位移具有同阶的精度.

**关键词** 扁球壳 变厚度 非线性分析 插值矩阵法

## 一、引 言

扁球壳在土建、化工容器和仪表工业中有着广泛的应用. 扁球壳的大挠度问题由于其控制方程是非线性的, 求解较为复杂. 钱伟长提出的摄动法成功地求解了这个问题, 叶开沅等提出了修正迭代法<sup>[2][3]</sup>分析了等厚度轴对称扁球壳的非线性屈曲问题, 获得了良好的解析式. 但当扁球壳的厚度变化时, 解析求解是难以实现的.

本文从轴对称变厚度扁球壳的大挠度方程出发, 把非线性微分方程拟线性化 (quasi-linearization), 然后采用插值矩阵法<sup>[1]</sup>数值迭代求解线性化的常微分方程边值问题. 本法可以求解任意变厚度扁薄球壳的非线性弯曲问题, 并可跟踪扁球壳后屈曲路径.

## 二、插 值 矩 阵 法

用数值法求解常微分方程边值问题, 目前流行的是差分法, 试射法和配点法. 苏联学者 A. Φ. 斯米尔诺夫在求解梁柱问题时创建了积分矩阵法<sup>[4]</sup>, 用于求解两点边值问题. 笔者在此基础上采用分段多项式插值, 建立了插值矩阵法<sup>[1]</sup>. 下面按两个联立的混合阶常微分方程组, 介绍插值矩阵法的求解过程

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_1} g_{1i}(x)y^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{m_2} g_{2i}(x)z^{(i)}(x) &= f_1(x) \\ \sum_{i=0}^{m_1} g_{3i}(x)y^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{m_2} g_{4i}(x)z^{(i)}(x) &= f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.1a)$$

\* 何福保推荐.

本文得到机电部科学基金资助.

多点边值条件

$$\sum_{0 \leq i \leq m_1} \alpha_{ji} y^{(i)}(\xi_i) + \sum_{0 \leq i \leq m_2} \beta_{ji} z^{(i)}(\eta_i) = \gamma_j \quad (2.1b)$$

$$a \leq \xi_i, \eta_i \leq b, \quad j=0, 1, \dots, m_1, \dots, m_1+m_2$$

式中  $g_{ki}(x), f_1(x), f_2(x) \in C[a, b]$ , ( $k=1, 2, 3, 4$ ), 而  $\alpha_{ji}, \beta_{ji}, \gamma_j, \xi_i, \eta_i$  均为常量.

将求解区间  $[a, b]$  等分为  $n$  段,  $a=x_0, x_1, \dots, x_n=b$ , 令  $h=(x_i-x_{i-1})=(b-a)/n$ ,  $y_j^{(i)}, z_j^{(i)}$  为  $y^{(i)}(x_j), z^{(i)}(x_j)$  的逼近值, 使方程(2.1a)在分划点  $x_j$  上成立, 有

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_1} G_{1i} Y^{(i)} + \sum_{i=0}^{m_2} G_{2i} Z^{(i)} &= F_1 \\ \sum_{i=0}^{m_1} G_{3i} Y^{(i)} + \sum_{i=0}^{m_2} G_{4i} Z^{(i)} &= F_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中

$$G_{ki} = \text{diag}(g_{ki}(x_0), g_{ki}(x_1), \dots, g_{ki}(x_n)) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$F_l = (f_l(x_0) \quad f_l(x_1) \quad \dots \quad f_l(x_n))^T \quad (l=1, 2)$$

$$Y^{(i)} = (y^{(i)}(x_0) \quad y^{(i)}(x_1) \quad \dots \quad y^{(i)}(x_n))^T$$

$$Z^{(i)} = (z^{(i)}(x_0) \quad z^{(i)}(x_1) \quad \dots \quad z^{(i)}(x_n))^T$$

A. Φ. 斯米尔诺夫从下式出发, 用  $k$  阶导数值来表示  $k-1$  阶导数值

$$y^{(k-1)}(x_j) - y^{(k-1)}(x_0) = \int_{x_0}^{x_j} y^{(k)}(x) dx \quad (k=1, \dots, m_1, j=0, 1, \dots, n) \quad (2.3)$$

式中的  $y^{(k)}(x)$  可用插值函数逼近

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n y^{(k)}(x_i) l_i(x) + O(h^p) \quad (2.4)$$

