应用数学和力学，第14卷 第11期（1993年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Z_n-等变的奇点理论*

何国威　　方　同

（中科院力学所开放实验室）（西北工业大学振动中心）

（李家春推荐，1992年11月9日收到）

摘　要

本文详细讨论了Z_n-等变奇点理论的基本概念，范式和万有开折的求法，并具体给出了非退化情况下Z_3-等变奇点的范式和万有开折．它们为研究周期参数激励系统的亚谐分叉提供了一种方法．

关键词　Z_n-等变　奇点　共振分叉　参激系统

一、引　言

参数激励系统是工程中的一类重要问题．它的控制方程，例如Mathieu方程，就是周期非自治系统．在讨论该系统的亚谐共振分叉时，结合它的时间对称性进行Liapunov-Schmidt约化[1]，就得到Z_n-等变的代数分叉方程．为分析该分叉问题，必须建立Z_n-等变的奇点理论．

虽然利用奇点理论讨论分叉问题已有一段时间，但利用对称奇点理论还是最近的事，甚至对称奇点理论本身仍处于发展之中．Sattinger[2]首先讨论了这个问题，后来Golubitsky[1]完整地给出了紧李群作用下奇点理论的一般结果，他的重点放在紧李群为$O(2)$，$SO(2)$，$Z_2\oplus Z_2$，D_n的情况．Buzano[3]在讨论直杆屈曲问题时更具体给出了二面体群D_n-等变奇点的范式和万有开折．本文讨论循环群Z_n作用下的奇点理论，其中第二节讨论复域上Z_n-等变映射，第三节讨论Z_n-等变奇点的一些基本概论，第四节以$n=3$为例给出了具体的结果，最后一节给出了进一步研究和应用的说明．

二、Zn-等变映射

设有循环群，$Z_n=\left\{\exp\left[i\dfrac{2k\pi}{n}\right],\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\right\}$，它按标准作用在复域$C$上：

* 国家自然科学基金资助项目．

$$\exp\left[i\frac{2\pi}{n}\right]\cdot z=z\exp\left[\frac{2\pi}{n}\right]\qquad(z\in C).$$

而$g(z,\ \lambda)$：$C\times R\to C$是无限光滑的映射，满足

(i) g关于z是Z_n-等变的，即

$$g\left(\exp\left[i\frac{2\pi}{n}\right]z,\ \lambda\right)=\exp\left[i\frac{2\pi}{n}\right]g(z,\ \lambda).$$

(ii) g以 $(0,\ 0)$ 为奇点，即

$$g(0,\ 0)=0,\ (dg)_{(0,0)}=0.$$

本节讨论Z_n-等变映射的一般形式．由于λ是分叉参数，在讨论等变性质时不起作用，故暂时予以省略．

定理2.1 Z_n-不变的复值多项式构成复域C上的环$e_C(Z_n)=\{f(u,v,w),\ f$是关于$u,\ v,\ w$的复系数多项式$\}$，其中$u=z\bar{z}$，$v=z^n+\bar{z}^n$，$w=i(z^n-\bar{z}^n)$是生成元．

证明 设有关于z，$\bar{z}$的多项式$f(z,\ \bar{z})=\sum\limits_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}z^\alpha\bar{z}^\beta$，据$Z_n$-不变性，

$$f\left(\exp\left[i\frac{2\pi}{n}\right]z,\exp\left[-i\frac{2\pi}{n}\right]\bar{z}\right)=f(z,\ \bar{z}),\text{ 就有：}$$

$$\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}z^\alpha\bar{z}^\beta\left[\exp\left[i\frac{2\pi}{n}(\alpha-\beta)\right]-1\right]=0$$

欲$a_{\alpha\beta}\neq0$，只能$\alpha-\beta=\pm kn$，那么，

$$f(z,\ \bar{z})=\sum_{k,\beta}a_{\beta+kn,\beta}(z\bar{z})^\beta z^{kn}+\sum_{\alpha,k}a_{\alpha,\alpha+kn}(z\bar{z})^\alpha(\bar{z})^{kn}$$

