应用数学和力学，第14卷 第11期（1993年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

用凯里-克莱因参数计算载体姿态的新方法*

董秋泉

（西北工业大学，1990年3月27日收到）

摘　要

本文用凯里-克莱因参数的新矩阵来表示刚体连续几个有限转动的合成，导出这种矩阵乘法可易性的一般规则，并用此法简便地证明了刚体有限转动定理。文中所得结论简明、易记，对计算载体姿态具有实用价值。

关键词　凯里-克莱因参数　刚体　有限转动　载体姿态

一、引　言

用矩阵

$$[K]=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

表示刚体由方位$I(Oxyz)$转到方位$I'(Ox'y'z')$的坐标变换矩阵，式中α，β，$-\beta^*=\gamma$，$\alpha^*=\delta$称为凯里-克莱因参数，且满足$a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

在计算刚体连继几个有限转动的合成转动时，其转动顺序不可交换，因此矩阵乘法$[K_1][K_2]$是不可易的，这就给计算载体姿态带来了不便．文献[1]较成功地引进了四元数矩阵乘法，文献[2]应用了文献[1]的四元数矩阵证明四元数矩阵乘法的可易性，而文献[3]则应用四元数理论证明了刚体多次有限转动合成的可交换性定理．本文将引进凯里-克莱因参数的一种新的矩阵形式，并导出这种矩阵乘法可易性的一般规则，这些规则简明、易记，且便于计算机运算．

二、凯里-克莱因参数新的矩阵形式

将代表n个连继有限转动及其合成转动的凯里-克莱因参数分别写成列阵

$$\{K_i\}=[\alpha_i\ \beta_i\ -\beta_i^*\ \alpha_i^*]^T \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐．国家自然科学基金助课题的子题．
该文曾收进国际一般力学会议论文集(1991)．

和

$$\{K\}=[\alpha\ \beta\ -\beta^*\ \beta^*]^T \tag{2.2}$$

设$n=2$，则$[K]=[K_1][K_2]$，将这个关系式写成二种形式的矩阵相乘

$$\{K\}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & \beta_1 & 0\\ 0 & \alpha_1 & 0 & \beta_1\\ -\beta_1^* & 0 & \alpha_1^* & 0\\ 0 & -\beta_1^* & 0 & \alpha_1'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ -\beta_2^*\\ \alpha_2^*\end{bmatrix}=M(1)\{K_2\} \tag{2.3}$$

和

$$\{K\}=\begin{bmatrix}\alpha_2 & -\beta_2^* & 0 & 0\\ \beta_2 & \alpha_2^* & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2^*\\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ -\beta_1^*\\ \alpha_1^*\end{bmatrix}=M(2)^+\{K_1\} \tag{2.4}$$

比较式 (2.3) 和(2.4)，便得

$$\{K\}=M(1)\{K_2\}=K(2)^+\{K_1\} \tag{2.5}$$

从矩阵$M(1)$和$M(\mathbf{2})^+$的表达式可知：

1. 矩阵$M(1)$和$M(2)^+$的行列式均不于零，这意味着它们都是满秩的.
2. 异名矩阵（一个带＋号，另一个不带＋号）其顺序可以交换，即

$$\left.\begin{aligned}M(2)M(1)^+&=M(1)^+M(2)\\ M(2)^+M(1)&=M(1)M(2)^+\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

三、凯里-克莱因参数新矩阵乘法的可易性

如$n=2$，从式 (2.5) 可知，它们相乘的顺序可以互易，即

$$M(1)\{K_2\}=M(2)^+\{K_1\} \tag{2.5$'$}$$

$M(2)^+$和$M(1)$的结构不同，这种可易性称为形式可易.

如$n=3$，则

$$[K]=[K_1][K_2][K_3] \tag{3.1}$$

取结合式$[K]=[[K_1][K_2]][K_3]$，则

$$\{K\}=M(3)^+M(1)\{K_2\}=M(3)^+M(2)^+\{K_1\} \tag{3.2}$$

取结合式$[K]=[K_1][[K_2][K_3]]$，则

$$\{K\}=M(1)M(2)\{K_3\}=M(1)M(3)^+\{K_2\} \tag{3.3}$$

联立式 (3.2) 和 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}\{K\}&=M(1)M(2)\{K_3\}=M(1)M(3)^+\{K_2\}\\ &=M(3)^+M(2)^+\{K_1\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

如$n=4$，则

$$[K]=[K_1][K_2][K_3][K_4] \tag{3.5}$$

分别取结合式

$$[K]=[[K_1][K_2][K_3]][K_4]$$

和

$$[K]=[K_1][[K_2][K_3][K_4]]$$

并考虑到关系式（3.4）可得

$$\{K\}=M(1)M(2)M(3)\{K_4\}=M(1)M(2)M(4)^+\{K_3\}$$
$$=M(4)^+M(1)M(3)^+\{K_2\}=M(4)^+M(3)^+M(2)^+\{K_1\} \qquad (3.6)$$

综合上述，可得下列互易的一般规则：

1．相邻两个异名矩阵，其乘积顺序可以交换，即

$$M(l)M(m)^+=M(m)^+M(l) \qquad (3.7)$$

2．与列阵$\{K_m\}$相邻的矩阵$M(l)$或$M(l)^+$，要进行l与m互易时，必须同时改变M的名称(带＋号时改为不带＋号，不带＋号时改为带＋号)，即

$$\left.\begin{aligned}M(l)^+\{K_m\}=M(m)\{K_l\}\\ M(l)\{K_m\}=M(m)^+\{K_l\}\end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