$l_i(x)$  为基函数, 舍去余项, 将上式代入(2.3), 可得

$$y^{(k-1)}(x_j) - y^{(k-1)}(x_0) = \sum_{i=0}^n y^{(k)}(x_i) \omega_{ji} \quad (2.5)$$

其中  $\omega_{ji} = \int_{x_0}^{x_j} l_i(x) dx$ . 引入积分矩阵

$$D = [\omega_{ji}]_{(n+1) \times (n+1)} \quad (i, j=0, 1, \dots, n) \quad (2.6)$$

及符号

$$Y_0 = (y(x_0) \quad y'(x_0) \quad \dots \quad y^{(m_1-1)}(x_0))^T, \\ (\sigma = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T)$$

则(2.5)可写成

$$Y^{(k-1)} = y^{(k-1)}(x_0) \sigma + D Y^{(k)} \quad (2.7)$$

逐步递推, 可得

$$Y^{(i)} = P_{1i} Y_0 + D^{m_1-i} Y^{(m_1)} \quad (i=0, 1, \dots, m_1-1) \quad (2.8)$$

式中  $P_{1i} = [0, \dots, 0, \sigma, D\sigma, \dots, D^{m_1-i-1}\sigma]_{(n+1) \times m_1}$ . 同理有

$$Z^{(i)} = P_{2i} Z_0 + D^{m_2-i} Z^{(m_2)} \quad (i=0, 1, \dots, m_2-1) \quad (2.9)$$

将(2.8), (2.9)代入(2.2), 得

$$\left. \begin{aligned} E_y^{11}Y_0 + E_y^{12}Y^{(m_1)} + E_z^{11}Z_0 + E_z^{12}Z^{(m_2)} &\doteq F_1 \\ E_y^{21}Y_0 + E_y^{22}Y^{(m_1)} + E_z^{21}Z_0 + E_z^{22}Z^{(m_2)} &\doteq F_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} E_y^{11} &= \sum_{i=0}^{m_1-1} G_{1i} P_{1i}, & E_z^{12} &= \sum_{i=0}^{m_1} G_{1i} D^{m_1-i}, \\ E_z^{11} &= \sum_{i=0}^{m_2-1} G_{2i} P_{2i}, & E_z^{12} &= \sum_{i=0}^{m_2} G_{2i} D^{m_2-i}, \\ E_y^{21} &= \sum_{i=0}^{m_1-1} G_{3i} P_{1i}, & E_y^{22} &= \sum_{i=0}^{m_1} G_{3i} D^{m_1-i}, \\ E_z^{21} &= \sum_{i=0}^{m_2-1} G_{4i} P_{2i}, & E_z^{22} &= \sum_{i=0}^{m_2} G_{4i} D^{m_2-i}, \end{aligned} \right\}$$

将(2.8), (2.9)代入(2.1b), 有

$$F_y^1 Y_0 + F_y^1 Y^{(m_1)} + F_z^1 Z_0 + F_z^1 Z^{(m_2)} = \gamma \quad (2.11)$$

$\gamma = (\gamma_1 \cdots \gamma_{m_1+m_2})^T$ ,  $F_y^1$ ,  $F_y^1$ ,  $F_z^1$ ,  $F_z^1$  依据  $\alpha_{ji}$ ,  $\beta_{ji}$  和  $D$ ,  $P_{1i}$ ,  $P_{2i}$  算得, 合并(2.10), (2.11), 则有

$$\begin{pmatrix} F_y^1 & F_z^1 & F_y^1 & F_z^1 \\ E_y^{11} & E_z^{11} & E_y^{12} & E_z^{12} \\ E_y^{21} & E_z^{21} & E_y^{22} & E_z^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_0 \\ Z_0 \\ Y^{(m_1)} \\ Z^{(m_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

从上式解出  $Y_0$ ,  $Z_0$ ,  $Y^{(m_1)}$ ,  $Z^{(m_2)}$ , 再代入(2.9), (2.8)得各低阶导数值.

方程(2.12)中的系数矩阵形成依赖于  $D$  阵, 插值矩阵法<sup>[1]</sup>在(2.4)中采用分段多项式插值,  $D$  矩阵易于形成. 文[1]给出任意等分点数下的分段抛物线插值的积分矩阵  $D$ , 编制了通用子程序 IVBS2, 用于求解(2.1). 可以证明, 插值矩阵法同时求出的各阶导数值有同阶精度.