注意到：

$$z^{kn}=(z^n)^k,\ z^n=\frac{1}{2}(v-iw)$$

所以u，v，w是f在C上的一组生成元．

下面先叙述引理，再证明Z_n-不变的实值多项式的一般形式．

引理2.1[1] 设紧李群Γ按标准作用在C上，如果N_1，…，N_k是C上复的Γ-不变多项式环的生成元，那么$\mathrm{Re}(N_1)$，…，$\mathrm{Re}(N_k)$，$\mathrm{Im}(N_1)$，…，$\mathrm{Im}(N_k)$就是R上实的Γ-不变多项式环的生成元．

借用引理2.1，立即可以验证：

推论2.1 Z_n-不变的实值多项式构成R上的环$e_R=\{f(u,\ v,\ w)$；f是关于u，v，w的实系数多项式$\}$，它的生成元仍是u，v，w．

现在说明Z_n-等变映射的形式．

引理2.2 Z_n-等变映射的集合$E(Z_n)$是由z，$\bar{z}^{n-1}$在$e_C(Z_n)$上生成的模．即总存在p，$q\in e_C(Z_n)$，使得$E(Z_n)$的元$g(z,\ \bar{z})=p(u,\ v,\ w)z+q(u,v,w)\bar{z}^{n-1}$．

证明 令

$$g(z,\ \bar{z})=\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}z^\alpha\bar{z}^\beta,$$

据Z_n-等变性，就有：

$$\sum_{\alpha,\beta}a_{\alpha\beta}\bar{z}^\alpha\bar{z}^\beta\left(\exp\left[i\frac{2\pi}{n}(\alpha-\beta-1)\right]-1\right)=0.$$

欲$a_{\alpha\beta}\neq 0$，只要$\alpha-\beta-1=0(\mathrm{mod}\,n)$，因此

$$g(z,\ \bar{z})=\left\{\sum_{\beta,l}a_{\beta+1+ln}(z\bar{z})^{\beta}(z^n)^l\right\}z$$

$$+\left\{\sum_{\alpha,l}a_{\alpha,\alpha+ln+1}(z\bar{z})^{\alpha}(\bar{z}^n)^l\right\}\bar{z}^{n-1}$$

易见，z，$\bar{z}^{n-1}$前面的表达式是由$z\bar{z}$，z^n，$\bar{z}^n$生成的复系数多项式，就是复值的Z_n-不变多项式，那么总可以从$e_C(Z_n)$里找出两个元素p和q，使结论成立。

上述结果说明$E(Z_n)=\{p(u,\ v,\ w)z+q(u,\ v,\ w)\bar{z}^{n-1}:\ p,q\in e_C(Z_n)\}$，虽然$e(Z_n)$的生成元不能再减少了，但$E(Z_n)$里元素的表达式还可以进一步简化。

定理2.2 $E(Z_n)=\{p(uv)z+q(u,\ v)\bar{z}^{n-1}:\ p,\ q\in e(Z_n)\}$，其中$e(Z_n)=\{f(uv):f$是关于$u$，$v$的复系数多项式$\}$，它是$e_C(Z_n)$的闭子环。

为证明该结果，先做一个准备。

引理2.3 w^rz，$w^r\bar{z}^{n-1}$是Z_n-等变映射，那么总存在Z_n-不变的多项式$f_i(u,\ v)\in e(Z_n)$，$=1$，2，3，4，使得：

$$w^rz=f_1(uv)z+f_2(uv)\bar{z}^{n-1}$$
$$w^r\bar{z}^{n-1}=f_3(uv)z+f_4(uv)\bar{z}^{n-1}$$