3．$\{K\}$的任意形式总可以由基本形式

$$\{K\}=M(1)M(2)\cdots M(n-1)\{K_n\} \qquad (3.9)$$

根据互易规则（3.8）和（3.9）而得到．

这些规则对于刚体任意个连续有限转动的合成都是正确的．

四、用凯里-克莱因参数新矩阵证明刚体有限转动定理

设刚体绕过定点O的相交轴作两次连续转动

$$\left.\begin{aligned}\{K_1\}=[\alpha_1\ \ \beta_2\ \ -\beta_1^*\ \ \alpha_1^*]^T\\ \{K_2\}=[\alpha_2\ \ \beta_2\ \ -\beta_2^*\ \ \alpha_2^*]^T\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

其顺序合成和逆序合成转动可分别写成

$$\left.\begin{aligned}\{K\}=M(1)\{K_2\}=M(2)^+\{K_1\}\\ \{K'\}=M(2)\{K_1\}=M(1)^+\{K_2\}\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

上述两个有限转动合成结果的差异用$\{\Delta K\}=\{K'-K\}$表示

$$\{\Delta K\}=[M(2)-M(2)^+]\{K_1\} \qquad (4.3)$$

将式(1.1)、(2.2)～(2.4)代入上式，即得

$$\begin{pmatrix}\Delta a+i\Delta b\\ \Delta c+i\Delta d\\ -\Delta c+i\Delta d\\ \Delta a-i\Delta b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \beta_2^* & \beta_2 & 0\\ -\beta_2 & \alpha_2-\alpha_2^* & 0 & \beta_2\\ -\beta_2^* & 0 & \alpha_2^*-\alpha_2 & \beta_2^*\\ 0 & -\beta_2^* & -\beta_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ -\beta_1^*\\ \alpha_1^*\end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

将$\alpha_l=a_l+ib_l$，$\beta_l=c_l+id_l$，$\beta_l^*=c_l-id_l$，$\alpha_l^*=a_l-ib_l\,(l=1,\ 2)$代入下式，得

$$\left.\begin{aligned}\Delta a=0,\ \Delta b=2(c_2d_1-c_1d_2)\\ \Delta c=2(d_2b_1-d_1b_2),\ \Delta d=2(b_2c_1-b_2c_2)\end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

由$\Delta a=0$可知，合成转动的数值a，a'与转动的顺序无关；Δb，Δc，Δd表示两个合成转动转轴位置的单位矢三个分量差，且不同时为零，说明转轴的位置、刚体的最终姿态均与连续转动的顺序有关．所以刚体有限转动定理得证．

用此法证明比文献[4]用欧拉参数法证明简便得多．

五、算 例

假设x_1，x_2，x_3为刚体三根互相垂直的轴，三个连续转动顺序绕轴x_3，x_2，x_1转过90°，这时

$$a_1=\cos\frac{\pi}{4},\quad b_1=\sin\frac{\pi}{4},\quad a_1=0,\quad d_1=0;$$

$$a_2=\cos\frac{\pi}{4},\quad b_2=0,\quad c_2=\sin\frac{\pi}{4},\quad d_2=0;$$

$$a_3=\cos\frac{\pi}{4},\quad b_3=0,\quad c_3=0,\quad d_3=\sin\frac{\pi}{4}.$$

$$\alpha_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad \beta_1=0,\quad \beta_1^*=0,\quad \alpha_1^*=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i);$$

$$\alpha_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \beta_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \beta_2^*=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \alpha_2^*=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha_3=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \beta_3=i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \beta_3^*=-i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \alpha_3^*=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

根据α_i，β_i，β_i^*，α_i^* $(i=1,2,3)$ 的数值，即可求得

$$\{K_1\}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\quad 0\quad 0\quad \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]^T,$$

$$\{K_2\}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T,$$

$$\{K_3\}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\quad i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^T;$$

$$M(1)^+=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\end{bmatrix},$$

$$M(2)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},\quad M(2)^+=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

$$M(3)=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

由该连续转动的顺序可将式 (3.4) 写成

$$\{K\}=M(3)M(2)\{K_1\}=M(3)M(1)^+\{K_2\}=M(1)^+M(2)^+\{K_3\}.$$

将$\{K_i\}(i=1,2,3)$，$M(1)^+$，$M(2)$，$M(2)^+$，$M(3)$ 代入上式，并分别算出连等式的各组成部分，得

$$M(3)M(2)\{K_1\}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^T,$$

$$M(3)M(1)^+\{K_2\}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^T,$$

$$M(1)^+M(2)^+\{K_3\}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}^T.$$

这是我们所预想的结果，所以该合成转动为

$$\{K\}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

它恰好表示绕x_2轴旋转90°.

如果用$[K]=[K_3][K_2][K_1]$直接运算，也可以得到同样的结果.

考 参 文 献

[1] Ickes, B. P., A new method for performing digital control system aittitude computation using quaternios, *AIAA.*, 8(1)(1970).

[2] 肖尚彬，四元数矩乘法及其可易性，力学学报，16(2)(1984)，150—166.

[3] 张光枢，刚体有限转动合成的可交换性，力学学报，4(1982)，361—368.

[4] Beggs, J. S., Pestel's theorem on finite rotions, ACTA, *Mechanica*, 20 (1974), 1—2.

A New Method for Calculating Vehicle Attitude Using Cayley-Klein Parameters

Dong Qiu-quan

(*Northwesterm Polytechnical University, Xi'an*)

Abstract

In this paper new matrices of the Cayley-Klein parameters are used to represent composition of several consecutive finite rctations of rigid body. The general commutative rules of multiplication for these matrices is obtained. Furthermore, by using these matric it is convenient to prove the theorem on finite rotation of rigid body. The result obtained in this paper is concise and easy to remember, and can be used to calculate vehicle attitude.

Key words Cayley-klein parameters, rigid body, finite ronation, vehicle attitude