### 三、微分方程的拟线性化

对于非线性微方程边值问题, 用 Newton 法将其线性化<sup>[5],[6]</sup>, 然后用插值矩阵法求解线性边值问题. 设非线性两点边值问题为

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x)) = 0 \quad (x \in [0, 1]) \quad (3.1a)$$

边值条件

$$B(u(0), u(1)) = 0 \quad (3.1b)$$

这里  $u(x) = (y(x) \ y'(x) \ \cdots \ y^{(m-1)}(x))$ . 用 Newton 法将其非线性微分算子线性化, 得到相对应的拟线性方程

$$f(x, \bar{u}_k(x)) + \frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(x, \bar{u}_k(x)) (\bar{u}_{k+1}(x) - \bar{u}_k(x)) = 0 \quad (3.2a)$$

和边值条件

$$\mathbf{B}(u_k(0), u_k(1)) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \bar{u}(0)} (u_{k+1}(0) - u_k(0)) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \bar{u}(1)} (u_{k+1}(1) - u_k(1)) = 0 \quad (3.2b)$$

式中  $\bar{u}(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(m)}(x))$ ,  $\partial f/\partial u$  为  $m+1$  阶向量函数,  $\partial \mathbf{B}/\partial u(0)$ ,  $\partial \mathbf{B}/\partial u(1)$  为  $m \times m$  阶数量矩阵. 非线性边值问题(3.1)转化为求解线性问题(3.2), 首先假定一组初值  $u_0(x)$ , 序列求解  $\bar{u}_1(x)$ ,  $\bar{u}_2(x), \dots$ , 逐步逼近真解  $\bar{u}(x)$ . 使用插值矩阵法迭代求解(3.2)时, 计算第  $k$  次迭代的最大相对误差为

$$\Delta_k = \max_{i,j} \frac{|y_k^{(j)}(x_i) - y_{k-1}^{(j)}(x_i)|}{\max(\varepsilon, |y_k^{(j)}(x_i)|)} \quad (i=0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m) \quad (3.3)$$

式中  $\varepsilon$  为正的小量  $0 < \varepsilon \leq 1$ , 设置允许误差  $\tau$ , 当  $\Delta_k \leq \tau$  时, 则停止迭代, 输出最终结果  $\bar{u}_k(x)$ . 对于求解联立的非线性微分方程组, 方法同上.

### 四、变厚度扁球壳的大挠度方程

轴对称变厚度圆形扁薄球壳受法向和径向荷载  $q_n(r)$ ,  $q_t(r)$  的作用, 壳中的内力方向见图2, 用  $w$ ,  $u$  表示壳体的法向和径向位移,  $N_1, N_2$  为径向和环向薄膜力,  $M_1, M_2$  为径向和环向弯矩,  $Q, \psi$  为横截面剪力和转角.

这里选择  $W$  和  $rN_1$  作为壳体弯曲问题控制方程的基本未知函数, 根据壳体的几何、平

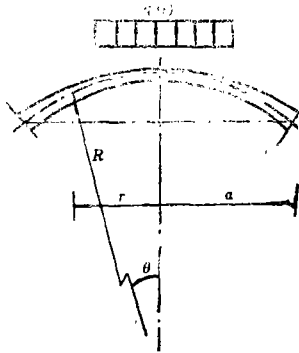


图 1

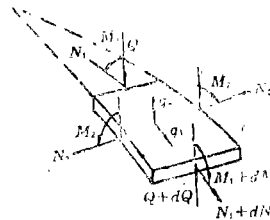


图 2

衡、物理三方面方程, 推导得变厚扁球壳的非线性轴对称弯曲的控制方程

$$r\tilde{N}_1'' + \left(1 - \frac{t'}{t}r\right)\tilde{N}_1' - \left(\frac{1}{r} - \frac{t'}{t}\mu\right)\tilde{N}_1 + (2+\mu)r q_1 + r^2 q_1' - \frac{t'}{t}r^2 q_1 - Et \left[ \frac{r}{R} W' - \frac{1}{2} (W')^2 \right] = 0 \quad (4.1)$$

$$D \left\{ rW^{(4)} + \left(2+r \frac{6t'}{t}\right)W'''' + \left[ 3r \frac{t''}{t} + 6r \left(\frac{t'}{t}\right)^2 - \frac{1}{r} + (6+3\mu) \frac{t'}{t} \right] W'' + \left[ 3\mu \frac{t''}{t} + \frac{1}{r^2} - \frac{3t'}{rt} + 6\mu \frac{t'^2}{t^2} \right] W' \right\} + \frac{\tilde{N}_1}{R} + \frac{r}{R} \tilde{N}_1' - \frac{d}{dr} \left( \tilde{N}_1 \frac{dW}{dr} \right) + \frac{r^2}{R} q_1 - r q_n = 0 \quad (r \in [0, a]) \quad (4.2)$$