这里r是任意非负整数。

证明 当$r=0$时，结论显然成立。

当$r=1$时，$wz=(iv)z-(2iu)\bar{z}^{n-1}$

$$w\bar{z}^{n-1}=(2iu^{n-1})z-(iv)\bar{z}^{n-1}.$$

以下按数学归纳法容易验证最后的结果。

最后把引理2.2和引理2.3结合起来就得到定理2.2.下面叙述几个有用的结果。

推论2.2 把Z_n-等变的多项式的系数分为实虚部，得到：

$$p(u,v)=p_1(u,v)+ip_2(u,\ v)$$
$$q(u,v)=q_1(u,v)+iq_2(u,v)$$

其中p_1，p_2，q_1，q_2是实系数的Z_n-不变多项式，则

$$g(z,\ \bar{z})=[p_1(u,v)z+q_1(u,\ v)\bar{z}^{n-1}]+i[p_2(uv)z+q_2(uv)\bar{z}^{n-1}].$$

推论2.3 如果(0，0)是$g(z,\ \lambda)$的奇点，则

(1) $n=1$，$g(0,\ 0)=0$，$(dg)_{(0,0)}=0$

(2) $n=2$，$p(0,\ 0)=q(0,\ 0)=0$.

(3) $n\geqslant 3$，$p(0,\ 0)=0$.

如果我们定义原点邻域内相等的多项式类为芽，就把在原点为零的芽多项式集合记作为$U_{z,\lambda}$，而$e_{z,\lambda}$表示原点邻域里的一般多项式芽集合。

三、Zn-等价，限制切空间和切空间

本节讨论Z_n-等变奇点理论的基本概念。

定义3.1 设g，$h\in E(Z_n)$是Z_n-等变的分叉问题.称g和h是Z_n-等价的，如果存在可逆的坐标变换$(z,\ \lambda)\to(Z(z,\ \lambda)$，$\Lambda(\lambda)$ 和映射芽$S(z,\lambda)$ 满足：

$g(z,\lambda)=S(z,\lambda)hZ(z,\lambda),\ \Lambda(\lambda))$

其中$Z(0,0)=0$，$\Lambda(0)=0$，$\Lambda'(0)>0$，且对一切$r\in Z_n$，都有：

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a)}\ Z(rz,\lambda)=rZ(z,\lambda)\\ \text{(b)}\ S(rz,\lambda)r=rS(z,\lambda)\\ \text{(c)}\ \det S(0,0)>0,\ \det(dZ)_{(0,0)}>0\end{array}\right\}\qquad(3.1\text{a,b,c})$$

引理3.1 满足（3.1b）的无限光滑的芽$S(z,\lambda)$构成$e(Z_n)$上的模，其生成元为：

$S_1w=w$，$S_2w=z^2\overline{w}$，$S_3w=\bar{z}^{n-2}\overline{w}$，$S_4w=z^nw$.

证明 设有线性映射

$$S(z,\lambda)w=\sum\alpha_{jk}(\lambda)z^j\bar{z}^kw+\sum\beta_{jr}z^j\bar{z}^k\overline{w}$$

其中$\alpha_{jk}(\lambda)$，$\beta_{jk}(\lambda)$是复数.据条件(3.1b)得到

$$\sum\alpha_{jk}(\lambda)\exp\left[(j-k)\frac{2\pi}{n}i\right]z^j\bar{z}^kw$$

$$+\sum\beta_{jk}(\lambda)\exp\left[(j-k-2)\frac{2\pi}{n}i\right]z^j\bar{z}^k\overline{w}=0$$

那么，$\alpha_{jk}\equiv0$，除非$j=k(\bmod n)$；$\beta_{jk}\equiv0$，除非$j\equiv k+2(\bmod n)$.

删去系数为0的项以因子$u=z\bar{z}$，就发现$S(z,\lambda)w$可以由下述生成元表示：

w，$z^2\overline{w}$，$\bar{z}^{ln}w$，$z^{ln+2}\overline{w}$，$\bar{z}^{ln+2}\overline{w}$，$z^{ln}w$.