式中  $(\cdot)' = d(\cdot)/dr$ ,  $\tilde{N}_1 = rN_1$ ,  $t(r)$  为壳的厚度,  $E$  为弹性模量,  $\mu$  为泊桑比,  $D$  为抗弯刚度,  $D = Et^3/12(1-\mu^2)$ .

由(4.1)(4.2)求出  $W, \tilde{N}_1$  后, 可得

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{Et} (r\tilde{N}_1'' - r^2 q_1 - \mu\tilde{N}_1) - \frac{r}{R} W \\
 \psi &= -dW/dr \\
 M_1 &= -D \left( \frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dW}{dr} \right), M_2 = -D \left( \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \mu \frac{d^2 W}{dr^2} \right) \\
 rQ &= -DrW''' - (D + rD')W'' - \left( \mu D' - \frac{D}{r} \right) W'
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

扁球壳的边界条件

$$1^\circ \text{ 固支边: } W=0, \psi=0, u=0 \quad (4.4a)$$

$$2^\circ \text{ 简支边: } W=0, M_1=0, u=0 \quad (4.4b)$$

$$3^\circ \text{ 自由边: } N_1=0, Q=0, M_1=0 \quad (4.4c)$$

4° 壳顶封闭 (无孔):

$$\psi=0, Q=0, u=0 \quad (4.4d)$$

## 五、算 例

受均布法载荷  $q_0$  作用的圆底扁球壳, 边缘固支, 见图 1,  $\mu=0.3$ , 壳厚  $t(r) = t_0 \exp\left[-\frac{\beta r^2}{6a^2}\right]$ ,  $t_0$  为壳顶厚度. 物理参数的无因次变换

$$r = a\xi, \delta = W/t_0, S = a\tilde{N}_1/D_0 \quad (5.1)$$

$$K = \frac{a^2}{Rt_0} \sqrt{12(1-\mu^2)}, D_0 = \frac{Et_0^2}{12(1-\mu^2)}, G = \frac{a^4 q_0}{Et_0^4} \quad (5.2)$$

并令  $f(\xi) = \exp\left[-\frac{\beta}{6}\xi^2\right]$ , 代入控制方程 (4.1) (4.2), 得

$$\begin{aligned}
 \xi S'' + \left(1 + \frac{\beta}{2}\xi^2\right) S' - \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\beta}{3}\mu\xi\right) S - 12(1-\mu^2) \frac{a^2}{Rt_0^2} \xi f \delta' \\
 + 6(1-\mu^2) f(\delta')^2 = 0
 \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned}
 \xi f^3 \delta^{(4)} + 2f^3(1-\beta\xi^2) \delta''' + f^3 \left[ \beta^2 \xi^3 - \frac{1}{\xi} - (3+\mu)\beta\xi \right] \delta'' \\
 + f^3 \left[ \mu B^2 \xi^2 + \frac{1}{\xi^2} + (1-\mu)\beta \right] \delta' + \frac{a^2}{Rt_0} (S + \xi S') - \frac{d}{d\xi} (K \delta') \\
 = 12(1-\mu^2) G \xi \quad (\xi \in [0, 1])
 \end{aligned} \quad (5.3b)$$

边值条件取用 (4.4a), (4.4d)

1°  $\xi=1$  为固支边

$$\delta=0, \delta'=0, S' - \mu S - 12(1-\mu^2) \frac{a^2}{Rt_0} \exp\left[-\frac{\beta}{6}\right] \delta = 0 \quad (5.4a)$$