注意恒等式：

$$z^{ln}w=(z^n+\bar{z}^n)z^{(l-1)n}w-(z\bar{z})^nz^{(l-2)n}w$$

$$\bar{z}^{ln}w=(z^{ln}+\bar{z}^{ln})w-z^{ln}w$$

$$z^{ln+2}\overline{w}=(z^n+\bar{z}^n)z^{(l-1)n+2}\overline{w}-(z\bar{z})^nz^{(l-2)n}\overline{w}$$

$$\bar{z}^{(l+1)n-2}\overline{w}=(z^{ln}+\bar{z}^{ln})\bar{z}^{n-2}\overline{w}-(z\bar{z})^{n-2}z^{(l-1)n-2}\overline{w}$$

$$z^{n+2}\overline{w}=(z^n+\bar{z}^n)z^2\overline{w}-(z\bar{z})^2\bar{z}^{n-2}\overline{w}$$

进一步删去多余的项及u，v因子，就得到生成元S_j，$j=1,2,3,4$.

引入不变坐标$[p,q]=p(uv)z+q(uv)\bar{z}^{n-1}$，就可以把$S_j$表示为：

$$\left.\begin{array}{l}S_1g=g=[p,\ q]\\ S_2g[u\bar{p}+v\bar{q},\ -u\bar{q}]\\ S_3g=[u^{n-2}\bar{q},\ \bar{p}]\\ S_4g=[vp+u^{n-1}q,-up\end{array}\right\}\qquad(3.2)$$

下面计算识别问题需要的限制切空间$RT(g,Z_n)$，它是$e(Z_n)$下由$S_1g,\cdots S_tg,(dg)X_1,\cdots,(dg)X_t$生成的子模，并且$S_1,\cdots,S_t,X_1,\cdots,X_t$是满足下述式子的生成元：

$$E(Z_n)=e(Z_n)\langle S_1,\cdots,S_t\rangle$$

$$U(Z_n)=e(Z_n)\langle X_1,\cdots,X_t\rangle$$

定理3.1 $RT(g,Z_n)$ 是$e(Z_n)$ 上由下述芽生成的子模：$[p,q]$，$[u\bar{p}+v\bar{q},-u\bar{q}]$，$[u^{n-2}\bar{q},\ \bar{p}]$，$[vp+u^{n-1}q,\ -up]$，

$$[2up_u+nvp_v+p,\ 2uq_u+nvq_v+(n-1)q]$$

$$[vp_u+2nu^{n-1}p_v+(n-1)u^{n-2}q,\ vq_u+2nu^{n-1}q_v+p]$$

证明 取$g(z,\bar{z})=p(u,v)z+q(u,v)\bar{z}^{n-1}$，直接应用（3.2）就得到前4个生成元，而定理2.2已给出$X_1=z$，$X_2=\bar{z}^{n-1}$，就可以算出：

$$(g_z)z+(g\bar{z})\bar{z}=(2up_u+p+nvp_v)z+(2uq_u+nvq_v+(n-1)q)\bar{z}^{n-1}$$

$$(g_z)\bar{z}^{n-1}+(g\bar{z})\bar{z}^{n-1}=(2nu^{n-1}p_v+vp_u+(n-1)u^{n-2}q)z+(p+vq_u+2nu^{n-1}q_v)\bar{z}^{n-1}$$

把这些结果写成不变坐标的形式，得到结论。

推论3.1 把第五个生成元减去第一个生成元，得到简化的第五个生成元$[2up_u+nvp_v, 2uq_u+nvq_v+(n-2)q]$，其余的生成元照旧。

最后给出证明开折定理需要的切空间$T(g, Z_n)$，即：$T(g, Z_n)=RT(g, Z_n)+R\{(dg)Y_1, \cdots(dg)Y_m, g, g_\lambda, \lambda g_\lambda\cdots\}$ 这里的Y_j满足：$E(Z_n)=U_{z,\lambda}(Z_n)\oplus R\{Y_1,\cdots, Y_m\}$，由于$\mathrm{Fix}(Z_n)=\{0\}$，那么$E(Z_n)=U_{z,\lambda}(Z_n)$。

定理3.2 $T(g, Z_n)=RT(g, Z_n)\oplus e_\lambda\{g_\lambda\}$，这里$e_\lambda$表示以$\lambda$为自变量的芽集合。

推论3.2 如果$g_1, \cdots, g_l$是$T(g, Z_n)$在$E(Z_n)$里补空间的一组基，则g的万有开折为：

$$g+\sum_{j=1}^{l}\alpha_j g_j$$

其中 α_j是开折参数。

四、n=3：Z_3-等变的奇点理论

有了以上理论准备，我们就能具体导出Z_n-等变奇点的范式和万有开折。其中$n\leqslant 3$可用于强共振亚谐分叉问题，$n=4$是临界情况，$n\geqslant 5$为弱共振的情况。本节只讨论Z_3-等变奇点的具体结果，其余情况参见有关文章[4]。

设$g(z, \lambda)$：$C\times R\to C$是Z_3-等变的分叉问题，那么$g(z, \lambda)=p(u, v, \lambda)z+q(u, v, \lambda)\bar{z}^2$，其中$u=z\bar{z}$，$v=z^3+\bar{z}^3$，$p$，$q\in e(Z_3)$。

引理4.1 令$P_3=[U_{u,v,\lambda}, e_{u,v,\lambda}]$，若下述非退化条件成立：

$$q(0, 0, 0)\neq 0, \quad p_\lambda(0, 0, 0)\neq 0 \tag{4.1}$$

则有 $RT(g, Z_3)=P_3$。

证明 由推论3.1给出$RT(g, Z_3)$的生成元，容易看出$RT(g, Z_3)=P_3$。现在要证明$P_3\subset RT(g, Z_3)$，据中山引理[1]，只须证$P_3\subset RT(g, Z_3)+P_3\cdot U_{u,v,\lambda}$。

把$RT(g, Z_3)$的生成元以$U_{u,v,\lambda}\cdot P_3$为模，用P_3的生成元表示，得到下表：

	$[u, 0]$	$[v, 0]$	$[\lambda, 0]$	$[0, 1]$
$[p, q]$	$p_u(0)$	$p_v(0)$	$p_\lambda(0)$	$p(0)$
$[u\bar{p}+v\bar{q}, -u\bar{q}]$	0	$\bar{q}(0)$	0	0
$[u\bar{q}, \bar{p}]$	$\bar{q}(0)$	0	0	0
$[vp+vq, -up]$	$q(0)$	0	0	0
$[2up_u+3vp_v, 2uq_u+3vq_v+q]$	$2p_u(0)$	$3p_v(0)$	0	$q(0)$
$[vp_v+6u^2p_u+2uq, vq_u+6u^2q_v+p]$	$2q(0)$	$p_u(0)$	0	0

对第一、二、五、六行组成的子矩阵求行列式，就得到$2\bar{q}(0)q^2(0)p_\lambda(0)$，据非退化条件(4.1)，知该行列式不为0，那么表中的系数矩阵的秩为4，做相应的逆变换，就把P_3的生成元用$RT(g, Z_3)$的生成元以$U_{u,v,\lambda}\cdot P_3$为模表示，即(4.2)成立。

综合以上两方面，就得到结论。

定理4.1 （识别问题） 在非退化条件(4.1)下，$g(z, \lambda)$是Z_3-等价于$N_3(z, \lambda)=(\varepsilon_1+i\varepsilon_2)\lambda z+\bar{z}^2$，其中$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$是确定的实常数，且$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=1$。

证明 令$g_t(z,\lambda)=[P_\lambda(0)+t(p_u(0)u+p_v(0)v+\varphi(u,v,\lambda)),\ q(0)+t\psi(u,v,\lambda)]$，这里$\varphi$，$\psi\in P_3\cdot U_{u,v,\lambda}$.由引理4.1知$RT(g_t,Z_3)=P_3$.取$t=0$及1，就有

$$RT(g_0,\ Z_3)=RT(g_1,\ Z_3)$$

注意到$g_1=g$，就得到g的Z_3-等价式子g_0.