2°  $\xi=0$  为闭顶条件

$$\delta'=0, \delta'''=0, S=0 \quad (5.4b)$$

方程 (5.3) (5.4) 是非线性两点边值问题, 这里辅用连续法 (continuation)<sup>[8]</sup>, 把壳顶处 ( $\xi=0$ ) 的位移  $W$  作为连续求解的给定参数, 求出此状态下壳体中各点的位移、内力和载荷参数  $G$ . 现采用插值矩阵法求解, 先用 Newton 法将其线性化为线性边值问题. 迭代初值取为零. 本文对  $k=26$  情形给出计算结果分析

1° 本法给出了壳厚度变化参数 $\beta = -2, 0, 2$ 三种情形的计算结果, 跟踪了三种形状下壳体的后屈曲路径, 见表1~3, 表中 $n$ 为区间等分段数,  $N_1, M_1, Q$ 为壳边缘为值, 图3给出了荷载-挠度曲线, 比较该三种情况, 其中 $\beta = 2$ 是厚度最薄的扁球壳, 可它的上临界荷载却最大,  $G_c = 54.9751$ , 见表4. 由图4,  $\beta = 2$ 的临界状态挠曲可以看出, 壳顶处的挠度并非最大, 它随载荷 $q_0$ 的增加, 最大挠度的位置逐渐远离壳顶. 图4显示了三种临界状态下整个壳体挠曲程度.

2° 对非线性算子的迭代, 取 $\Delta_k < 10^{-7}$ , 一般需1~5次迭代即可. 将 $n = 20$ 和 $n = 40$ 的结果及文[7][8]的计算作比较, 可见本法收敛快, 获得的荷载和内力值精度很高.

3° 比较三种形状下壳体的内力(应力),  $\beta = 2$ 形状的内力变化梯度最大,  $\beta = -2$ 形状的内力变化较为平缓. 接续优化处理, 可确定外载作用下壳体最佳的厚度变化形式.

### 六、结 语

文中使用的插值矩阵法是对常微分方程组求解的, 因而本法可拓宽到任意变厚度轴对称

表 1  $\beta = 0, k = 26$

$W(0)$ $t_0$	$-q_0 a^4 / Et_0^4$				$N_1 \frac{100a^2}{Et_0^3}$	$M_1 \frac{100a^2}{Et_0^4}$	$Q \frac{100a^2}{Et_0^4}$
	文[7]	文[8]	$n=20$	$n=40$	$n=40$	$n=40$	$n=40$
0.2	18.97	18.97	18.958	18.958	-95.493	30.822	196.57
0.4	33.62	33.62	33.588	33.587	-177.735	52.040	280.96
0.6	43.25	43.25	43.196	43.196	-239.157	61.743	278.10
0.8	47.19	47.15	47.099	47.099	-269.508	59.524	234.46
1.0	46.47	46.40	46.379	46.380	-270.744	49.706	188.81
1.2	43.73	43.65	43.645	43.648	-259.287	37.857	142.33
1.4	40.65	40.57	40.585	40.589	-246.496	26.492	90.02
1.6	37.84	37.77	37.786	37.789	-236.046	16.217	32.26
1.8	35.43	35.35	35.377	35.380	-228.577	7.066	-29.46
2.0	33.39	33.32	33.345	33.347	-223.880	-1.049	-94.14

注: 文[8]的结果是球壳理论

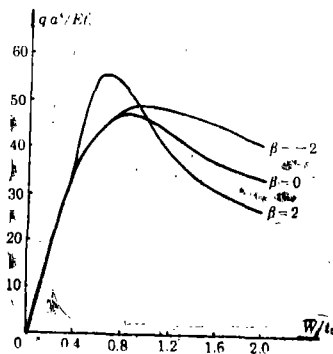


图3  $\bar{W}-G$ 曲线

球壳以及旋转壳的非线性力学分析. 获得的内力与位移一般有同阶的收敛速度, 也为板壳的优化设计提供了便利.

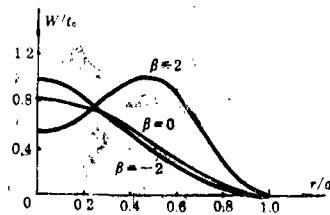


图4 临界状态挠曲线

表 2

 $\beta = -2, k = 26$ 

$-\frac{W(0)}{t_0}$	$-q_0 a^4 / Et_0^4$		$N_1 \frac{100a^2}{Et_0^3}$	$M_1 \frac{100a^2}{Et_0^4}$		$Q \frac{100a^3}{Et_0^4}$
	$n=20$	$n=40$	$n=40$	$n=20$	$n=40$	$n=40$
0.2	19.363	19.363	-90.803	45.960	45.960	253.73
0.4	33.750	33.750	-165.24	76.939	76.939	387.40
0.6	43.125	43.126	-219.85	92.577	92.579	426.49
0.8	47.862	47.864	-252.93	94.543	94.552	403.19
1.0	49.031	49.036	-267.47	87.051	87.072	347.36
1.2	48.108	48.115	-270.51	75.068	75.103	277.38
1.6	44.326	44.335	-266.16	49.892	49.943	122.66
2.0	40.838	40.846	-264.40	29.939	29.997	-38.00

表 3

 $\beta = 2, k = 26$ 

$-\frac{W(0)}{t_0}$	$-q_0 \frac{a^4}{Et_0^4}$	$N_1 \frac{100a^2}{Et_0^3}$		$M_1 \frac{100a^2}{Et_0^4}$	$Q \frac{100a^3}{Et_0^4}$	
	$n=40$	$n=20$	$n=40$	$n=40$	$n=20$	$n=40$
0.2	19.086	-102.08	-102.08	21.339	151.15	151.15
0.4	36.455	-210.17	-210.14	39.170	169.32	169.36
0.6	54.866	-416.23	-416.93	48.228	-530.84	-537.06
0.8	54.055	-415.86	-416.52	21.609	-568.23	-574.91
1.0	47.266	-299.65	-299.65	27.694	5.658	5.680
1.2	39.892	-245.99	-245.97	17.965	59.256	59.293
1.6	31.721	-200.44	-200.43	2.063	9.066	9.120
2.0	26.700	-179.84	-179.83	-10.506	-79.923	-79.841

表 4

临界状态,  $k = 26$ 

$\beta$	$-q_0 \frac{a^4}{Et_0^4}$	$-\frac{W(0)}{t_0}$	$N_1 \frac{100a^2}{Et_0^3}$	$M_1 \frac{100a^2}{Et_0^4}$	$Q \frac{100a^3}{Et_0^4}$
-2	49.0391	0.989	-267.038	87.6412	350.914
0	47.2548	0.854	-272.112	57.3500	221.777
2	54.9751	0.571	-407.020	51.7111	-453.671

致谢 笔者非常感谢何福保教授审阅并修改了本文初稿。

## 参 考 文 献

- [1] 牛忠荣, 两点边值问题的一个新方法——插值矩阵法, 合肥工业大学学报, 9(9)(1987), 92—102.
- [2] 叶开沅, 刘人怀等, 圆底扁薄球壳的非线性稳定问题(I, II), 科学通报, 2(1965), 142—147.
- [3] 刘人怀, 在内边缘均布力矩作用下中心开孔圆底扁球壳的非线性稳定问题, 科学通报, 3(1965), 253—255.
- [4] 斯米尔诺夫 A·Φ·, 《结构的振动和稳定性》(楼志文译), 科学出版社, 北京, 1963
- [5] Cash J. R., On the numerical integration of nonlinear two point boundary value problems using iterated deferred corrections, *SIAM J. Numerical Analysis*, 25(4)(1988), 862—882.
- [6] Daniel J. W. A road map of methods for approximating solutions of two point boundary value problems, *Lecture Notes in Computer Science*, 76(1978), 1—18.
- [7] 严圣平, 扁球壳在均布压力作用下的非线性弯曲问题, 应用力学学报, 5(3)(1988), 21—29.
- [8] 高建岭, 结构分析的有限元线法, 清华大学博士论文, (1990).
- [9] 肖凡, 变厚度扁球壳的非线性分析, 工程力学, 7(1)(1990), 8—17.

## Nonlinear Bending of the Shallow Spherical Shells with Variable Thickness under Axisymmetrical Loads

Niu Zhong-rong

*(Institute of Applied Mechanics, Hefei University of Technology, Hefei)*

### Abstract

Based on the differential equation of the nonlinear bending of shallow spherical shells with variable thickness under axisymmetrical loads, this paper studies the numerical solution of the nonlinear differential equation by means of interpolating matrix method. The analysis of the results indicates that the suggested method is easy to implement and obtains the same high accuracy for both the displacements and the internal forces.

**Key words** shallow spherical shell, variable thickness, nonlinear analysis, interpolating matrix method