引入标度变换：$Z(z,\lambda)=\xi z$，$\Lambda(\lambda)=\theta\lambda$，这里$\xi$是复数，且$|\xi|^2>0$，$\theta$是实数，且$\theta>0$. 把它们代入$g_0$，得到$g_0(z,\lambda)=(p_\lambda(0)\theta\xi)\lambda z+(q(0)\bar{\xi}^2)\bar{z}^2$. 取$\bar{\xi}^2=1/q(0)$，$\theta=|\sqrt{q(0)}/p_\lambda(0)|$，那么$q(0)\bar{\xi}^2=1$，$p_\lambda(0)\theta\xi=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$，这里

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\mathrm{Re}\left\{\frac{p_\lambda(0)}{\sqrt{q(0)}}\Big/\left|\frac{p_\lambda(0)}{\sqrt{q(0)}}\right|\right\}\\ \varepsilon_2&=\mathrm{Im}\left\{\frac{p_\lambda(0)}{\sqrt{q(0)}}\Big/\left|\frac{p_\lambda(0)}{\sqrt{q(0)}}\right|\right\}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

所以，$g(z,\lambda)$是Z_3-等价于$N_3(z,\lambda)$的.

说明 定理4.1里的ε_1和ε_2参见(4.3).

定理4.2 (开折定理) $N_3(z,\lambda)$的Z_3-余维数就是0，因此在非退化条件下，g的万有开折就是$N_3(z,\lambda)$.

证明 由定理3.2知：

$$\begin{aligned}T(N_3,\ Z_3)&=RT(N_3,\ Z_3)+e\lambda\left\{\frac{\partial N_3}{\partial\lambda}\right\}\\&=[U_{u,v,\lambda},\ e_{u,v,\lambda}]+e_\lambda[\varepsilon_1+i\varepsilon_2,\ 0]\\&=E_{z,\lambda}(Z_3)\end{aligned}$$

所以$\mathrm{Codim}_{Z_3}(N_3)=0$，结论成立.

五、结 束 语

本文详细地讨论了Z_n-等变奇点理论的基本模念，识别问题和万有开折的求法，并具体地给出了非退化的Z_3-等变奇点理论中的范式和万有开折. 进一步地，我们还可以讨论退化情况，以及按极坐标或转迁集导出局部分叉图.

以Z_n-等变奇点理论做基础，就可以从数学上严格地讨论周期参数激励系统的亚谐分叉，具体地给出各种分叉图，对一些实际工程振动问题，如回滞，突跳，多稳态等，做出合理的解释.

考 参 文 献

[1] Golubitsky, M, I. Stewart, and D. G. Scheaffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York 1(2)(1985, 1988).

[2] Sattinger, D.H., *Group Theoric Methods in Bifurcation Theoy*, Springer verlag, New York(1979).

[3] Buzano, E, G. Geymonant and T. Poston, Post-bucking behavior of non-linear hyperelastic thin rod with cross-section invariant under the dihedral group D_n, *Arch. Rational. Mech. Anal*, 89(4)(1985)

[4] He Guo-wei, Thesubarmonic bifurcation of the periodic parameter-excited system, Dissertation, Northwestern Polyechnical University(1991).

Zn-Equivariant Singularity Theory

He Guo-wei

(Laboratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)

Fang Tong

(Center of Vibration, Northwestern Polytechnic of University, Xi'an)

Abstract

The basic concepts, normal forms and universal unfoldings of Z_n-equivariant singularity are investigated in the present paper. As an example, the normal forms and universal unfoldings of Z_3-singularity are formulated. As a matter of fact, the theory provides a useful tool to study the subharmonic resonance bifurcation of the periodic parameter-excited system.

Key words Z_n-equivariant singularity, resonance bifurcation, periodic parameter-excited system